SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2015 **Issue:** 03 **Volume:** 23

Published: 30.03.2015 **http://T-Science.org**

Gulmira Saginganovna Kenzhebekova
PhD of the department of Higher Mathematics
L.N. Gumilyov Eurasian National University,
Kazakhstan
gulmira0703@yandex.ru

SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

ON THE INTEGRABILITY OF THE FUNCTIONS WITH MONOTONE DECREASING FOURIER COEFFICIENTS WITH RESPECT TO MULTIPLICATIVE SYSTEMS

Abstract: *In this work one generalization of the theorem of Hardy-Littlewood about Fourier series with monotone coefficients with respect to multiplicative systems is proved.*
Key words: *Fourier series, Fourier coefficients, Dirichlet`s kernel, multiplicative systems.*
Language: *Russian*
Citation: Kenzhebekova GS (2015) ON THE INTEGRABILITY OF THE FUNCTIONS WITH MONOTONE DECREASING FOURIER COEFFICIENTS WITH RESPECT TO MULTIPLICATIVE SYSTEMS. ISJ Theoretical & Applied Science 03 (23): 55-58.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*03(23)11 ***Doi***: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.03.23.11

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННО УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Аннотация: *В данной работе доказывается одно обобщение теоремы Харди-Литтлвуда о рядах с монотонными коэффициентами Фурье по мультипликативным системам.*
Ключевые слова: *Ряды Фурье, коэффициенты Фурье, ядро Дирихле, мультипликативные системы.*

Приведем определение мультипликативной системы Прайса.

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность натуральных чисел, $p_n \ge 2,\ n = 1,2,...$. Положим

$$m_0 = 1,\ m_n = p_1 ... p_n \quad \text{при} \quad n \in N .$$

Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n},\ \ 0 \le x_n < p_n, \quad x_n \text{ - целые.}$$

Такое разложение будет единственным, если для $x = \dfrac{l}{m_n}$ брать разложение с конечным числом ненулевых x_n. Если $k \in Z_+$ записано в виде

$k = \sum_{s=1}^{\nu(k)} k_s m_{s-1},\ 0 \le k_s < p_s,\ k_s$ - целые, то по определению для $x \in [0,1)$ полагаем

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\nu(k)} \frac{x_j k_j}{p_j}\right).$$

Таким образом, построенная система $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется мультипликативной на $[0,1)$ системой Прайса (см.[1]). Известно, что указанная система является полной ортонормированной системой в $L_2[0,1)$ (см.[2]).

Мультипликативные системы рассматривались впервые в работах Н.Я. Виленкина [3], А.В. Ефимова [4], А. Прайса [5]. Свойства мультипликативных систем излагаются в [2].

Сумма

$$D_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\chi_k(x)$$

называется n -м ядром Дирихле. Известно, что

$$D_{m_n}(x)=m_n\chi_{\left[0,\frac{1}{m_n}\right)},$$

где χ_E - характеристическая функция множества E.

Г.Г. Харди и Дж. И. Литтлвуд доказали [6], что при убывании к нулю последовательности $\{b_k\}$ сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cos kx,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx \tag{1}$$

принадлежит $L_p[0,2\pi]$, $1<p<\infty$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^p n^{p-2}<\infty .$$

Аналог этой теоремы для системы Уолша доказан Ф. Морицем [7], для мультипликативных систем с ограниченными образующими последовательностями $\{p_n\}$ $\left(1\le\sup\limits_n p_n<M\right)$ - М.Ф. Тиманом, К. Тухлиевым [8].

Многие авторы вводили более слабые условия на b_k, чем монотонность. А.А. Конюшков [9] изучал поведение наилучших приближений в $L_p[0,2\pi]$, $1<p<\infty$, для функций, задаваемых тригонометрическими рядами (1), при условии, что $b_k k^{-\tau}$ убывает при некотором $\tau\ge 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$. В другой форме это условие рассматривал О. Сас [10]. Г.К. Лебедь [11] изучал ряды (1) также при условии, что $k^{\tau}b_k$ возрастает при некотором $\tau>0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$.

Основной целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть функция $f\in L_p$ $(1\le p<\infty)$ с монотонно убывающими коэффициентами Фурье $b=b_n(f)\downarrow 0$ по мультипликативной системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\varphi(t)$ – неубывающая функция на $[0,\infty)$ такая, что $\varphi(t^2)\le C\varphi(t)$ и $\varphi(t)t^{-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ не возрастает.

Тогда для того, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^1|f(x)|^r\varphi\left(|f(x)|^r\right)dx \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}m_n^{r-1}b_{m_n}^r\varphi(m_{n-1}). \tag{3}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая вспомогательная лемма (см.[12]).

Лемма. Пусть функция $\Phi(u)$ неотрицательна и не убывает на $[0;\infty)$. Тогда:

А) если неотрицательная функция $\psi(u)$ не возрастает на $(0,1]$ и

$$A\equiv\int_0^1\psi(u)\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du<\infty, \tag{4}$$

то

$$B\equiv\int_0^1\psi(u)\Phi(\psi(u))du<\infty; \tag{5}$$

В) если $\Phi(u^2)\le C\Phi(u)$ при некоторой постоянной $C\ge 1$ и $u\in[0,\infty)$, то для всякой неотрицательной функции $\psi(x)$, измеримой на $[0,1)$ и удовлетворяющей условию (4), выполнено неравенство (5).

Доказательство теоремы.

Необходимость. В силу свойства ядра Дирихле $D_{m_n}(t)$ для монотонных последовательностей $b_n(t)$ имеем

$$F\left(\frac{1}{m_n}\right)=\int_0^{\frac{1}{m_n}}f(t)dt=\frac{1}{m_n}\int_0^1 f(t)D_{m_n}(t)=$$

$$=\frac{1}{m_n}\sum_{k=0}^{m_n-1}b_k(t)\ge b_{m_n}.$$

Значит,

$$b_{m_n}\le\int_0^{\frac{1}{m_n}}f(t)dt,\quad n=1,2,\ldots$$

Поэтому, учитывая то, что φ - неубывающая функция по условию, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{r-1} b_{m_n}^r \varphi(m_{n-1}) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{r-1} \varphi(m_{n-1}) \left(\int_0^{\frac{1}{m_n}} f(t)dt \right)^r \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} m_{n-1}^r \left(\frac{2}{m_{n-1}} \right) \left(\int_0^{\frac{1}{m_{n-1}}} \varphi^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{t}\right) |f(t)| dt \right)^r \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m_{n-1}} - \frac{1}{m_n} \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{m_{n-1}}} \int_0^{\frac{1}{m_{n-1}}} \varphi^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{t}\right) |f(t)| dt \right)^r \le$$

$$\le C_r \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_n}}^{\frac{1}{m_{n-1}}} \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x \varphi^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{t}\right) |f(t)| dt \right\}^r dx =$$

$$= C_r \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x \varphi^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{t}\right) |f(t)| dt \right\}^r dx .$$

В силу известного неравенства Харди [13] имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{r-1} b_{m_n}^r \varphi(m_{n-1}) \le \int_0^1 \varphi\left(\frac{1}{t}\right) |f(t)|^r dt .$$

Тогда согласно лемме из (2) вытекает (3).

Достаточность. Для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{r-1} b_{m_n}^r \varphi(m_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-(1-\varepsilon)} \left\{ b_{m_n} m_n \varphi^{\frac{1}{r}}(m_n) m_n^{-\frac{\varepsilon}{r}} \right\}^r ,$$

то, используя известное неравенство [13]

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-c} \left(\sum_{v=1}^{n} a_v \right)^l \le C(c,l) \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-c} (m_n a_n)^l$$
$$(c > 1,\ l > 1,\ a_v \ge 0).$$

и свойство функции $\varphi(t)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m_n}^r m_n^{r-1} \varphi(m_n) \ge$$

$$\ge C_r \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-(1-\varepsilon)} \left\{ \sum_{v=1}^{n} b_v \varphi^{\frac{1}{r}}(v) v^{-\frac{\varepsilon}{r}} \right\} \ge$$

$$\ge C_r \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(m_n) m_n^{-(1-\varepsilon)} \left(\sum_{v=1}^{m_n} b_v \right)^r =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(m_n) m_n^{-1} \left(\sum_{v=1}^{m_n} b_v \right)^r = S(r,\varphi).$$

Так как

$$J(r,\varphi) = \int_0^1 |f(x)|^r \varphi\{|f(x)|^r\} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} |f(x)|^r \varphi\{|f(x)|^r\} dx$$

и для $\frac{1}{m_{n+1}} \le x \le \frac{1}{m_n}$

$$|f(x)| \le \sum_{v=1}^{m_n} b_v + \frac{b_n}{x} \le$$

$$\le \sum_{v=1}^{m_n} b_v + (m_{n+1}) b_n \le 3 \sum_{v=1}^{m_n} b_v ,$$

то

$$J(r,\varphi) \le 3^r \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} \left(\sum_{v=1}^{m_n} b_v \right)^r \varphi\left\{ 3 \sum_{v=1}^{m_n} b_v \right\}^r \le$$

$$\le 3^r \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1} \left(\sum_{v=1}^{m_n} b_v \right)^r \varphi\left\{ 3 \sum_{v=1}^{m_n} b_v \right\}^r \le$$

$$\le 3^r \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1} \left(\sum_{v=1}^{m_n} b_v \right)^r \varphi\left(3^r b_1^r m_n^r \right).$$

Из условия (3) вытекает конечность величины $S(r,\varphi)$, а в силу свойств функции $\varphi(t)$ и конечность величины $J(r,\varphi)$, т.е. (2).

Аналогичная теорема для рядов по косинусам ранее доказана М.Ф. Тиманом [14].

References:

1. Agaev GN, Vilenkin NY, Jafarli GM, Rubinshtein AI (1981) Multiplikativnye sistemy funktsii i garmonicheskii analiz na nul-mernykh gruppakh. ELM, Baku, 1981, 180.
2. Golubov BI, Efimov AV, Skvortsov VA (1987) Ryady i preobrazovaniya Uolsha: Teoriya i primeneniya. – M. Nauka, 1987, 344.
3. Vilenkin NY (1947) Ob odnom klasse polnykh ortonormalnykh system. Izv. AN SSSR, Seriya matematika, 1947, T.12, 363 – 400.
4. Efimov AV (1966) O nekotorykh approksimativnykh svoistvakh periodicheskikh multiplikativnykh ortonormirovannnykh system. Mat. sbornik 1966, T. 69, № 3, 354 – 370.
5. Price AJ (1957) Certain group of ortonormal step functions. Canad. J.Math. 1957, V. 9, № 3, pp. 413 – 425.
6. Zigmund A (1965) Trigonometricheskie ryady, Moscow: “Mir”, 1965, T. 1,2.
7. Moricz F (1981) On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero. Acta Math., Acad. Sci. Hung-1981-v.38, №1-4., pp.183-189.
8. Timan MF, Tukhliyev K (1983) Svoistva nekotorykh ortonormirovannykh sistem. Izv. vuzov, Matematika, 1983, №9, 65 – 73.
9. Konyushkov AA (1958) Nailuchshee priblizhenie trigonometricheskimi polinomami i koefficienty Fur’e, Mat. sbornik, 44(1958), 53-84.
10. Szasz O (1948) Quasi-monotone series, Amer. J. Math., 70(1948), 203-206.
11. Lebed GK (1967) O trigonometricheskikh ryadakh s koefficientami, udovletvoryayushimi nekotorym usloviyam. Mat. sbornik, 74(1967), 100-118.
12. Ulyanov PL (1968) Vlozhenie nekotorykh klassov funktsii. Izv. AN SSSR, seriya matematika, 1968, T.32, 649 – 686.
13. Hardy GH, Littlewood JE, Polya G (1934) Inequalities, Cambridge University Press, New York, 1934.
14. Timan MF (1982) Nekotorye dopolneniya k teoremam vlozheniya Ulyanova. № 1750-82, Dep. v VINITI, 1982, 15.