SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2015 **Issue:** 04 **Volume:** 24

Published: 30.04.2015 http://T-Science.org

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Alexandr Nikolayevich Shevtsov
candidate of technical sciences,
member of PILA (USA),
Department of «Mathematics»,
Taraz state University M.Kh. Dulati, Kazakhstan
Shev_AlexXXXX@mail.ru

Aigul Izdibaevna Chanbaeva
senior lecturer, Department of «Mathematics»,
Taraz state University M.Kh. Dulati,
Kazakhstan

Sara Ashimovna Suleymenova
teacher of mathematics
Taraz College of engineering and business,
Kazakhstan

ABOUT APPROXIMATE CALCULATION OF DEFINITE INTEGRAL

Abstract: *The paper discusses some algorithms, methods and techniques for custom computing definite integrals.*

Key words: *integral, numerical method, approximation of the solution.*
Language: *Russian*
Citation: Shevtsov AN, Chanbaeva AI, Suleymenova SA (2015) ABOUT APPROXIMATE CALCULATION OF DEFINITE INTEGRAL. ISJ Theoretical & Applied Science 04 (24): 281-286.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)51 ***Doi***: crossref http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.51

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Аннотация: *В работе рассмотрены некоторые алгоритмы, методы и способы для вычисления нестандартных определенных интегралов.*

Ключевые слова: *интеграл, численный метод, аппроксимация решения.*

Рассмотрим интеграл и методы его аппроксимации известными функциями.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr \qquad (2)$$

Очевидно, что аналитическое решение неопределенного интеграла на Maple будет следующим:

```
restart :
y := sqrt((1 - x^2)/(1 + x^2)) :
int(y, x);
```

$$\frac{\sqrt{-\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,(x^2+1)^{3/2}\sqrt{-x^2+1}\,(2\,\mathrm{EllipticF}(x,\mathrm{I})-\mathrm{EllipticE}(x,\mathrm{I}))}{\sqrt{-(x^2+1)(x^2-1)}\,\sqrt{-x^4+1}} \qquad (3)$$

Причем при нахождении определенного интеграла получим

$$2\,\mathrm{EllipticK}(\mathrm{I})-\mathrm{EllipticE}(\mathrm{I})$$

а само численное значение равно

$$0.711958659+0.\mathrm{I}$$

Также несложно проверить, что в случае (1)

$$\int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}dr$$

интеграл легко сводится к табличному:

```
restart :
y := sqrt((1 - r^2)/(1 + r^2)) :
Int(r·y, r) = int(r·y, r);
evalf( int(r·y, r = 0 ..1));
```

$$\int r\sqrt{\frac{-r^2+1}{r^2+1}}\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-\frac{r^2-1}{r^2+1}}\,(r^2+1)\left(\sqrt{-r^4+1}+\arcsin(r^2)\right)}{\sqrt{-(r^2-1)(r^2+1)}}$$

0.2853981635

В случае же с (2), мы имеем дело с подъинтегральной функцией

$$y=\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \qquad (3)$$

Её график представлен на (рис.1). Рассмотрим аппроксимацию (3) с помощью двух функций причем необходимо учитывать чтобы в результате площади фигур совпадали.

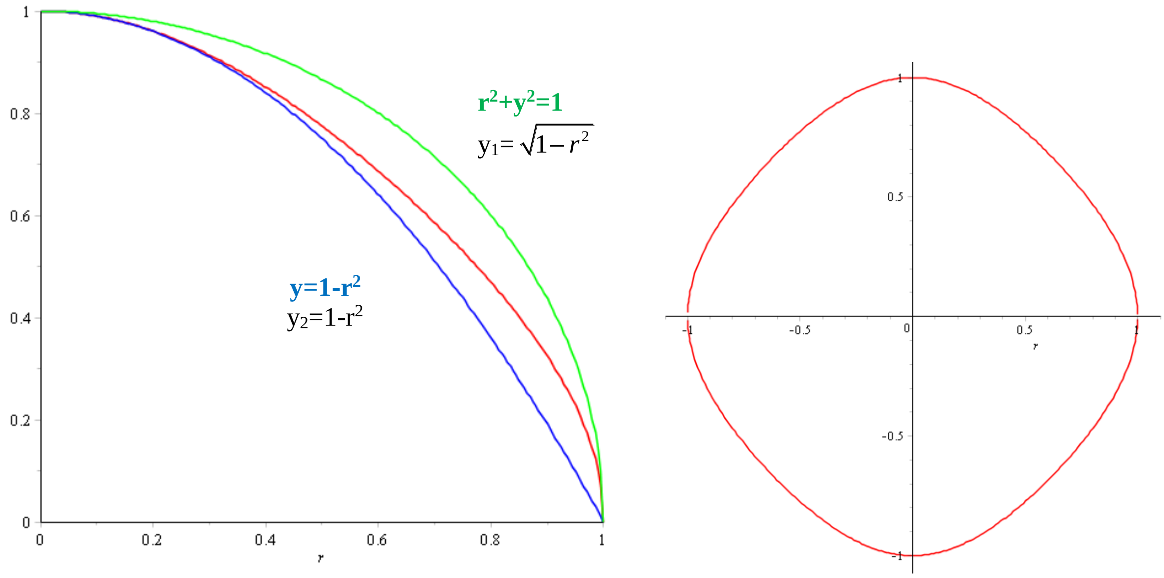

Рисунок 1 – Аппроксимация и график функции при $t=r^2$ **.**

$$y1 := \mathrm{sqrt}(1-r^2):$$
$$y2 := 1-r^2:$$
$$z := \frac{1}{e}\cdot int(y1, r) + \frac{(e-1)}{e}\cdot int(y2, r);$$

$$z1 := \frac{1}{e}\cdot int(y1, r=0..1) + \frac{(e-1)}{e}\cdot int(y2, r=0..1);$$

$$e := 2.71828182845904523536:$$

$$evalf(z1);$$

$$\int R\,dr = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{-r^2+1}+\frac{1}{2}\arcsin(r)}{e}+\frac{(e-1)\left(-\frac{1}{3}r^3+r\right)}{e}$$

$$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{e}+\frac{2}{3}\,\frac{e-1}{e}$$

0.7103455434

В результате имеем

$$\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \quad \to \quad \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{2}\arcsin(r)+(e-1)r\left(1-\frac{1}{3}r^2\right)}{e}$$

Аналогично для (1) получим:

$$\int \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{-\frac{r-1}{1+r}}\,(1+r)\left(\sqrt{-r^2+1}+\arcsin(r)\right)}{\sqrt{-(1+r)\,(r-1)}}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\,\mathrm{d}r = 0.570796327$$

$$\int R\,\mathrm{d}r = -\frac{2}{3}\,\frac{(1-r)^{3/2}}{e} + \frac{(e-1)\left(r-\frac{1}{2}r^2\right)}{e}$$

$$\int_0^1 R\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3\,e} + \frac{1}{2}\,\frac{e-1}{e}$$

$$0.5613132402$$

Аналогично для $t = r^3$ получим:

$$\int \sqrt{\frac{-r^3+1}{r^3+1}}\,\mathrm{d}r = \int \sqrt{\frac{-r^3+1}{r^3+1}}\,\mathrm{d}r$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{-r^3+1}{r^3+1}}\,\mathrm{d}r = 0.7831403974$$

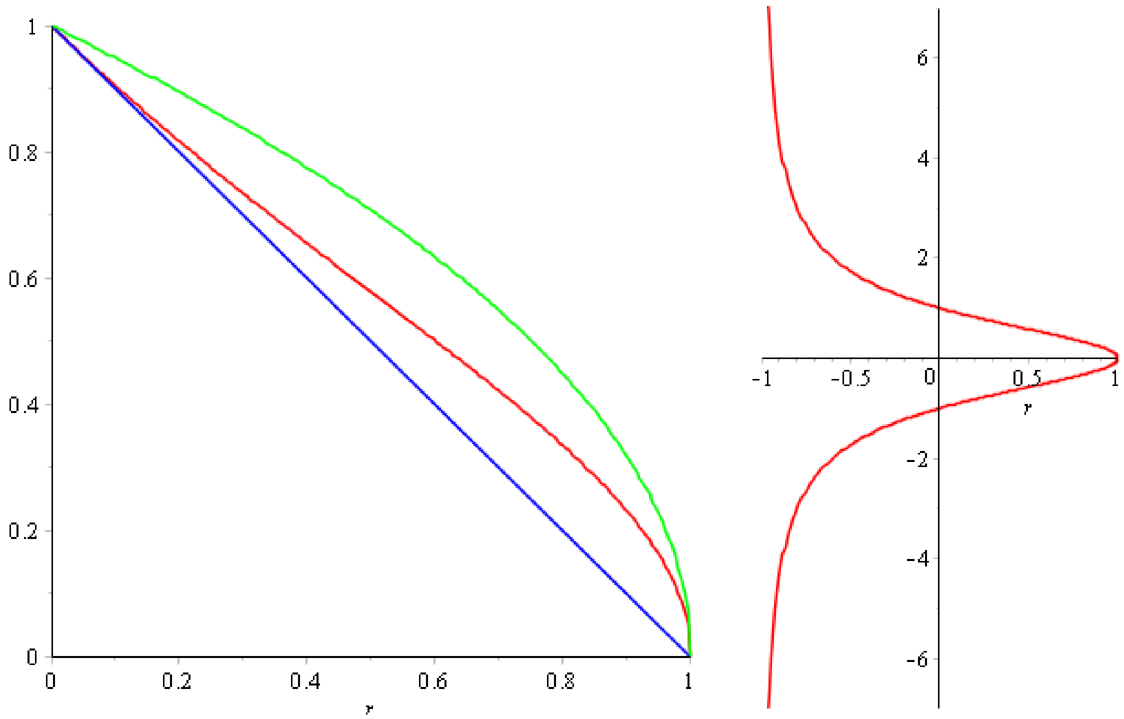

Рисунок 2 – Аппроксимация и график функции при $t = r$.

$$\int R\,\mathrm{d}r = \frac{1}{e}\left(\frac{2}{5}r\sqrt{-r^3+1} - \frac{1}{\sqrt{-r^3+1}}\left(\frac{2}{5}\mathrm{I}\sqrt{3}\sqrt{\mathrm{I}\left(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}\sqrt{\frac{r-1}{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}}}\sqrt{-\mathrm{I}\left(r+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}\,\mathrm{EllipticF}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{\mathrm{I}\left(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{\mathrm{I}\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}}}\right)\right)\right) + \frac{(e-1)\left(-\frac{1}{4}r^4+r\right)}{e}$$

$$\int_0^1 R\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{3}{4}\,\frac{e-1}{e}$$

$$0.7835908008$$

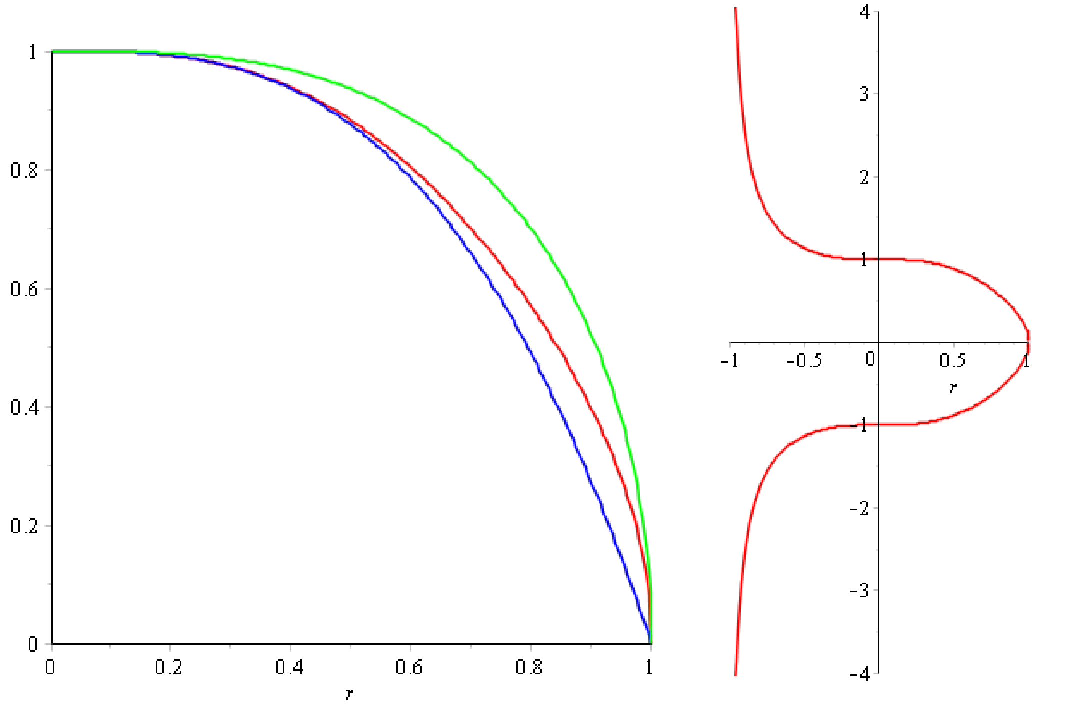

Рисунок 3 – Аппроксимация и график функции при $t = r^3$ **.**

Аналогичная ситуация повторяется и для более высоких порядков. Точность расчета функции R с ростом степени возрастает на порядок.

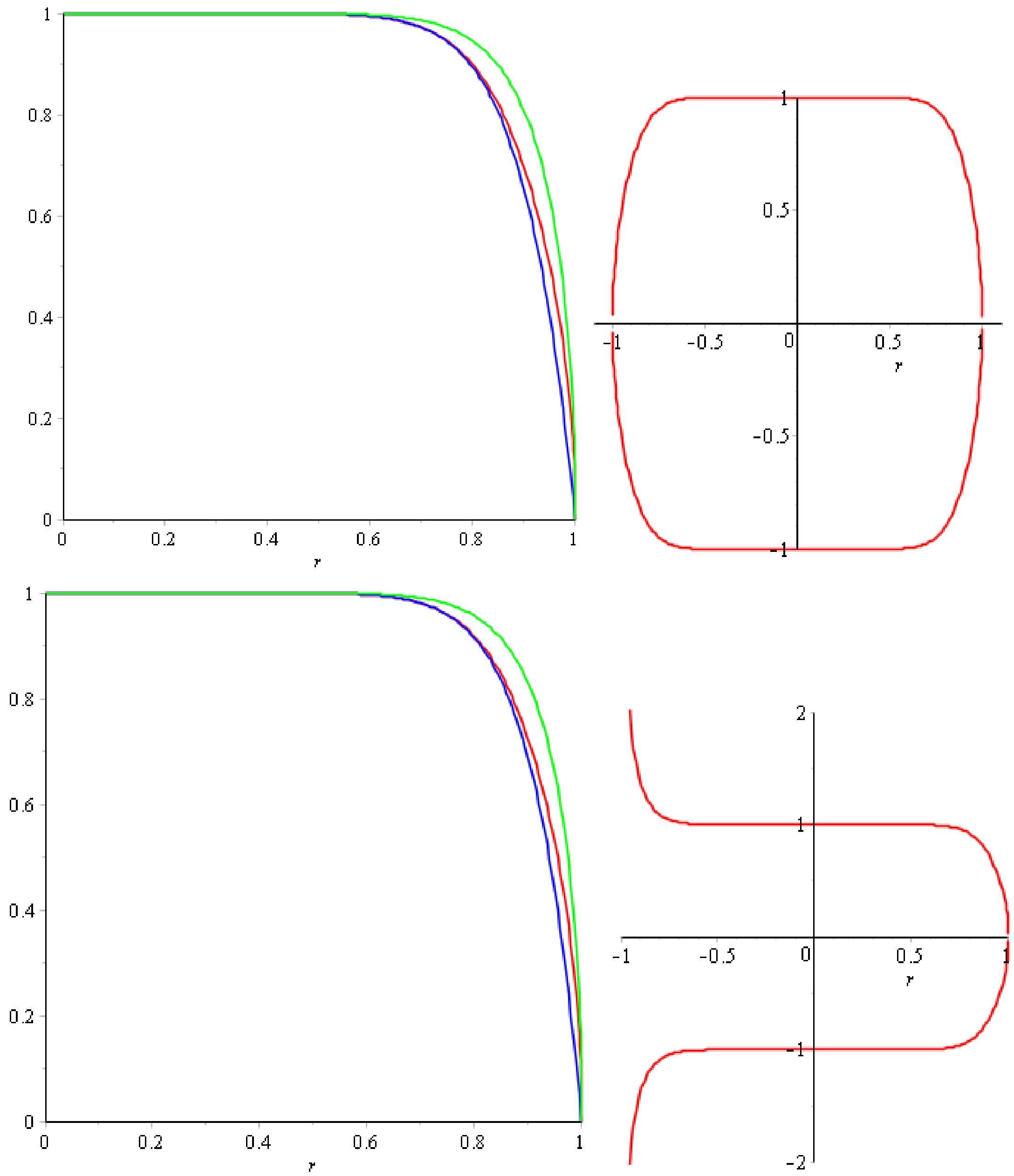

Рисунок 4 – Аппроксимация и график функции при $t = r^{10}$, $t = r^{11}$ **.**

Полученные формулы $R^* = \int_0^1 R dr$ запишем в таблицу:

n, $t = r^n$	R^* , $R^* = \int_0^1 R dr$
1	$\int_0^1 R\,dr = \frac{2}{3e} + \frac{1}{2}\,\frac{e-1}{e}$
2	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{e} + \frac{2}{3}\,\frac{e-1}{e}$
3	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{3}{4}\,\frac{e-1}{e}$
4	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{4}{5}\,\frac{e-1}{e}$

5	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{5}\,\frac{B\left(\frac{1}{5},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{5}{6}\,\frac{e-1}{e}$
6	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{6}\,\frac{B\left(\frac{1}{6},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{6}{7}\,\frac{e-1}{e}$
7	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{7}\,\frac{B\left(\frac{1}{7},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{7}{8}\,\frac{e-1}{e}$
8	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{8}\,\frac{B\left(\frac{1}{8},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{8}{9}\,\frac{e-1}{e}$
9	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{9}\,\frac{B\left(\frac{1}{9},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{9}{10}\,\frac{e-1}{e}$
10	$\int_0^1 R\,dr = \frac{1}{10}\,\frac{B\left(\frac{1}{10},\frac{3}{2}\right)}{e} + \frac{10}{11}\,\frac{e-1}{e}$

Из полученных результатов легко построить общую формулу для решения интеграла (1):

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^n}{1+t^n}}\,dt = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{3}{2}\right) + \frac{n}{n+1}(e-1)\right).$$

References:

1. Arkhipov, Sadovnichiy, Chubarikov (1999) Lektsii po matematicheskomu analizu. Uchebnik.analiz. 1999. -635 p.
2. Aksenov (2000) Matematicheskiy analiz. (Integraly, zavisyashchie ot parametra. Dvoynye integraly. Krivolineynye integraly.) Uchebnoe posobie SPb. 2000. -145 p.
3. Stefan Banakh (1966) Differentsial'noe i integral'noe ischislenie. 1966. -437 p.
4. Budak BM, Fomin SV (1965) Kratnye integoaly i ryady. Uchebnik.1965. -606 p.
5. Kochetkov (1999) Kratkiy kurs matematicheskogo analiza, lineynoy algebry i matematicheskog modelirvaniya. MGII. 1999. 60 p.
6. Zorich VA (1997) Matematicheskiy analiz. V 2-kh chastyakh. Uchebnik. 1- 1997, 2 - 1984. 567+640 p.
7. Il'in, Poznyak (2005) Osnovy matematicheskogo analiza. 2002-2005gody. V 2-kh chastyakh. 1 ch. 644 p., 2 ch. 464 p.
8. Tikhomandridskiy (1895) Teoriya ellipticheskikh" integralov". 133 dvoynykh str. Raritetnoe izdanie. Khar'kov.
9. LEONARD ZYLER (1956) INTEGRAL"NOE ISChISLENIE. V 3-kh tomakh. PEREVOD S LATINSKOGO. 1956-1958.
10. Butuzov VF, Krutitskaya NC, Medvedev GN, Shishkin AA (2002) Matematicheskiy analiz v voprosakh i zadachakh: Ucheb. posobie. 5-e izd., ispr. 2002. 480 p.
11. Lungu, Makarov (2005) Vysshaya matematika. Rukovodstvo k resheniyu zadach. Chast' 1. 2005. -315 p.