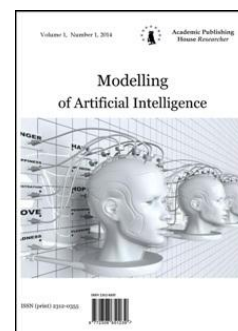


Copyright © 2015 by Academic Publishing House *Researcher*



Published in the Russian Federation
 Modeling of Artificial Intelligence
 Has been issued since 2014.
 ISSN: 2312-0355
 Vol. 5, Is. 1, pp. 18-23, 2015

DOI: 10.13187/mai.2015.5.18
www.ejournal11.com



UDC 004

Mathematical Modeling of Buying Shares on the Arbitrage-Free Markets on the Example of the Distribution of the Furry

¹ Elina A. Pilosyan

² Karina A. Kukushkina

¹ Sochi State University, Russian Federation
 Sovetskaya street 26a, Sochi city, Krasnodar Krai, 354000
 PhD (technical), Associate Professor
 E-mail: azalto@mail.ru

² Sochi State University, Russian Federation
 Sovetskaya street 26a, Sochi city, Krasnodar Krai, 354000

Abstract

The article, based on materials, examines one of the methods for determining the access of the arbitrage-free market buyers, for example, the distribution Furry.

Keywords: distribution furry; interpolation; replicability; arbitrage-free market; discounted prices.

Введение

В данной статье детально разобраны все шаги метода сведения финансовых расчетов на бесконечномерных рынках к расчетам на (B, S) -рынках с конечным числом состояний, приведены конкретные примеры финансовых расчетов на моделях, использующих распределение Фарри.

Рассмотрим безарбитражный (B, S) -рынок в случае агрессивной скупки акций со следующими характеристиками:

1. Порядок скупщиков определяется распределением Фарри, вида:

$$p(y) = pq^{y-1}, y = 1, 2, \dots, \text{ где } 0 < p < 1, q = 1 - p.$$

с параметром $p = 0,2$ (шаг 1).

2. Определяем процентные ставки d_i ($i = 1, 2, \dots$), d_∞

$$d_i = d_\infty (0,4 - 1/i)$$

где $d_\infty = 0,9$. Полагаем начальную цену акции $Z_0(B_{\infty,0}) = 2$ (шаг 2).

3. Задаем параметры $c = 0,1$ и $e = 0,01$ (шаг 3).

Определим число приоритетных скупщиков \tilde{m} .

Имеем: $d_1 = -0,54 < c$, $d_2 = -0,09 < c$, $d_3 = 0,06 < c$, $d_4 = 0,135 > c$.

Поскольку d_4 не удовлетворяет выбранному критерию, мы получаем $\tilde{m} = 3$. Остальных скупщиков считаем неприоритетными.

Для определения числа неприоритетных скупщиков, которыми нельзя пренебречь.

Имеем:

$$d_4 = 0,135, d_5 = 0,18, d_6 = 0,21, d_7 = 81/350, d_8 = 0,2475, d_9 = 0,26, d_{10} = 0,27.$$

Согласно выбранному ε получаем $\tilde{m} = 6$.

Вычислим усредненную процентную ставку:

$$d = \sum_{i=4}^9 \frac{d_i}{6} \approx 0,210655$$

Определим номера приоритетных скупщиков. Воспользуемся генератором случайных чисел, основанным на распределении Фарри:

$$y_i = \left[\frac{\text{Lnr}r_i}{\text{Ln}(1-p)} \right] + 1$$

Где r_i – одно из случайных чисел стандартной равномерной последовательности. Для каждого $k = 1, 2, 3$ проведем серию испытаний:

$$k = 1: r_1 = 0,868146, y_1 = 1 \text{ (успех)} \Rightarrow n_1^{(1)} = 1$$

$$r_2 = 0,109407, y_2 = 10 \text{ (успех)} \Rightarrow n_1^{(2)} = 10$$

$$r_3 = 0,194407, y_3 = 8 \text{ (успех)} \Rightarrow n_1^{(3)} = 8$$

$$k = 2: r_1 = 0,962528, y_1 = 1 \text{ (успех)} \Rightarrow n_2^{(1)} = 1$$

$$r_2 = 0,604049, y_2 = 1 \text{ (успех)} \Rightarrow n_2^{(2)} = 3$$

$$r_3 = 0,756433, y_3 = 2 \text{ (успех)} \Rightarrow n_2^{(3)} = 2$$

$$k = 3: r_1 = 0,7981148, y_1 = 2 \text{ (успех)} \Rightarrow n_3^{(1)} = 2$$

$$r_2 = 0,798148, y_2 = 3 \text{ (успех)} \Rightarrow n_3^{(2)} = 3$$

$$r_3 = 0,727682, y_3 = 2 \text{ (неудача)}$$

$$r_4 = 0,842884, y_4 = 1 \text{ (успех)} \Rightarrow n_3^{(3)} = 1.$$

Итоговая модель (B, S)-рынка с конечным числом состояний показана на рисунке 1.

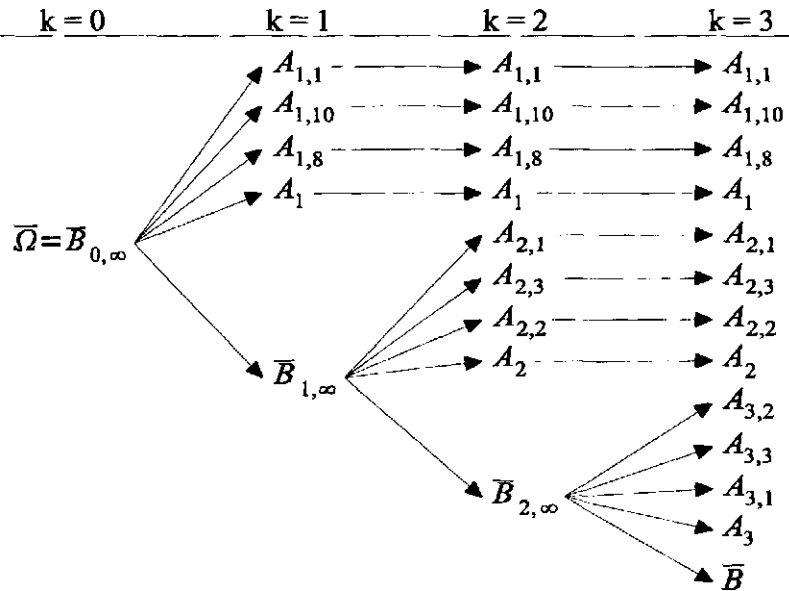


Рис. 1. Трехшаговая модель с конечным числом агрессивных скупщиков акций.

Рассчитываем дисконтированные цены акций:

k= 0:	$\bar{Z}_0(\bar{B}_{0,\infty}) = 2$		
k= 1:	$\bar{Z}_1(\bar{B}_{0,\infty}) = 3,8$ $\bar{Z}_1(A_{1,1}) = 0,92$	$\bar{Z}_1(A_1) \approx 2,42131$ $\bar{Z}_1(A_{1,10}) = 1,82$	$\bar{Z}_1(A_{1,8}) = 2,12$
k= 2:	$\bar{Z}_2(\bar{B}_{2,\infty}) = 7,22$ $\bar{Z}_2(A_{2,1}) = 1,748$ $\bar{Z}_1(A_{2,2}) = 4,028$ $\bar{Z}_2(A_{1,1}) = \bar{Z}_1(A_{1,1})$ $\bar{Z}_2(A_{1,8}) = \bar{Z}_1(A_{1,8})$	$\bar{Z}_2(A_2) \approx 4,600489$ $\bar{Z}_1(A_{2,3}) = 3,458$ $\bar{Z}_2(A_1) \approx \bar{Z}_1(A_1)$ $\bar{Z}_2(A_{1,10}) \approx \bar{Z}_1(A_{1,10})$	
k= 3:	$\bar{Z}_3(\bar{B}_{3,\infty}) = 13,718$ $\bar{Z}_3(A_{3,2}) = 3,3212$ $\bar{Z}_3(A_{3,1}) = 7,6532$ $\bar{Z}_3(A_{3,1}) = \bar{Z}_3(A_{2,3})$ $\bar{Z}_3(A_{1,1}) = \bar{Z}_2(A_{1,1})$ $\bar{Z}_3(A_{1,8}) = \bar{Z}_2(A_{1,8})$ $\bar{Z}_3(A_2) = \bar{Z}_2(A_2)$	$\bar{Z}_3(A_3) \approx 8,740929$ $\bar{Z}_3(A_{3,3}) = 6,5702$ $\bar{Z}_3(A_{2,1}) = \bar{Z}_2(A_{2,1})$ $\bar{Z}_3(A_{2,2}) = \bar{Z}_2(A_{2,2})$ $\bar{Z}_3(A_{1,10}) = \bar{Z}_2(A_{1,10})$ $\bar{Z}_3(A_1) = \bar{Z}_2(A_1)$	

На полученной конечномерной модели можно производить различные финансовые расчеты, используя технику хааровских интерполяций. Покажем это в продолжении данного примера.

Пусть финансовое обязательство задано опционом-Call европейского типа $f_N = (S_N - K)^+$ с контрактной ценой $K = 4$, имеем:

$f_N(A_{1,1}) = 0$ $f_N(A_1) = 0$ $f_N(A_{2,2}) = 0,028$ $f_N(A_{3,3}) = 2,5702$ $f_N(\bar{B}_{3,\infty}) = 9,718$	$f_N(A_{1,10}) = 0$ $f_N(A_{2,1}) = 0$ $f_N(A_2) = 0,60049$ $f_N(A_{3,1}) = 3,6532$	$f_N(A_{1,8}) = 0$ $f_N(A_{2,3}) = 0$ $f_N(A_{3,2}) = 0$ $f_N(A_3) = 4,74093$
--	--	--

Проверяем f_N на реплицируемость, и делаем вывод, что данное платежное обязательство нереплицируемо.

В дальнейшем будем отождествлять множество мер $P \in \mathcal{R}$ с множеством векторов вида $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, где $p_i = P(\bar{\omega}_i) > 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_i = 1, m = |\bar{\Omega}|$.

В частности:

$$P_1 = P(A_{1,1}),$$

$$P_2 = P(A_{1,10}),$$

$$P_3 = P(A_{1,8}),$$

$$P_4 = P(A_1)$$

$$P_5 = P(A_{2,1}),$$

$$P_6 = P(A_{2,3}),$$

$$P_7 = P(A_{2,2}),$$

$$P_8 = P(A_2),$$

$$P_9 = P(A_{3,2}),$$

$$P_{10} = P(A_{3,3}),$$

$$P_{11} = P(A_{3,1}),$$

$$P_{12} = P(A_3),$$

$$P_{13} = P(\bar{B}_{3,\infty}).$$

Решая следующие задачи линейного программирования

$$C^* = \min_{P \in \bar{\Psi}(Z,F)} E^P[f_N] \text{ и } C^* = \max_{P \in \bar{\Psi}(Z,F)} E^P[f_N]$$

находим область торга ($C^* = 0, C^* = 0, 512473$), а так же меры P^* и P^* :

$$P^* = \{0.280628, 0, 0, 0.719372, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$P^* = \{0.625, 0, 0, 0, 0.234375, 0, 0, 0, 0.087891, 0, 0, 0, 0.052734\}$$

Пусть покупатель и продавец договорились о цене контракта $C = 0, 26$. Находим вспомогательную невырожденную мартингальную меру P_{cp} и C_{cp} :

$$C_{cp} = 0, 297275, P_{cp} = \{0.510048, 0.069930, 0.069231, 0.055335, 0.141552, 0.026224, 0.025962, 0.020751, 0.034439, 0.009834, 0.009736, 0.007782, 0.019176\}$$

Так как $C^* < C \leq C_{cp}$, то $\lambda = (C_{cp} - C)/(C_{cp} - C^*) = 0,125389$ и, следовательно, мера $P \in \Psi(Z, F)$:

$$P = \lambda P^* + (1 - \lambda) P_{cp} \{0.481282, 0.061162, 0.060550, 0.138599, 0.123803, 0.022936, 0.022706, 0.018149, 0.030120, 0.008601, 0.008515, 0.006806, 0.016772\}$$

Проверяем меру на ослабленное свойство универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ) и делаем вывод, что мера удовлетворяет ОСУХЕ.

Поскольку все условия интерполируемости по Хаару выполнены, переходим к заключительной части вычислений: конструируем интерполирующий (\tilde{B}, \tilde{S}) -рынок и рассчитываем компоненты совершенного хеджа, реплицирующего f_N . На рисунке 2 частично изображен итоговый интерполирующий (\tilde{B}, \tilde{S}) - рынок. Компоненты хеджирующего портфеля вычисляются по известным формулам и представлены в таблице 1.

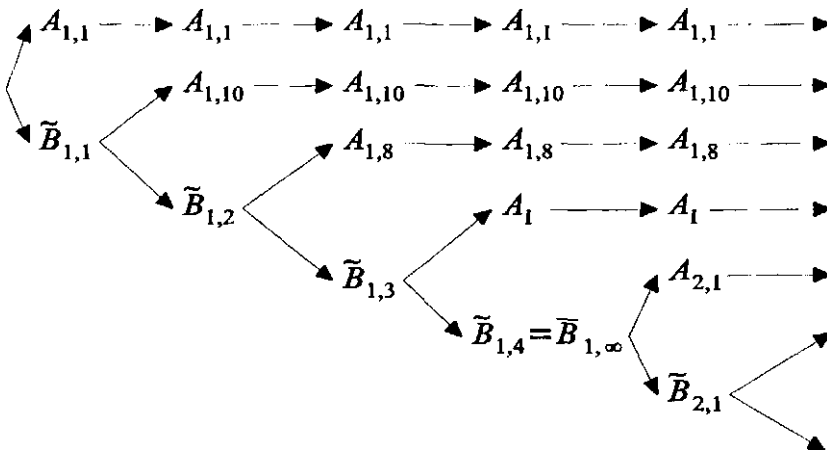


Рис. 2. Схема интерполирующего рынка

Таблица 1. Совершенный хедж $\tilde{\pi} = (\tilde{\beta}_n, \tilde{\lambda}_n)_{n=0}^{12}$

п	АТОМ	$\tilde{\beta}_n$	$\tilde{\lambda}_n$	п	АТОМ	$\tilde{\beta}_n$	$\tilde{\lambda}_n$
0	$\tilde{B}_{0,0}$	0.26	0.00	12	$A_3, \tilde{B}_{3,4}$	-4	1
1	$A_{1,1}, \tilde{B}_{1,1}$	-0.22148	0.24074	2,3,...,12	$A_{1,1}$	0	0
2	$A_{1,10}, \tilde{B}_{1,2}$	-0.77175	0.42404	3,...,12	$A_{1,10}$	0	0
3	$A_{1,8}, \tilde{B}_{1,3}$	-1.15826	0.54635	4,...,12	$A_{1,8}$	0	0

4	$A_{1, 1,4}$	-1.76706	0.72980	5,...,12	A_1	0	0
5	$A_{2,1, 2,1}$	-0.85710	0.49033	6,...,12	$A_{2,1}$	0	0
6	$A_{2,3, 2,2}$	-2.99615	0.86644	7,...,12	$A_{2,3}$	0	0
7	$A_{2,2, 2,3}$	-4.34834	1.08648	8,...,12	$A_{2,2}$	0,028	0
8	$A_{2, 2,4}$	-4.50707	1.11022	9,...,12	A_2	0,6004 9	0
9	$A_{3,2, 3,1}$	-2.98891	0.89995	10,11,12	$A_{3,2}$	0	0
10	$A_{3,3}, B_{3,2}$	-4	1	11,12	$A_{3,3}$	2,5702	0
11	$A_{3,1, 3,3}$	-4	1	12	$A_{3,1}$	3,6532	0

Таким образом, порядок скупщиков в исходной модели был не определен. Построив новую модель, порядок скупщиков стал ранжирован. И это достаточно явно показывается на примере агрессивной скупки, когда порядок появления скупщиков на рынке задается распределением Фарри.

Примечания:

1. Богачёва М.Н. Моделирование безарбитражных финансовых рынков и интерполяционные методы ее исследования. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2004.

2. Бланшет Ж., Саммерфилд М. C⁴: Программирование СШ на C++. // М.: Кудиц-Пресс, 2007.

3. Волосатова Т. А. Модели финансовых рынков, допускающих арбитраж, и их исследование с помощью метода хааровских интерполяций. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2006.

4. Выхристов В.А., Можаяев Г.А. О финансовых расчетах на безарбитражных (B, 5')-рынках с конечным числом агрессивных скупщиков акций. // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, Т.14, В.5, С.769-789.

5. Выхристов В. А., Можаяев Г. А. Примеры мартингалных мер, не удовлетворяющих ОСУХЕ, и их приближение мартингалными мерами, удовлетворяющими ОСУХЕ. // Обозрение прикладной и промышленной математики, Москва, ТВП. 2007, Т.14, В.3, С.523-524.

6. Данекянц А.Г. О специальных хааровских интерполяциях мартингалов. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, приложение, 2005, №3, С.3-20.

7. Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счетном вероятностном пространстве. // Строительство-2005, материалы международной научно- практической конференции, Ростов-на-Дону, РГСУ, 2005, С.31-34.

8. Макорин А. GLPK (GNU Linear Programming Kit)—пакет предназначенный для решения больших задач линейного программирования. // <http://www.gnu.org/software/glpk>.

9. Данекянц А.Г., Власков Г.А. Модель (B, >5)-рынка с произвольным конечным числом агрессивных скупщиков акций и совершенное хеджирование методом хааровских интерполяций. // В сб.: XIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». Ростов-на-Дону, 2005, С.100-101.

10. Данекянц А.Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счетном вероятностном пространстве. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2006.

References:

1. Bogacheva M.N. Modelirovanie bezarbitrazhnykh finansovykh rynkov i interpolyatsionnye metody ee issledovaniya. // Dissertatsiya na soiskanie uchenoi stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Rostov-na-Donu, 2004.
2. Blanshet Zh., Sammerfild M. S⁴: Programmirovaniye SSh na S++. // M.: Kudits-Press, 2007.
3. Volosatova T. A. Modeli finansovykh rynkov, dopuskayushchikh arbitrazh, i ikh issledovanie s pomoshch'yu metoda khaarovskikh interpolyatsii. // Dissertatsiya na soiskanie uchenoi stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Rostov-na-Donu, 2006.
4. Vykhristov V.A., Mozhaev G.A. O finansovykh raschetakh na bezarbitrazhnykh (V, 5')-rynках s konechnym chislom agressivnykh skupshchikov aktsii. // Obozrenie prikl. i promyshl. matem., 2007, T.14, V.5, S.769-789.
5. Vykhristov V. A., Mozhaev G. A. Primery martingal'nykh mer, ne udovletvoryayushchikh OSUKhE, i ikh priblizhenie martingal'nymi merami, udovle-tvoryayushchimi OSUKhE. // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki, Moskva, TVP. 2007, T.14, V.Z, S.523-524.
6. Danekyants A.G. O spetsial'nykh khaarovskikh interpolyatsiyakh martingalov. // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki, prilozhenie, 2005, №3, S.3-20.
7. Danekyants A.G. Modelirovanie bezarbitrazhnykh finansovykh rynkov s pomoshch'yu khaarovskikh interpolyatsii na schetnom veroyatnostnom prostranstve. // Stroitel'stvo-2005, materialy mezhdunarodnoi nauchno- prakticheskoi konferentsii, Rostov-na-Donu, RGSU, 2005, S.31-34.
8. Makorin A. GLPK (GNU Linear Programming Kit)—paket prednazna-chennyi dlya resheniya bol'shikh zadach lineinogo programmirovaniya. // <http://www.gnu.org/software/glpk>.
9. Danekyants A.G., Vlaskov G.A. Model' (V, »5,) -rynka s proizvol'nym ko-nechnym chislom agressivnykh skupshchikov aktsii i sovershennoe khedzhiro-vanie metodom khaarovskikh interpolyatsii. // V sb.: XIII Mezhdunarodnaya konferentsiya «Matematika. Ekonomika. Obrazovanie». Rostov-na-Donu, 2005, S.100-101.
10. Danekyants A.G. Modelirovanie bezarbitrazhnykh finansovykh rynkov s pomoshch'yu khaarovskikh interpolyatsii na schetnom veroyatnostnom prostranstve. // Dissertatsiya na soiskanie uchenoi stepeni kandidata fiziko- matematicheskikh nauk. Rostov-na-Donu, 2006.

УДК 004

Математическое моделирование скупки акций на безарбитражных рынках на примере распределения Фарри

¹Элина Анатольевна Пилосян

²Карина Кукушкина

¹Сочинский государственный университет, Российская Федерация
Советская улица, 26а, город Сочи, Краснодарский край, 354000
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: azalto@mail.ru

²Сочинский государственный университет, Российская Федерация
Советская улица, 26а, город Сочи, Краснодарский край, 354000

Аннотация. Статья, на основе материалов, рассматривает один из методов определения доступа скупщиков акций безарбитражных рынках, например, распределение Фарри.

Ключевые слова: распределение Фарри; интерполяция; реплицируемость; безарбитражные рынки; дисконтированные цены.