УДК 517.9

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Н. А. Кучер, М. А. Горобец

RATIONALE FOR WEAK APPROXIMATION METHOD FOR SHALLOW WATER EQUATIONS

N. A. Kucher, M. A. Gorobets

В работе рассматривается дифференциальная схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям для уравнений «мелкой воды» и доказывается ее сходимость в шкале пространств С. А. Соболева. Результаты работы являются основой построения и математического анализа экономичной конечно-разностной схемы расщепления.

The paper considers the differential scheme of splitting into physical processes and spatial directions for the equations of "shallow water" and proves its convergence in the scale of S. A. Sobolev’s spaces. The results are the basis of the construction and mathematical analysis of economical finite difference splitting scheme.

Ключевые слова: схема расщепления, сходимость, уравнения мелкой воды.

Keywords: splitting scheme, convergence, shallow water equations.

Уравнения «мелкой воды» в случае ровного дна могут быть представлены в виде [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}=0, \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x})=0,$$

где $\{u,v\}$ – компоненты вектора скорости частиц в прямоугольной системе координат, x,y, h – глубина жидкости, связанная с давлением p по формуле $p=\frac{1}{2}h^2$. Размерности переменных выбраны так, что ускорение силы тяжести $g=1$ и плотность жидкости $\rho=1$.

Уравнения $(1a)$ должны быть дополнены начальными условиями:

$$u|_{t=0}=u^0(x,y),\ v|_{t=0}=v^0(x,y),$$

$$h|_{t=0}=h^0(x,y), \qquad (1б)$$

в $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$

и граничными условиями, в качестве которых примем условия периодичности искомой вектор-функции $U=\{u,v,h\}$ по каждой пространственной переменной

$$U|_{x=0}=U|_{x=1}, 0<y<1, t\epsilon(0,T) \qquad (1c)$$

$$U|_{y=0}=U|_{y=1}, 0<x<1, t\epsilon(0,T).$$

Для системы дифференциальных уравнений $(1a)$ рассмотрим расщепление по физическим процессам и пространственным направлениям, заключающееся в том, что на каждом целом шаге $[n\tau,(n+1)\tau], n=0,..N-1$, ($N$ – целое число) системе $(1a)$ сопоставляются следующие, последовательно интегрируемые системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a_\tau\frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial t}+a_\tau\frac{\partial v}{\partial x}=0\ , \frac{\partial H}{\partial t}+a_\tau\frac{\partial H}{\partial x}=0,$$

$$n\tau<t\le n\tau+\tfrac{1}{4}\tau \qquad (\mathrm{I}_n)$$

здесь $a_\tau=4u_\tau^n=4u_\tau(u_\tau)$, $h=H^2$;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+8c_\tau\frac{\partial H}{\partial x}=0, \frac{\partial H}{\partial t}+2c_\tau\frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial t}=0,$$
$$n\tau+\tfrac{1}{4}\tau<t\le n\tau+\tfrac{1}{2}\tau, \qquad (\mathrm{II}_n)$$

$$c_\tau=H_\tau^{n+\frac{1}{4}}=H_\tau(\left(n+\tfrac{1}{4}\right)\tau);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b_\tau\frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial t}+b_\tau\frac{\partial v}{\partial y}=0, \frac{\partial H}{\partial t}+b_\tau\frac{\partial H}{\partial y}=0,$$
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau<t\le n\tau+\frac{3}{4}\tau \qquad (\mathrm{III}_n)$$
$$b_\tau=4v_\tau^{n+\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+8d_\tau\frac{\partial H}{\partial y}=0, \frac{\partial H}{\partial t}+2d_\tau\frac{\partial v}{\partial y}=0, \frac{\partial H}{\partial t}=0,$$
$$n\tau+\frac{3}{4}\tau<t\le n\tau \qquad (\mathrm{IV}_n)$$
$$d_\tau=H_\tau^{n+\frac{3}{4}}.$$

Для каждой из систем уравнений (I_n) – (IV_n) ставятся граничные условия в виде условий периодичности вида $(1c)$ по пространственным переменным. В качестве начальных данных для каждой из систем уравнений (I_n) – (IV_n) принимаются решения, полученные на предыдущем дробном шаге.

Сформулированную выше схему расщепления назовем для краткости задачей P_τ.

Априорные оценки вспомогательной задачи P_τ

В работе используются общепринятые обозначения функциональных пространств [3; 5].

Через $C_\pi^l(\bar{\Omega})$ обозначается множество функций, имеющих непрерывные производные на плоскости x,y до порядка l включительно и периодических (с единичным периодом) по каждой переменной x,y. Таким образом $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ – прямоугольник периодов функций $C_\pi^l(\bar{\Omega})$.

$H_\pi^l(\Omega)$ – Гильбертово пространство, полученное пополнением пространства функций $C_\pi^l(\bar{\Omega})$ по норме:

$$||u||^2_{H_\pi^l(\Omega)}=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le l}|D^\alpha u|^2dxdy$$

$$D^\alpha = D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2}, D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Как известно [ ], элементы пространства $H_\pi^l(\Omega)$ – периодические по каждой переменной x, y функции (с прямоугольником периодичности Ω), обладающие обобщенными производными в смысле С. А. Соболева до порядка l включительно, суммируемыми по Ω с квадратом.

Если $(x, y, t) \rightarrow f(x, y, t)$ – функция, зависящая от пространственных переменных $(x, y) \epsilon\, \Omega$ и времени $t \epsilon\, (0, T)$, то положим:

$$f(t) = \ll (x, y) \rightarrow f(x, y, t) \gg$$

и будем рассматривать f как функцию аргумента t со значениями в пространстве функций, определенных на Ω. Например, $C([0, T];\ H_\pi^l(\Omega))$ – совокупность непрерывных отображений $f: [0, T] \rightarrow H_\pi^l(\Omega)$ с нормой

$$||f||_{C([0,T];\ H_\pi^l(\Omega))} = sup_{t\,\epsilon\,(0,T)} \big||f(t)\big||_{H_\pi^l(\Omega)}.$$

Основной результат этого раздела сформулирован в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть начальные данные

$$U^0(x, y) = \{u^0(x, y), v^0(x, y), h^0(x, y)\}\ h^0(x, y) > 0$$

в $(1b)$ удовлетворяют следующим условиям жидкости:

$$u^0, v^0 \epsilon H_\pi^l(\bar{\Omega}), H^0 = \sqrt[2]{h^0} \epsilon H_\pi^l(\Omega).$$

Тогда:

(i) на произвольном конечном промежутке $0 < t < T$ задача P_τ для каждого $\tau\ \epsilon\ (0, T)$ однозначно разрешима в классе

$$\{u_\tau(t), v_\tau(t), H_\tau(t)\} \epsilon C([0, T];\ H_\pi^l(\Omega));$$

(ii) на некотором промежутке $[0, T]$, определяемом нормой в $H_\pi^l(\Omega), l \geq 4$ начальной вектор-функции:

$$U^0(x, y) = \{u^0(x, y), v^0(x, y), h^0(x, y),\}$$

имеют место следующие равномерные относительно τ оценки

$$||u_\tau(t)||_{C([0,T];\ H_\pi^l(\Omega))},$$
$$||v_\tau(t)||_{C([0,T];\ H_\pi^l(\Omega))},$$
$$||H_\tau(t)||_{C([0,T];\ H_\pi^l(\Omega))} \leq K \qquad (2)$$
$$||\frac{\partial u_\tau}{\partial t}(t)||_{C([0,T];\ H_\pi^{l-1}(\Omega))} \leq K. \qquad (3)$$

Приведем краткую схему доказательства леммы 1. Поскольку при фиксированном τ на каждом дробном шаге соответствующая система уравнений имеет гладкое периодическое по переменным x, y решение, если таковыми являются соответствующие начальные функции, то доказательство леммы 1 сводится к получению априорных оценок в $C([0, T];\ H_\pi^l(\Omega)$ для каждой из систем (I_n) – (IV_n) и равномерных относительно параметра τ неравенств $(2), (3)$ для схемы расщепления P_τ.

Для получения априорных оценок решений задач P_τ на отдельных дробных шагах воспользуемся следующим результатом [1,2] относительно модельной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ в } Q_{t_0,t_1} = \Omega^\times(t_0, t_1) \qquad (4)$$

$$u|_{t=0} = u^0(x, y) \text{ в } \Omega. \qquad (5)$$

Лемма 2. Предположим, что $a(x, y) \epsilon H_\pi^l(\Omega), l \geq 3$. Тогда для произвольной начальной функции $u^0(x, y) \epsilon H_\pi^l(\Omega)$ в (5) существует единственное классическое решение $u(t) \epsilon C([t_0, t_1];\ H_\pi^l(\Omega))$ задачи $(4), (5)$ и для него имеет место неравенство:

$$||u_\tau(t)||_{H_\pi^l(\Omega)} \leq ||u^0||_{H_\pi^l(\Omega)} * \qquad (6)$$
$$* \exp\{M_l \big||a\big||_{H_\pi^l(\Omega)} * (t - t_0)\},$$

где положительная постоянная M_l зависит только от числа l и области Ω.

Модельная задача, соответствующая задачам $(\mathrm{II}_n), (\mathrm{IV}_n)$ заключается в отыскании в цилиндре $Q_{t_0,t_1} = \Omega^\times(t_0, t_1)$ периодического по x, y решения систем уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 8c(x, y)\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \frac{\partial H}{\partial t} + 2c(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

удовлетворяющей начальным условиям

$$u|_{t=0} = u^0(x, y), H|_{t=0} = H^0(x, y). \qquad (8)$$

Лемма 3. Пусть $C(x, y) \epsilon H_\pi^l(\Omega)$ и начальные функции u^0, H^0 в (8) также принадлежат классу $H_\pi^l(\Omega), l \geq 4$. Тогда задача $(7), (8)$ имеет единственное классическое решение

$$\vec{v}(t) = (u(t), H(t)) \epsilon C([0, T];\ H_\pi^l(\Omega))$$

и для него имеет место оценка

$$||v_\tau(t)||_{H_\pi^l(\Omega)} \leq ||\vec{v}(t_0)||_{H_\pi^l(\Omega)} *$$

$$* \exp\{M_l \big||l\big||_{H_\pi^l(\Omega)} * (t - t_0)\}, \qquad (9)$$

$$\vec{v}(t_0) = \left(u^0(x, y), H^0(x, y)\right),$$

где положительная постоянная M_l зависит только от числа l и области Ω.

Относительно доказательства леммы 3 (см. [2]).

Утверждения леммы 1 и равномерные оценки $(2), (3)$ получаем применением к задачам $(\mathrm{I}_n), (\mathrm{III}_n)$ результатов вспомогательной леммы 2, а к задачам $(\mathrm{II}_n), (\mathrm{IV}_n)$ – результатов леммы 3.

Сходимость схемы расщепления P_τ

Докажем сходимость решений

$$U_\tau(t) = \{u_\tau(t), v_\tau(t), H_\tau(t)\}$$

к точному решению задачи (1). Поскольку вектор-функция $U_\tau(t)$ удовлетворяет системе уравнений $(\mathrm{I}_n) - (\mathrm{IV}_n)$, то для средних функций

$$\widetilde{U_\tau}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} U_\tau(s)ds$$

получаем следующую систему уравнений (для определенности $t = n\tau$):

$$\frac{\partial \widetilde{U_\tau}}{\partial t} + K_{1,\tau}(t)\frac{\partial \widetilde{U_\tau}}{\partial x} + K_{2,\tau}(t)\frac{\partial \widetilde{U_\tau}}{\partial y} = F_\tau, \qquad (10)$$

$$\text{где } K_{1,\tau} = \begin{pmatrix} u_\tau(t) & 0 & 2H_\tau(t + \frac{1}{4}\tau) \\ 0 & u_\tau(t) & 0 \\ \frac{1}{2}H_\tau(t + \frac{1}{4}\tau) & 0 & u_\tau(t) \end{pmatrix},$$

$$K_{2,\tau} = \begin{pmatrix} v_\tau(t + \frac{1}{2}\tau) & 0 & 0 \\ 0 & v_\tau(t + \frac{1}{2}\tau) & 2H_\tau(t + \frac{3}{4}\tau) \\ 0 & \frac{1}{2}H_\tau(t + \frac{3}{4}\tau) & v_\tau(t + \frac{1}{2}\tau) \end{pmatrix},$$

$$F_\tau = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\left[K_{1,\tau}(t) - M_\tau(s)\right]\frac{\partial U_\tau}{\partial x}(s)ds +$$

$$+\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\left[K_{2,\tau}(t) - N_\tau(s)\right]\frac{\partial U_\tau}{\partial y}(s)ds;$$

$$M_\tau(t) = \alpha_1(t,\tau)A_\tau(t) + \alpha_2(t,\tau)C_\tau(t),$$

$$N_\tau(t) = \alpha_3(t,\tau)B_\tau(t) + \alpha_4(t,\tau)D_\tau(t),$$

$$\alpha_i(t,\tau) = \begin{cases} 4 \text{ при } t \in \left(\left(n + \frac{i-1}{4}\right)\tau, \left(n + \frac{i}{4}\right)\tau\right] \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$
$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Матрицы $A_\tau(t), B_\tau(t), C_\tau(t), D_\tau(t)$ определяются посредством следующих формул:

$$A_\tau(t) = u_\tau(t)E_3\ , B_\tau(t) = v_\tau\left(t + \frac{1}{2}\tau\right)E_3,$$

$$C_\tau(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2H_\tau(t + \frac{1}{4}\tau) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}H_\tau(t + \frac{1}{4}\tau) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_\tau(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2H_\tau(t + \frac{3}{4}\tau) \\ 0 & \frac{1}{2}H_\tau(t + \frac{3}{4}\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

E_3 – единичная матрица третьего порядка.

В силу оценок $(2), (3)$ можно выделить подпоследовательность $\{\tau_k\}$ с $\{\tau\}$ такую, что

$$U_{\tau_k}(t) \to U(t) \text{ * – слабо в } L^\infty([0,T], H_\pi^l(\Omega)) \quad (11)$$

$$U_{\tau_k}(t) \to U(t) \text{ сильно в } C([0,T], H_\pi^{l-1}(\Omega)) \quad (12)$$

$$\frac{\partial U_{\tau_k}}{\partial t}(t) \to \frac{\partial U}{\partial t} \text{ * – слабо в } L^\infty\left([0,T], H_\pi^{l-1}(\Omega)\right).$$

Поскольку имеет место компактное вложение $H_\pi^l(\Omega)$ в пространство $C_\pi^{l-2}(\Omega)$, то из $(11), (12)$, в частности, следует $D^\alpha U_{\tau_k} \to D^\alpha U$ равномерно в

$$\Omega x(0,T),\ |\alpha| \le l - 2. \quad (13)$$

Из свойств оператора усреднения T_τ и соотношений $(11), (12)$ вытекает, что средняя функция $\{\widetilde{U_{\tau_k}}\}$ обладает свойствами, аналогичными $(11), (12)$. Это обстоятельство позволяет совершить предельный переход в системе уравнений (1), в результате которого получим, что предельные функции

$$U(t) = \{u(t), v(t), H(t)\}$$

удовлетворяют системе уравнений эквивалентной исходной системе (1).

Таким образом, доказана следующая теорема о сходимости.

Теорема. Предположим, что начальные функции $u^0(x,y), v^0(x,y), h^0(x,y)$ принадлежат пространству $H_\pi^l(\Omega), l \ge 4$. Тогда на некотором промежутке $(0,T)$ последовательность решений $Z_\tau = (u_\tau, v_\tau, h_\tau)$ вспомогательной задачи P_τ при $\tau \to 0$ сходится к точному решению $Z\ \ = (u\ \ , v\ \ , h\ \ )$ задачи (1) в следующем смысле:

$$Z_\tau(t) \to Z\ \ (t) \text{ * – слабо в слабо в } L^\infty([0,T], H_\pi^l(\Omega))$$

$$Z_\tau(t) \to Z\ \ (t) \text{ – сильно в } C([0,T], H_\pi^{l-1}(\Omega))$$

$$\frac{\partial Z_\tau}{\partial t}(t) \to \frac{\partial Z}{\partial t} \text{ * – слабо в } L^\infty\left([0,T], H_\pi^{l-1}(\Omega)\right).$$

При этом вектор-функции $Z_\tau = (u_\tau, v_\tau, h_\tau)$ сходятся к $Z\ \ = (u\ \ , v\ \ , h\ \ )$ равномерно в цилиндре $\Omega x(0,T)$, а производные до порядка $l - 2$ сходятся равномерно в этом цилиндре к соответствующим производным от Z.

Литература

1. Кучер Н. А. Метод слабой аппроксимации и анализ схем расщепления в газовой динамике. Кемерово: КемГУ, 1997. 188 с.

2. Кучер Н. А. Некоторые замечания о схемах расщепления для уравнений газовой динамики, используемых в методе «крупных частиц» // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. С. 94 – 108.

3. Никольский С. М. Приближенные функции многих переменных и теоремы вложения // С. М. Никольский. М.: Наука, 1977. 456 с.

4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 320 с.

Информация об авторах:

Кучер Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений математического факультета КемГУ, nakycher@rambler.ru.

Nikolay A. Kycher – Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Горобец Марина Анатольевна – студентка математического факультета КемГУ, gorobetsmar@mail.ru.

Marina A. Gorobets – student at the Faculty of Mathematics, Kemerovo State University.

(**Научный руководитель** – ***Н. А. Кучер***).

Статья поступила в редколлегию 21.10.2014 г.