STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.2(82)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.41-46

MODELAREA FIABILITĂȚII SISTEMELOR SEMIMARKOVIENE COMPLEXE CU RESTABILIRE ŞI CU DECONECTARE DE ELEMENTE

Andrei CORLAT

Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM

În lucrare este expusă metodologia descrierii evoluției sistemelor cu restabilire şi cu deconectări de elemente. Este efectuată analiza fiabilității sistemelor complexe, în presupuneri generale, asupra funcțiilor de repartiție a variabilelor aleatoare ale timpurilor de lucru şi restabilire a elementelor sistemului.
Cuvinte-cheie: *sistem cu restabilire şi deconectări de elemente, proces semimarkovian, coeficienți staționari de fiabilitate.*

MODELLING OF RELIABILITY OF SEMIMARKOVIAN REPAIRABLE COMPLEX SYSTEM WITH DISCONNECTION OF ELEMENTS

In the following paper we present the methodology of describing the evolution of semimarkovian repairable complex system with disconnection of elements under general assumptions on the distribution functions of random variables of working and restore times of system elements.
Keywords: *repairable complex system with disconnection of elements, semimarkovian process, reliability stationary indexes.*

Problema fiabilității este o problemă-cheie pe parcursul ultimilor ani. Importanța fiabilității a crescut ca rezultat al dificultății sistemelor tehnice complexe elaborate. Crearea sistemelor costisitoare de valoare, în primul rând a sistemelor automatizate de administrare a diferitelor obiecte din economia națională ce îndeplinesc cele mai importante funcții, în mod neapărat presupune o abordare serioasă a fiabilității la toate etapele, începând de la proiectare şi elaborare şi finisând cu experimentarea şi exploatarea.

Există multe sisteme tehnice moderne, pentru care o rezolvare acceptabilă a problemei fiabilității în sens direct înseamnă: va exista sau nu sistemul în cauză? De exemplu, sisteme regionale şi specializate de administrare, care includ un număr impunător de calculatoare, sisteme de administrare a celor mai dificile procese tehnologice, rețeaua centrelor de dirijare-urmărire a obiectelor cosmice, aviației civile, rețele şi sisteme de transmitere a informației etc.

Complexitatea sistemelor evoluează în diferite direcții. Pe de o parte, sistemele tehnice devin în sens direct mai voluminoase – ele conțin un număr tot mai mare de componente. Pe de altă parte, esențial devine mai complicată structura interioară a sistemelor, ce determină caracterul de conexiune a elementelor separate şi algoritmul de interacțiune în procesul de funcționare şi întreținere a capacității de lucru.

În prezenta lucrare este expusă metodologia descrierii evoluției sistemelor cu restabilire şi cu deconectări de elemente şi efectuată analiza fiabilității sistemelor complexe cu structură omogenă, în presupuneri generale, asupra funcțiilor de repartiție a variabilelor aleatoare ale timpurilor de lucru şi restabilire a elementelor sistemului.

Fie S un sistem complex cu restabilire ce constă din $N(N \geq 1)$ elemente cu structura funcțională definită. Timpul de lucru al elementului i va fi considerat drept o variabilă aleatoare $\xi_i^{(1)}$ cu funcția de repartiție $F_i^{(1)} = P\{\xi_i^{(1)} \leq t\}$, $i = \overline{1,N}$, iar timpul de restabilire al elementului i – variabilă aleatoare $\xi_i^{(0)}$ cu funcția de repartiție $F_i^{(0)} = P\{\xi_i^{(0)} \leq t\}$, $i = \overline{1,N}$. Se presupune că funcțiile de repartiție $F_i^{(k)}(t)$, $k = \overline{0,1}$, $i = \overline{1,N}$ sunt absolut continue în raport cu măsura Lebesgue ($f_i^{(k)}(t)$ – densitățile de repartiție respective), iar variabilele aleatoare $\xi_i^{(k)}$, $k = \overline{0,1}$, $i = \overline{1,N}$ au mediile mărginite ($0 \leq M\xi_i^{(k)} < \infty$).

Restabilirea se consideră accesibilă complet, în sens că nu se formează rând la restabilire.

Elementul $i, i = \overline{1,N}$ poate să se afle în următoarele stări: de lucru; deconectat în stare de lucru; de refuz (restabilire); deconectat în stare de refuz (restabilire).

Deconectarea elementului i sau a unei totalități de elemente are loc în momentul refuzului unui careva element (legat funcțional cu elementul (totalitatea elementelor) deconectat) în cazul când în urma refuzului elementul i (totalitatea de elemente) nu aparține niciunui drum de lucru. Sub drum de lucru înțelegem o totalitate de elemente legate funcțional, a căror funcționare implică funcționarea întregului sistem S. În momentul refuzului sistemului S, toate elementele aflate în stare de lucru se deconectează.

Exemplul 1. Fie S un sistem punte (Fig.1). În momentul de timp t elementele 2 şi 4 se află la restabilire, elementele l, 3 şi 5 funcționează. Dacă în momentul de timp $t + dt, dt > 0$ refuză elementul 3, atunci elementele

1 şi 5 se deconectează (în stare de lucru), sistemul se află în stare de refuz (până la restabilirea unuia din elementele 2, 3, 4).

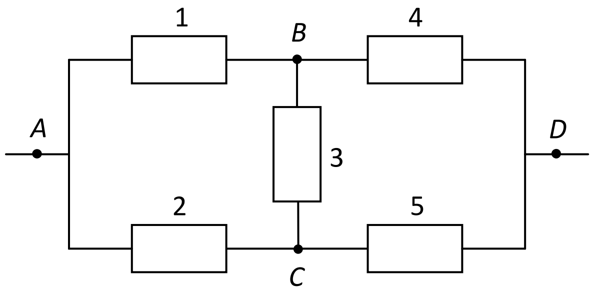

Fig.1.

Elementele deconectate se includ în sistem cu aceiaşi parametri de lucru şi restabilire, în care au fost surprinşi în momentul de deconectare, în momentul restabilirii complete a unui careva element, în condiţia că împreună cu cel restabilit formează un drum de lucru. De exemplu, în situaţia expusă în exemplul l, dacă primul se restabileşte elementul 3, atunci se includ în lucru şi elementele 1 şi 5 (drum de lucru 1-3-5), iar dacă primul se restabileşte elementul 2, atunci se include doar elementul 5 (drum de lucru 2-5).

Restabilirea elementului refuzat începe imediat, deconectările şi conectările la fel se consideră fără pierderi de timp. Restabilirea atribuie elementului refuzat caracteristicile iniţiale.

Noţiunea de refuz al sistemului se defineşte reieşind din structura sa sau (şi) destinaţia ei [1,4].

Funcţionarea elementului i al sistemului, $i=\overline{1,N}$, reprezintă un şir de perioade de lucru şi de restabilire ce urmează una după alta (cu posibile perioade de deconectare), iar funcţionarea sistemului S reprezintă superpoziţia a N procese independente alternate de restabilire, studiată în [2,3,4].

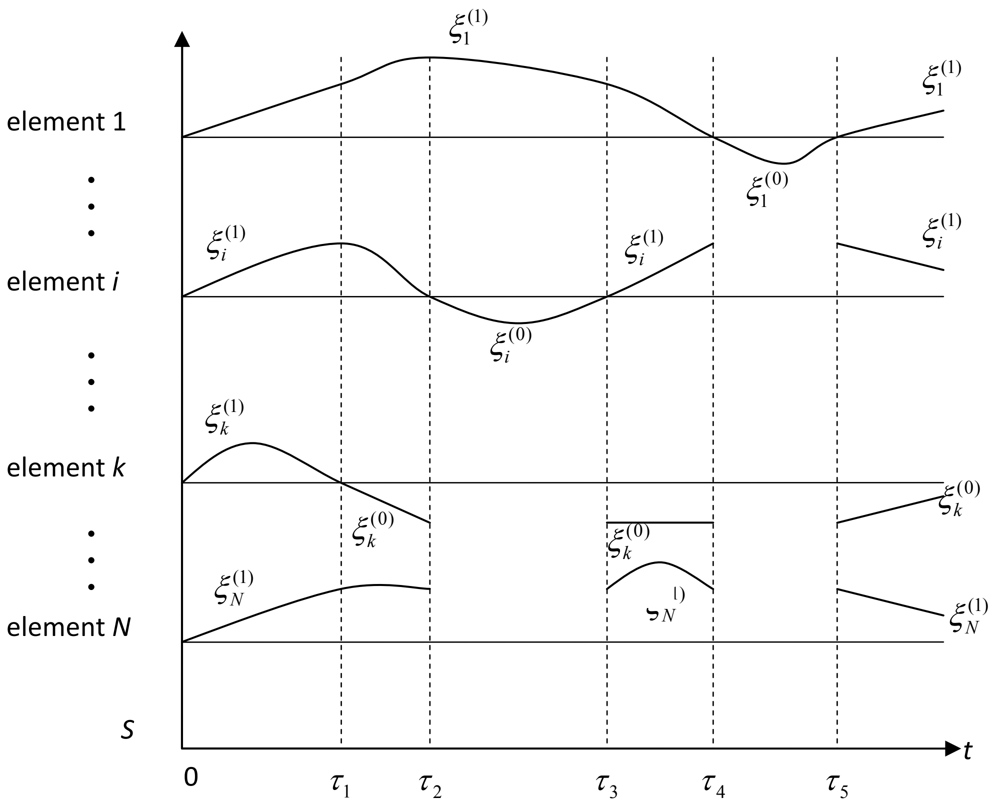

Fig.2.

Fie $\xi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$, procese alternate de restabilire cu perioade posibile de deconectare, care modelează evoluția elementului corespunzător al sistemului (Fig.2) cu repartițiile inițiale $P\{\xi_i(0)=1\}=1$, $i=\overline{1,N}$.

Dacă în momentul de timp t elementul i, $i=\overline{1,N}$, este în stare de lucru sau deconectat în stare de lucru, atunci se consideră $\xi_i(t)=1$, iar dacă elementul este în stare de restabilire sau deconectat în stare de restabilire – $\xi_i(t)=0$.

Explicăm Figura 2. În momentul inițial $t=0$ toate elementele sistemului se includ în lucru. În momentul de timp τ_1 elementul k refuză, s-a început restabilirea lui, elemente deconectate nu sunt; în momentul de timp τ_2 refuză elementul i, ce conduce la deconectarea tuturor elementelor în stare de lucru începând cu $(i+1)$ până la N şi la deconectarea elementului k în stare de restabilire. După aceea, în momentul de timp τ_3 elementul i s-a restabilit şi se include în sistem împreună cu elementele $(i+1)-N$; în momentul de timp τ_4 refuză primul element, ce conduce la deconectarea celorlalte $N-1$ elemente (refuzul sistemului) până la momentul timpului τ_5, când primul element finisează restabilirea şi aşa mai departe.

Urmând [2,3] considerăm procesul semimarkovian

$$\xi(t)=\{\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_i(t),...,\xi_N(t),u_1(t),...,u_i(t),...,u_N(t)\},$$

ce modelează evoluția sistemului inițial S. Aici $u_i(t)$ pentru $\xi_i(t)=0$ este timpul de restabilire (fără înregistrarea timpului posibil de deconectare) a elementului i de la ultimul moment de refuz al lui până la cel mai apropiat salt în trecut al unuia din procesele $\xi_j(t)$, $j=\overline{1,N}$ şi $u_i(t)$ pentru $\xi_i(t)=1$ este timpul de lucru al elementului i (fără înregistrarea timpului posibil de deconectare) de la ultimul moment de restabilire până la cel mai apropiat salt în trecut al unuia din procesele $\xi_j(t)$, $j=\overline{1,N}$.

Spațiul-fază al sistemului S este (X,B), unde

$$X=\{e=(d,x^{(i)}):d=(d_1,d_2,...,d_j,...,d_N),d_j=\overline{1,0},j=\overline{1,N},$$
$$x^{(i)}=(x_1,x_2,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_N),x_j>0,j=\overline{1,N},j\neq i\},$$

B – σ-algebra mulțimilor boreliene din X.

În continuare vom utiliza următoarele notații:

$$I_d=\{i:d_i=0\},$$

I_d – mulțimea indicilor elementelor deconectate în starea $(d,x^{(i)})$,

$$\{b,[0,y]^{(n)}\}=\{e\in X:e=(b,y^{(n)}),y^{(n)}\in[0,y]^{(n)}\},$$
$$[0,y]^{(n)}=([0,y_1],[0,y_2],...,[0,y_{n-1}],0,[0,y_{n+1}],...,[0,y_N]),$$
$$[0,y_i]=\begin{cases}[0,x_i+y], & dacă \quad i\notin I_d, i\neq n,\\ [0,x_i], & dacă \quad i\in I_d, i\neq n.\end{cases}$$

Definim nucleul semimarkovian al procesului semimarkovian $\xi(t)$:

$$Q(t,(d,x^{(i)}),\{b,[0,y]^{(n)}\})=\begin{cases}P\{x_n+\xi_i^{(a_i)}>\xi_n^{(a_n)},\xi_j^{(a_j)}>x_j+\xi_n^{(a_n)}-x_n,\\ x_j+\xi_n^{(a_n)}-x_n\in[0,y_j],j\notin I_d,j\neq i,\xi_l^{(a_l)}>x_l,\\ l\in I_d,\xi_n^{(a_n)}-x_n\leq t\mid\xi_m^{(a_m)}>x_m,m=\overline{1,N}\},\\ dacă \quad i\neq n,\\ P\{\xi_n^{(a_n)}>x_n+\xi_i^{(a_i)},x_n+\xi_i^{(a_i)}\in[0,y_n],n\notin I_d,\\ n\neq i,\xi_l>x_l,l\in I_d,\xi_i^{(a_i)}\leq t\mid\xi_m^{(a_m)}>x_m,m=\overline{1,N}\},\\ dacă \quad i=n.\end{cases} \tag{1}$$

Aici d şi b diferă numai prin componenta n (în celelalte cazuri, probabilitatea de trecere din $(d, x^{(i)})$ în $\{b, [0, y]^{(n)}\}$ este egală cu zero). Folosind (1) scriem densitățile probabilităților de trecere:

$$p[(d, x^{(i)}), (b, y^{(n)})] = \begin{cases} \dfrac{f_n^{d_n}(x_n + y_i) \prod\limits_{j \notin I_d, j \neq n} \overline{F}_j^{(d_j)}(x_j + y_i) \prod\limits_{l \in I_d} \overline{F}_l^{(d_l)}(x_l)}{\prod\limits_{m=1, m \neq i}^{N} \overline{F}_m^{(d_m)}(x_m)}, \\ dac\breve{a} \quad i \neq n, \\ \dfrac{f_i^{d_i}(y_s - x_s) \prod\limits_{j \notin I_d, j \neq n} \overline{F}_j^{(d_j)}(y_j) \prod\limits_{l \in I_d} \overline{F}_l^{(d_l)}(x_l)}{\prod\limits_{m=1, m \neq i}^{N} \overline{F}_m^{(d_m)}(x_m)}, \\ dac\breve{a} \quad i = n, s \neq i, y_s = x_s + t, \end{cases} \quad (2)$$

unde $\overline{F}_s^{(k)} = 1 - F_s^{(k)} > 0$, $t > 0$, $k = \overline{0,1}$, $s = \overline{1, N}$, iar d şi b diferă numai prin componenta n (în caz contrar probabilitatea de trecere este egală cu zero).

Definim valorile medii ale timpului de aflare a procesului semimarkovian $\xi(t)$ în stările din *X*: timpul de aflare $\theta_{(d, x^{(i)})}$ în stare $(d, x^{(i)})$ este egal cu

$$\theta_{(d, x^{(i)})} = \min\{| \xi_n - x_n |^+, n \notin I_d\},$$

unde $| \xi - x |^+$ este variabila aleatoare cu funcția de repartiție

$$P\{| \xi - x |^+ \leq t\} = P\{\xi - x \leq t \mid \xi > x\} = \frac{F(x + t) - F(x)}{\overline{F}(x)},$$

iar valoarea medie $m_{(d, x^{(i)})} = M\theta_{(d, x^{(i)})}$ este egală cu

$$M\theta_{(d, x^{(i)})} = \frac{\int\limits_0^\infty \overline{F}_i^{(d_i)}(t) \prod\limits_{u \notin I_d, u \neq i} \overline{F}_u^{(d_u)}(t + x_u) dt}{\prod\limits_{p \notin I_d} \overline{F}_p^{(d_p)}(x_p)}. \quad (3)$$

Sistemul de ecuații integrale pentru densitățile de repartiție staționare ale lanțului Markov $\{\xi_n, n \geq 0\}$ inclus în procesul semimarkovian $\xi(t)$ are forma:

$$\rho(d, x^{(i)}) = \sum_{b \in X} \int\limits_{R_+^{N,i}} \rho(b, y^{(m)}) p[(b, y^{(m)}), (d, x^{(i)})] dy^{(m)}, \quad (4)$$

$$\sum_{d \in X} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{R_+^{N,i}} \rho(d, x^{(i)}) dx^{(i)} = 1 \text{ (condiție de normare)} \quad (5)$$

$$dy^{(m)} = dy_1 \cdot dy_2 \cdot \ldots \cdot dy_{m-1} \cdot dy_{m+1} \cdot \ldots \cdot dy_N, \qquad R_+^{N,i} = \bigcap_{i=1}^{N} \{x^{(i)}\}.$$

Teorema 1. *Sistemul de ecuații integrale* (3)-(4) *are următoarea soluție:*

$$\rho(d, x^{(i)}) = c \cdot \prod_{s=1, s \neq i}^{N} \overline{F}_s^{(d_s)}(x_s), \text{ unde } c = \left[\sum_{d \in X} \sum_{i=1}^{N} \prod_{u=1, u \neq i}^{N} M\xi_u^{(d_u)} \right]^{-1}.$$

Demonstrație. Substituim în (4) formule pentru $p[(b,y^{(m)}),(d,x^{(i)})]$ din (2):

$$\rho(d,x^{(i)})=\prod_{u\in I_b}\overline{F}_u^{(b_u)}(x_u)\prod_{j\notin I_b, j\neq i}\overline{F}_j^{(b_j)}(x_j)\int_0^{x_s} f_i^{(b_i)}(t)\frac{\rho(b,\overline{y}^{(n)})dt}{\prod_{p=1,p\neq i}\overline{F}_p^{(b_p)}(\overline{y}^{(n)})_p}+$$
$$+\prod_{u\in I_b}\overline{F}_u^{(b_u)}(x_u)\prod_{j\notin I_b, j\neq i}\overline{F}_j^{(b_j)}(x_j)\int_{x_s}^{\infty} f_i^{(b_i)}(t)\frac{\rho(b,\overset{=}{y}^{(n)})dt}{\prod_{p=1,p\neq i}\overline{F}_p^{(b_p)}(\overset{=}{y}^{(n)})_p}, \tag{6}$$

unde $x_s=\min\{x_r, r\notin I_b, r\neq i\}$, $s\notin I_b$, iar d şi b diferă numai prin componenta i,

$$\overline{y}^{(n)}=(\overline{y}_1^{(n)},\overline{y}_2^{(n)},...,\overline{y}_N^{(n)}),$$

$$(\overline{y}^{(n)})_p=\begin{cases}x_p-t, & dacă \quad p\neq i, p\notin I_b,\\ x_p, & dacă \quad p\in I_b,\\ 0, & dacă \quad p=i,\end{cases}$$

$$\overset{=}{y}^{(n)}=(\overset{=}{y}_1^{(n)},\overset{=}{y}_2^{(n)},...,\overset{=}{y}_N^{(n)}),$$

$$\overset{=}{y}_p=\begin{cases}x_p-x_n, & dacă \quad p\neq i, p\notin I_b,\\ x_p, & dacă \quad p\in I_b,\\ t-x_n, & dacă \quad p=i.\end{cases}$$

Efectuăm substituția:

$$\widetilde{\rho}(d,x^{(i)})=\frac{\rho(d,x^{(i)})}{\prod_{p=1,p\neq i}^{N}\overline{F}_p^{(b_p)}(x_p)}=\frac{\rho(d,x^{(i)})}{\prod_{p=1,p\neq i}^{N}\overline{F}_p^{(d_p)}(x_p)}.$$

Atunci (6) devine:

$$\widetilde{\rho}(d,x^{(i)})=\int_0^{x_s} f_i^{(b_i)}(x)\widetilde{\rho}(b,\overline{y}^{(n)})dt+\int_{x_s}^{\infty} f_i^{(b_i)}(x)\widetilde{\rho}(b,\overset{=}{y}^{(n)})dt,$$

$$\sum_{d\in X}\sum_{i=1}^{N}\int_{R_+^{N,i}}\prod_{s=1,s\neq i}^{N}\overline{F}_s^{(d_s)}(x_s)\widetilde{\rho}(d,x^{(i)})dx^{(i)}=1.$$

Prin verificare directă se convinge că sistemul are soluția $\widetilde{\rho}(d,x^{(i)})=c$, unde c – constantă:

$$c=c\cdot\int_0^{x_s} f_i^{(b_i)}(t)dt+c\cdot\int_{x_s}^{\infty} f_i^{(b_i)}(t)dt,$$

$$1=\int_0^{\infty} f_i^{(b_i)}(t)dt, \qquad 1=1.$$

Constanta c se obține din condiția de normare:

$$c=\left[\sum_{d\in X}\sum_{i=1}^{N}\int_{R_+^{N,i}}\prod_{s\in I_d}\overline{F}_s^{(d_s)}(x_s)\prod_{j\notin I_d, j\neq i}\overline{F}_j^{(d_j)}(x_j)dx^{(i)}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\sum_{d\in X}\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}\underbrace{\cdots}_{(|I_d|)}\int_0^{\infty}\prod_{s\in I_d}\overline{F}_s^{(d_s)}(x_s)d\breve{x}^{(i)}\int_0^{\infty}\underbrace{\cdots}_{N-(|I_d|-1)}\int_0^{\infty}\prod_{j\notin I_d, j\neq i}\overline{F}_j^{(d_j)}(x_j)d\widehat{x}^{(i)}\right]^{-1}=\left[\sum_{d\in X}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1,j\neq i}^{N}M\xi_j^{(d_j)}\right]^{-1}.$$

unde $d\breve{x}^{(i)} = dx_{i_1}\cdot dx_{i_2}\cdot\ldots\cdot dx_{i_s}$ după toți $i_k \in I_d$, $d\widehat{x}^{(i)} = dx_{u_1}\cdot dx_{u_2}\cdot\ldots\cdot dx_{u_r}$, $u_k \notin I_d$, $u_k \neq i$, $k=\overline{1,r}$. Teorema este demonstrată.

Cu ajutorul teoremei 1 se obține următorul rezultat important:

Teorema 2. *Indicii staționari de fiabilitate K, T_1, T_0 ai sistemului cu restabilire şi cu deconectări de elemente se definesc prin formulele:*

$$K=\frac{\sum_{d\in X_+}\prod_{i=1}^{N}M\xi_i^{(d_i)}}{\sum_{d\in X}\prod_{j=1}^{N}M\xi_j^{(d_j)}},\quad T_1=\frac{\sum_{d\in X_+}\prod_{i=1}^{N}M\xi_i^{(d_i)}}{\sum_{d\in X_-}\sum_{n\in I/I_d}\prod_{j=1,j\neq n}^{N}M\xi_j^{(d_j)}},\quad T_0=\frac{\sum_{d\in X_-}\prod_{i=1}^{N}M\xi_i^{(d_i)}}{\sum_{d\in X_-}\sum_{n\in I/I_d}\prod_{j=1,j\neq n}^{N}M\xi_j^{(d_j)}}.$$

Pentru demonstrarea teoremei 2 a se vedea [2]. Menționăm că rezultatele obținute sunt comode pentru crearea soft-ului respectiv.

Bibliografie:

1. КОВАЛЕНКО, И.Н. *Исследования по анализу надежности сложных систем*. Киев: Наукова думка, 1975.
2. КОРЛАТ, А.Н. и др. *Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания.* Кишинев: Штиинца, 1991.
3. КОРОЛЮК, В.С. Суперпозиция процессов марковского восстановления. В: *Кибернетика*, 1981, №4, c.121-124.
4. КОРОЛЮК, В.С., ТУРБИН, А.Ф. *Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем.* Киев: Наукова думка, 1982.

Prezentat la 06.07.2015