методы решения неустойчивых задач. М.: Наука и техника, 1981. 344 с. **7.** *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с. **8.** *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с. **9.** *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004. 416 с. **10.** *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с. **11.** *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с. **12.** *Гибкина Н.В., Подусов Д.Ю., Сидоров М.В.* Оптимальное управление конечным температурным состоянием однородного стержня // Радиоэлектроника и информатика. 2014. №2. С. 9-15. **13**. *Клопотов В.Д., Нестеренко В.П.* Математическое моделирование тепловых процессов в режущем инструменте // Изв. Томского политехнического университета. 2005. Т. 308, № 3. С.125-128. **14.** *Коновалов В.И., Пахомов А.Н., Гатапова Н.Ц., Колиух А.Н.* Методы решения задач тепломассопереноса. Теплопроводность и диффузия в неподвижной среде: учеб. пособие. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2005. 80 с.

Поступила в редколлегию 20.05.2015

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

**Гибкина Надежда Валентиновна,** канд. техн. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, оптимальное управление и его приложения, математическая физика, актуарная и финансовая математика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**Мартыненко Михаил Сергеевич**, студент группы СА-11-1 факультета прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование и оптимальное управление, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**Сидоров Максим Викторович**, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

УДК519.713

# ПРО ПОБУДОВУ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ДОДАТНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЕЛІПТИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЮ МАЖОРАНТОЮ

*ЛУХАНІН В.С.*

Розглядаються питання існування, єдиності та побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку однієї еліптичної крайової задачі з експоненціальною нелінійністю. Описуються умови, яким мають задовольняти параметри, що входять до нелінійності, щоб двосторонні наближення можна було побудувати.

**Ключові слова:** двосторонні наближення, інваріантний конусний відрізок, додатний розв'язок.

**Key words:** two-sided approximations, invariant cone segment, positive solution.

## Вступ

Разом із зростанням можливостей обчислювальної техніки сьогодні збільшується зацікавленість до процесів, які відбуваються у нелінійних середовищах. Математичними моделями процесів у таких середовищах є нелінійні крайові задачі математичної фізики, оскільки лінійні не зовсім адекватно описують фізичну реальність. Досить часто такі моделі мають вигляд

$$-\Delta u = f(\mathbf{x},u) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad u > 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Метод двосторонніх наближень належить до ітераційних методів та дозволяє отримати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації. Ще однією з переваг цього методу у порівнянні з іншими є відносна простота реалізації алгоритму, який в свою чергу вимагає менше обчислювальних ресурсів.

## 1. Постановка задачі та побудова двосторонніх наближень

Дослідимо можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі [1]

$$-\Delta u = \lambda\left(e^u + e^{\gamma u}\right) \text{ в } \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \lambda > 0, \ \gamma > 0 \ (\lambda, \gamma - \text{const}). \tag{2}$$

Відомо [2], що задача (1), (2) у класі неперервних функцій еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s},$$

де $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області $\Omega$, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_m)$, $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_m)$.

На конусі K невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій введемо в розгляд нелінійне операторне рівняння

$$u = Tu,$$

де

$$Tu = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s}. \tag{3}$$

Відомо, що конус невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій є нормальним, крім того, оскільки

$$f(\mathbf{x},u) = \lambda\left(e^{u(\mathbf{x})} + e^{\gamma u(\mathbf{x})}\right) \tag{4}$$

неперервна за u, оператор T, відображаючи простір $C(\Omega)$ в себе, цілком неперервний [2, 3].

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (3).

1) Оператор T монотонний, тобто з $u_1 \le u_2$ випливає, що $Tu_1 \le Tu_2$. Дійсно,

$$Tu_1 - Tu_2 = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u_1(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_1(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s} -$$

$$- \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u_2(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_2(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s} =$$

$$= \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u_1(\mathbf{s})} - e^{u_2(\mathbf{s})} + e^{\gamma u_1(\mathbf{s})} - e^{\gamma u_2(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s} \le 0.$$

2) Для побудови конусного відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \le u \le w_0$, інваріантного для оператора T, в (3) покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{v_0} + e^{\gamma v_0}\right)d\mathbf{s} =$$

$$= 2\lambda \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s} \ge v_0 = 0.$$

Тоді будуємо елемент

$$v_2 = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{v_1} + e^{\gamma v_1}\right)d\mathbf{s} \ge v_1$$

і так далі.

Тепер в (3) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = \text{const} \ge 0$ – визначиться в майбутньому, маємо

$$w_1 = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{w_0} + e^{\gamma w_0}\right)d\mathbf{s} = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)d\mathbf{s} =$$

$$= \lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Підбираємо параметри $\lambda$, $\beta$ та $\gamma$ так, щоб $w_1 \le w_0$. Ця вимога приводить нас до умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)}. \qquad (5)$$

При цьому

$$w_2 = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{w_1} + e^{\gamma w_1}\right)d\mathbf{s} \le$$

$$\le \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)d\mathbf{s} = w_1.$$

Таким чином, маємо $v_0 \le v_1 \le w_1 \le w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (3).

3) Дослідимо оператор T на угнутість на $\langle v_0, w_0 \rangle$. Для цього має виконуватися умова $T(tu) \ge tTu \quad \forall t \in [0,1]$, $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$. Складаємо

$$T(tu) - tTu =$$

$$= \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{tu} + e^{\gamma tu} - te^{u} - te^{\gamma u}\right)d\mathbf{s}, \quad t \in [0,1]. \quad (6)$$

Щоб (6) була невід'ємною, треба вимагати виконання умови

$$e^{tu} + e^{\gamma tu} - te^{u} - te^{\gamma u} \ge 0. \qquad (7)$$

Нехай $u = v_0 = 0$, тоді (7) стає умовою $1 - t \ge 0$, яка виконується $\forall t \in [0,1]$.

Якщо $u = w_0 = \beta$, (7) приймає вигляд

$$e^{\beta t} + e^{\gamma\beta t} - te^{\beta} - te^{\gamma\beta} \ge 0. \qquad (8)$$

4) Дослідимо оператор T вигляду (3) на $u_0$-угнутість, де

$$u_0 = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Угнутий оператор T називається $u_0$-угнутим на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо для кожного $t_0 \in (0,1)$ можна вказати таке $\eta = \eta(u, t_0) > 0$, що $T(t_0 u) \ge (1+\eta)t_0 Tu$ на відрізку, сумірному з $u_0$ [2] (будь-який елемент вигляду $\text{const} \cdot u_0 \in \langle u_0, w_0 \rangle$ сумірний з $u_0$ за визначенням).

В [2, с. 283] для перевірки оператора T на $u_0$-угнутість пропонується простіша умова

$$f(\mathbf{x}, \tau u) - \tau f(\mathbf{x}, u) > 0 \quad \forall \tau \in (0,1), \ u > 0, \ \mathbf{x} \in \Omega,$$

функція $f(\mathbf{x}, u)$ визначається виразом (4).

Складаємо

$$f(\mathbf{x}, \tau u) - \tau f(\mathbf{x}, u) = \lambda\left(e^{\tau u} + e^{\gamma\tau u} - \tau e^{u} - \tau e^{\gamma u}\right). \qquad (9)$$

Щоб (9) була додатною, вимагаємо виконання нерівності $e^{\tau u} + e^{\gamma\tau u} - \tau e^{u} - \tau e^{\gamma u} > 0 \quad \forall \tau \in (0,1)$, $\forall u \in \langle v_0, w_0 \rangle$, звідки маємо умову

$$e^{\tau\beta} + e^{\gamma\tau\beta} - \tau e^{\beta} - \tau e^{\gamma\beta} > 0. \qquad (10)$$

Якщо виконується (10), то і (8) буде мати місце. Тому зв'язок між параметрами $\lambda$, $\beta$ і $\gamma$ визначається умовами (5) і (10).

Із виконання властивостей 1) – 4) випливає існування та єдиність додатного розв'язку у задачі (1), (2).

Ітераційний процес для задачі (1), (2) будуємо за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$. За умови виконання вимог (5) та (10) маємо рівномірну збіжність до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$. При цьому

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots$$
$$\ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

## 2. Результати обчислювального експерименту

Обчислювальний експеримент проведено в області

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

при значеннях $\beta = 1$, $\lambda = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}5$. Такі значення параметрів задовольняють умовам (5) та (10).

В таблиці наведено значення для наближень $v_6(\mathbf{x})$ та $w_6(\mathbf{x})$ в точках області $\Omega$ з полярними координатами $(\rho_i, \varphi_j)$, де $\rho_i = 0{,}2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

| φ | | ρ = 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{10}$ | $w_6$ | 0,282310 | 0,246222 | 0,185364 | 0,101914 |
| | $v_6$ | 0,282278 | 0,246195 | 0,185346 | 0,101905 |
| $\frac{\pi}{5}$ | $w_6$ | 0,282312 | 0,246063 | 0,184971 | 0,101535 |
| | $v_6$ | 0,282279 | 0,246036 | 0,184953 | 0,101526 |
| $\frac{3\pi}{10}$ | $w_6$ | 0,282314 | 0,245890 | 0,184644 | 0,101131 |
| | $v_6$ | 0,282282 | 0,245863 | 0,184626 | 0,101122 |
| $\frac{2\pi}{5}$ | $w_6$ | 0,282318 | 0,245961 | 0,184798 | 0,101268 |
| | $v_6$ | 0,282286 | 0,245934 | 0,184780 | 0,101259 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $w_6$ | 0,282332 | 0,246972 | 0,186959 | 0,103654 |
| | $v_6$ | 0,282299 | 0,246945 | 0,186940 | 0,103645 |

На рис. 1 та 2 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $v_6(\mathbf{x})$ відповідно.

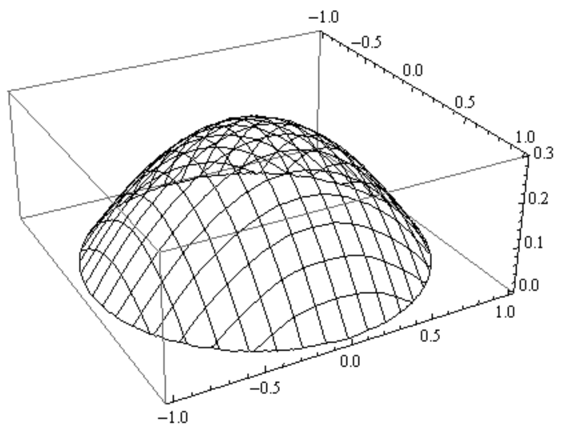

Рис. 1. Поверхня для наближення $v_6(\mathbf{x})$

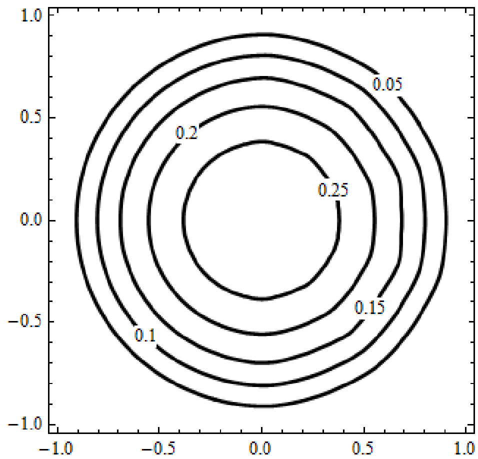


Рис. 2. Лінії рівня для наближення $v_6(\mathbf{x})$

## Висновки

Досліджено можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку задачі (1), (2) та отримано умови (5), (10), які гарантують збіжність ітераційного процесу.

Результати роботи можуть бути застосовані при розв'язанні прикладних задач, які описуються моделями у вигляді нелінійних крайових задач із нелінійністю вигляду (4).

**Література:** **1.** *S. Baraket, Ye. Dong.* Singular Limit Solutions for Two-Dimensional Elliptic Problems with Exponentially Dominated Nonlinearity // Chinese Annals of Mathematics. Series B. 2001. V. 22, № 3 P. 287–296. **2.** *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с. **3.** *Опойцев В.И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. 1978. Т. 36. С. 237–273.

Надійшла до редколегії 14.05.2015

**Рецензент:** д-р фіз.-мат. наук, проф.Колосов А.І.

**Луханін Володимир Сергійович,** магістр, аспірант кафедри ПМ ХНУРЕ, інженер-програміст в EPAM Systems. Наукові інтереси: розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Хоббі: читання, спорт. Адреса: Україна, 61103, Харків, вул. Космонавтів, 5А, кв. 2, тел. +38(063) 643-40-47.