STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2015, nr.2(82)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.21-30

CLASE DE SUBGRAFURI STABILE ÎN ORIENTAREA TRANZITIVĂ A GRAFURILOR

Sergiu CATARANCIUC, Nicolae GRIGORIU
Universitatea de Stat din Moldova

În articol sunt analizate clasele de subgrafuri stabile, folosite la caracterizarea grafurilor tranzitiv orientabile şi la studierea proprietăţilor acestora. Subgrafurile stabile reprezintă un suport în construirea orientării tranzitive a unui graf, precum şi pentru determinarea numărului acestora. De asemenea, sunt prezentate condiţiile necesare şi suficiente pentru ca un graf să fie tranzitiv orientabil.
Cuvinte-cheie: *graf tranzitiv orientabil, subgraf stabil, lanţ netriangulat, subgraf stabil minimal, subgraf B-stabil, graf factor.*

CLASSES OF STABLE SUBGRAPHS IN TRANSITIVE ORIENTATION OF THE GRAPH
In the article there are analyzed the classes of the stable subgraphs, used for characterization of transitively orientable graphs and their properties. The subgraphs that we describe in this paper are a support for the constructions of the transitive orientation of the graph, as well as the formula for the number of transitive orientations in a graph. In addition, we present necessary and sufficient conditions for a graph to be transitively orientable.
Keywords: *transitively orientable graph, stable subgraph, non-triangulated chain, minimal stable subgraph, B-stable subgraph, graph factor.*

Introducere

Grafurile tranzitiv orientabile joacă un rol important la soluţionarea multor probleme cu caracter teoretico-aplicativ. Printre acestea se numără: problema colorării grafurilor, determinarea clicii maximale ponderate [2] (într-un graf tranzitiv orientabil $G = (X; U)$ colorarea grafului şi determinarea clicii maximale ponderate poate fi calculată în timpul $O(|X| + |U|)$), analiza algoritmilor pentru optimizarea codului sursă a programelor [8] etc. Pentru studierea proprietăţilor grafurilor tranzitiv orientabile un rol aparte le revine subgrafurilor stabile şi lanţurilor netriangulate. Din aceste considerente, în cele ce urmează vom studia subgrafurile stabile. Reamintim că un subgraf F generat de mulţimea de vârfuri $X_F \subset X_G$ ale grafului $G = (X; U)$ se numeşte stabil dacă pentru orice vârf $x \in X_G \setminus X_F$ se respectă una din următoarele două condiţii [9]:

1) $x \sim X_F$;
2) $x \nsim X_F$.

(condiţia $x \sim X_F$ înseamnă că vârful x este adiacent tuturor vârfurilor din X_F, iar $x \nsim X_F$ înseamnă că x nu este adiacent cu niciun vârf dintre mulţimea X_F).

Vom examina subgrafurile F, pentru care mulţimea de vârfuri X_F respectă condiţia:

$$1 \leq |X_F| \leq n - 1$$

Astfel de subgrafuri se mai numesc subgrafuri proprii ale grafului G.

1. Subgrafuri B-stabile

Vom reaminti mai întâi câteva noţiuni, examinate în [5-7], utile pentru rezultatele ce vor urma.

Definiţia 1 [6]. *Subgraful stabil vid Q se numeşte maximal, dacă nu este subgraf propriu al altui subgraf stabil vid din graful $G = (X; U)$.*

Definiția 2 [7]. *Subgraful stabil propriu conex M se numeşte subgraf stabil minimal, dacă nu este complet şi nu conține alte subgrafuri proprii stabile din graful $G = (X; U)$.*

Observația 1. *Dacă M este subgraf stabil minimal, atunci $|X_M| \geq 4$.*

Definiția 3 [5]. *Subgraful stabil propriu complet H se va numi maximal, dacă el nu este subgraf propriu al altui subgraf stabil complet din G.*

Lema 1 [7]. *Dacă $F_1 = (X_{F_1}; U_{F_1})$ și $F_2 = (X_{F_2}; U_{F_2})$ sunt două subgrafuri stabile ale grafului neorientat $G = (X; U)$, atunci subgraful determinat de mulțimea $X_{F_1} \cap X_{F_2}$ este stabil.*

Lema 2 [4]. *Dacă F_1 și F_2 sunt două subgrafuri stabile complete maximale ale grafului G, atunci intersecția lor este vidă.*

Definiția 4 [3]. *Subgraful stabil F se numeşte subgraf B-stabil, dacă pentru orice subgraf stabil M din $G = (X; U)$ are loc una din relațiile:*

$$F \subseteq M \text{ sau } F \cap M = \emptyset.$$

Observația 2. *Dacă $F \nsubseteq M$, pentru orice subgraf stabil M din G, și se verifică relația $F \cap M = \emptyset$, atunci F este subgraf B-stabil.*

Observația 3. *Graful complet $K_n, n > 2$, nu conține subgrafuri B-stabile.*

Lema 3 [3]. *Dacă A și B sunt două subgrafuri B-stabile, atunci $A \cap B = \emptyset$.*

Lema 4. *Dacă graful $G = (X; U)$ conține subgrafuri stabile, atunci G conține cel puțin un subgraf B-stabil.*

Demonstrație: Fie F un subgraf stabil al grafului $G = (X; U)$. Dacă în G nu mai există alte subgrafuri stabile, în afară de F, atunci sunt respectate toate condițiile pentru ca F să fie subgraf B-stabil. Presupunem că există un alt subgraf stabil M, astfel încât $F \nsubseteq M$. Sunt posibile următoarele cazuri:

1. $X_F \cap X_M = \emptyset$;
2. $X_F \cap X_M \neq \emptyset$.

Vom analiza fiecare caz în parte:

1. Dacă $X_F \cap X_M = \emptyset$, atunci sunt respectate condițiile de existență a unui subgraf B-stabil.
2. Dacă $X_F \cap X_M \neq \emptyset$, atunci, conform lemei 1, subgraful determinat de mulțimea de vârfuri $X_F \cap X_M$ generează un subgraf stabil.

Atunci putem analiza subgraful rezultant al intersecției $X_F \cap X_M$. Dacă acesta nu conține subgraf stabil, atunci el va fi subgraful B-stabil căutat, în caz contrar analizăm subgraful obținut la intersecția celorlalte subgrafuri până când nu obținem subgraful B-stabil căutat. ∎

Lema 5. *Dacă în graful G nu există subgrafuri B-stabile, atunci G nu conține nici subgrafuri stabile.*

Demonstrație: Presupunem contrariul. Fie graful G nu conține subgrafuri B-stabile, dar conține un subgraf stabil F. Deoarece F nu este subgraf B-stabil, rezultă că în G există un subgraf stabil M, astfel încât $X_F \cap X_M \neq \emptyset$. Conform lemei 1, rezultă că subgraful determinat de mulțimea de vârfuri $X_B = X_F \cap X_M$

este la fel subgraf stabil. Prin urmare, subgraful determinat de mulțimea de vârfuri $X_B \subseteq X_F$ este B-stabil. Aceasta vine în contradicție cu condițiile lemei, conform cărora în G nu există subgrafuri B-stabile. ■

Fie F un subgraf stabil vid maximal al grafului G.

Observația 4. *Subgraful stabil vid maximal F al grafului G este subgraf B-stabil.*

Demonstrația afirmației este evidentă, dacă ținem cont de definițiile noțiunilor respective, precum şi de faptul că intersecția unui subgraf stabil vid maximal cu un alt subgraf stabil este vidă. Aceasta din urmă şi înseamnă că orice subgraf stabil vid maximal este B-stabil.

Lema 6. *Orice subgraf stabil minimal este şi subgraf B-stabil.*

Demonstrație: Fie M un subgraf stabil minimal. Presupunem contrariul. Fie H un subgraf stabil, astfel încât $X_M \cap X_H = A$ şi A este o mulțime nevidă. Presupunem că $x \in A$, iar y un vârf din mulțimea $X_M \setminus A$ şi $z \in X_H \setminus A$. Sunt posibile două cazuri: a) $z \nsim x$ şi b) $z \sim x$. Vom analiza fiecare caz în parte.

Dacă $z \nsim x$, atunci, deoarece $x \in X_M$, rezultă că $z \nsim y$. Conform definiției subgrafului stabil minimal, M este conex. În asemenea caz în mulțimea X_M există un vârf $t \neq x$, astfel încât $t \sim x$. Deoarece $x \in X_M \cap X_H$, în particular x aparține mulțimii X_H şi $z \nsim x$, obținem că $x \nsim X_H$. Deci, H nu este subgraf stabil. Contradicție cu presupunerea inițială.

Dacă însă $z \sim x$ şi H este subgraf stabil, atunci $z \sim y$. Totuşi, conform definiției subgrafului stabil minimal, M nu este subgraf complet. Deci, există un vârf v în mulțimea X_M, încât $v \nsim x$. Dar această condiție reproduce situația a). Şi în acest caz obținem contradicție cu faptul că H este subgraf stabil. Deci, intersecția mulțimilor X_M şi X_H este o mulțime vidă. Deoarece M nu conține subgrafuri proprii stabile şi $X_M \cap X_H = \emptyset$, rezultă că M este subgraf B-stabil. ■

Fie $X_F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$ o mulțime de vârfuri ale grafului neorientat $G = (X; U)$, *dacă vârfurile* x_{i_j}, *unde* $1 \leq i \leq |X_G|$ *iar* $1 \leq j \leq p$ *şi* $p < |X_G|$ *pot fi aranjate în aşa mod încât să formeze un lanț netriangulat, atunci vom spune că mulțimea* X_F *poate fi acoperită cu un lanț netriangulat.*

Teorema 1. *Un subgraf F al grafului neorientat $G = (X; U)$, generat de mulțimea de vârfuri $X_F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$, este stabil minimal dacă şi numai dacă X_F poate fi acoperită cu un lanț netriangulat.*

Demonstrație: *Necesitatea*. Conform definiției subgrafului stabil minimal, subgraful F nu conține alte subgrafuri proprii stabile. În baza celor demonstrate în [6] (a se vedea consecința 1 din teorema 1), rezultă că mulțimea X_F poate fi acoperită cu un lanț netriangulat.

Suficiența. Fie $F = (X_F; U_F)$ un subgraf, astfel încât mulțimea de vârfuri X_F poate fi acoperită cu un lanț netriangulat. Trebuie să demonstrăm că F este subgraf stabil minimal. Conform propoziției 5.10 din [2], rezultă că F este subgraf stabil. Să demonstrăm că F nu este complet şi nu conține alte subgrafuri stabile. Deoarece X_F poate fi acoperită cu un lanț netriangulat, uşor poate fi observat că F nu este subgraf complet.

Să demonstrăm că F nu conține alt subgraf stabil. Presupunem contrariul. Fie M un subgraf propriu stabil al lui F. Conform teoremei 1 din [6], există un lanț netriangulat care parcurge toate vârfurile subgrafului M. În asemenea caz, lanțul netriangulat ce acoperă subgraful F capătă următoarea formă: $l_F = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}, x_i, \dots, x_p]$, unde $s < p, x_{i_j} \in X_M, 1 \le j \le s$, iar $s = |X_M|$. Din faptul că M este subgraf stabil și din structura lanțului netriangulat l_F rezultă că vârful x_i este adiacent cu toate vârfurile $x_{i_j} \in X_M$, unde $1 \le j \le s$, $1 \le i \le p$, iar $s = |X_M|$. Deci, în lanțul l_F obținem un ciclu de lungimea trei format din vârfurile $x_{i_{s-1}}, x_{i_s}, x_i$. Astfel, lanțul ce acoperă mulțimea de vârfuri ale subgrafului F nu este triangulat. În baza contradicției obținute rezultă că F nu conține subgrafuri proprii stabile. Deci, F este subgraf stabil minimal. ■

2. Orientarea tranzitivă a grafurilor

Lema 7. *Dacă M este un subgraf stabil minimal al unui graf neorientat $G = (X; U)$, iar $x \in X_G \setminus X_M$ un vârf adiacent mulțimii X_M, atunci în orice orientare tranzitivă $\vec{G}$ se respectă una din condițiile:*

1. $[x, y] \in \overrightarrow{U_G}$, pentru orice vârf $y \in X_M$;
2. $[y, x] \in \overrightarrow{U_G}$, pentru orice vârf $y \in X_M$.

Demonstrație: Presupunem contrariul. Fie în subgraful stabil M sunt două submulțimi nevide de vârfuri: A$= \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}\}$ și $B = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_t}\}$ unde $s + t = |X_M|$ și $x_{j_v} \neq x_{k_w}$ $1 \le v \le s, 1 \le w \le t$. Presupunem că au loc relațiile $[x_{j_v}, z] \in \overrightarrow{U_G}$ și $[z, x_{k_w}] \in \overrightarrow{U_G}$, unde vârful $z \in X_G \setminus X_M$ este adiacent cu toate vârfurile din mulțimea X_M. Acest caz este posibil doar atunci când vârfurile x_{j_v} și x_{k_w} sunt adiacente, deoarece în caz contrar orientarea $\vec{G}$ nu va fi tranzitivă.

Deoarece A generează un subgraf al grafului stabil M, rezultă că pentru el se verifică una din relațiile:

$$\begin{aligned} &1)\quad y \sim x_{j_v};\\ &2)\quad y \nsim x_{j_v}. \end{aligned} \tag{1}$$

pentru orice vârf $y \in X_G \setminus M$, $1 \le v \le s$.

Din faptul că vârfurile x_{j_v} și x_{k_w} sunt adiacente rezultă că pentru subgraful generat de mulțimea de vârfuri A și un vârf y din mulțimea $X_G \setminus X_B$ este adevărată urna din afirmațiile din relația (1) pentru orice indice v, $1 \le v \le s$. În asemenea caz obținem că subgraful generat de mulțimea $A \subseteq X_M$ este stabil. Deci, subgraful M conține un alt subgraf stabil A. Contradicție cu faptul că M este subgraf stabil minimal. ■

Fie $G = (X; U)$ un graf tranzitiv orientabil și F un subgraf din G. Construim o orientare tranzitivă $\vec{G} = (X; \vec{U})$ a grafului G. Notăm prin $\vec{F} = (X_F; \overrightarrow{U_F})$ subgraful orientat din $\vec{G}$, determinat de F. Evident, are loc egalitatea: $\vec{U}_{\vec{G}} = \vec{U}_{\vec{G}/\vec{F}} \cup \vec{U}_{\vec{F}}$, unde $\vec{U}_{\vec{G}/\vec{F}}$ reprezintă mulțimea tuturor arcelor din $\vec{G}$ ce nu aparțin subgrafului $\vec{F}$. Vom spune că F este un subgraf independent tranzitiv orientabil din G, dacă pentru orice orientare tranzitivă $\vec{F}^*$ a lui F mulțimea de arce $\vec{U}_{\vec{G}/\vec{F}} \cup \vec{U}_{\vec{F}^*}$ determină o orientare tranzitivă $\vec{G}^*$ a grafului G. În cele ce urmează, subgraful independent tranzitiv orientabil se va numi ITO-subgraf. Din cele spuse rezultă că, dacă într-o orientare tranzitivă $\vec{G}$ a grafului neorientat $G = (X; U)$ efectuăm o altă orientare tranzitivă $\vec{G}$

a subgrafului independent tranzitiv orientabil F, atunci în rezultat obținem o nouă orientare a grafului G, care este, de asemenea, orientare tranzitivă.

Lema 8. *Subgraful F al grafului tranzitiv orientabil $G = (X; U)$ este B-stabil dacă și numai dacă orientarea tranzitivă F este ITO-subgraf al lui G.*

Demonstrație: *Necesitatea.* Fie F un subgraf B-stabil. Să demonstrăm că F este ITO-subgraf. Conform teoremei 1 din [3], dacă $x \in X_G \setminus X_F$ și $x \sim X_F$, atunci în orice orientare tranzitivă a grafului G are loc una din următoarele două relații:

a) $[x, y] \in \overrightarrow{U_G}$, pentru orice vârf $y \in X_F$;

b) $[y, x] \in \overrightarrow{U_G}$., pentru orice vârf $y \in X_F$.

Din această situație rezultă că schimbarea direcției arcelor în $\vec{U}_{\hat{F}}$ determină o orientare tranzitivă nouă a grafului G, fără a forța schimbarea orientării arcelor în $\vec{U}_{\hat{G}/\hat{F}}$. Deci, F este ITO-subgraf.

Suficiența. Fie F este ITO-subgraf. Să demonstrăm că F este B-stabil. Deoarece F este ITO-subgraf, rezultă că în orice orientare tranzitivă are loc una din următoarele relații:

a) $[x, y] \in \overrightarrow{U_G}$, pentru orice vârf $y \in X_F$;

b) $[y, x] \in \overrightarrow{U_G}$., pentru orice vârf $y \in X_F$,

unde $x \in X_G \setminus X_F$. Astfel, observăm că $y \sim x$. Deci, subgraful F este stabil. Fie M un subgraf stabil din G, încât $X_M \cap X_F \neq \emptyset$. Deoarece F este ITO-subgraf, rezultă că orientarea subgrafului obținut la intersecția $X_M \cap X_F$ nu influențează orientarea $\vec{F}$. Aceasta este posibil doar dacă $F \subseteq M$. Prin urmare, obținem că F este subgraf B-stabil. ■

Pentru un vârf arbitrar x al unui graf orientat, notăm prin $g^+(x)$ numărul de arce ce pornesc din x.

Lema 9. *Pentru orice orientare tranzitivă a grafului complet K_n, vârfurile acestuia pot fi renotate, astfel încât este adevărată relația:*

$$g^+(x_{i_1}) > g^+(x_{i_2}) > \cdots > g^+(x_{i_n}) \qquad (2)$$

Demonstrație: Presupunem contrariul. Fie că există o orientare tranzitivă $\overrightarrow{K_n}$ a grafului K_n, astfel încât $g^+(x_{i_j}) = g^+(x_{i_k})$. Deoarece graful K_n este complet, fără a pierde din generalitate, presupunem că în $\overrightarrow{K_n}$ există arcul $[x_{i_j}, x_{i_k}] \in \overrightarrow{U_{K_n}}$. Deoarece, conform presupunerii $g^+(x_{i_j}) = g^+(x_{i_k})$, rezultă că există un vârf x_{i_s}, astfel încât $[x_{i_k}, x_{i_s}] \in \overrightarrow{U_{K_n}}$ și $[x_{i_s}, x_{i_j}] \in \overrightarrow{U_{K_n}}$. În acest caz obținem că orientarea $\overrightarrow{K_n}$ nu este tranzitivă. Contradicția obținută demonstrează afirmația lemei. ■

Consecința 1. *În orice orientare tranzitivă a grafului complet K_n este adevărată relația:*

$$g^+(x_{i_1}) = n - 1,\ g^+(x_{i_2}) = n - 2, \ldots, g^+(x_{i_n}) = 0 \qquad (3)$$

Fie F un subgraf B-stabil al grafului neorientat $G = (X; U)$.

Consecința 2. *Dacă F este subgraf stabil complet maximal, atunci, conform lemei 7, este adevărată relația* (3).

Lema 10. *Dacă F este un subgraf B-stabil din G, atunci este adevărată una din următoarele afirmații:*

1) F este subgraf stabil complet maximal;

2) F este subgraf stabil vid maximal;

3) F este subgraf stabil minimal.

Demonstrație: Presupunem că *F* este subgraf complet. Conform definiției 4, intersecția mulțimii X_F cu mulțimea de vârfuri ale unui subgraf M al lui G, astfel încât $X_F \neq X_M$ este vidă. Rezultă că F nu poate fi subgraf propriu stabil al altui subgraf complet. Deci, dacă F este subgraf complet, atunci, conform definiției 3, acesta este un subgraf stabil complet maximal.

Același principiu îl vom aplica și în cazul când subgraful F este vid. Atunci obținem că F este subgraf stabil vid maximal. Fie subgraful F este conex, nu este complet și nu conține subgrafuri stabile. Conform definiției 2, ușor se observă că F este subgraf stabil minimal. ■

Fie $\vec{G}$ o orientare a grafului $G = (X; U)$. Prin inversarea tuturor arcelor din $\vec{G}$ obținem o orientare nouă pe care o vom nota prin $\overleftarrow{G}$. Vom spune că orientările $\vec{G}$ și $\overleftarrow{G}$ sunt opuse una alteia.

Lema 11. *Dacă $\vec{G}$ este o orientare tranzitivă a grafului G, atunci și $\overleftarrow{G}$, ce se obține prin inversarea tuturor arcelor, este orientare tranzitivă.*

Demonstrație: Fie $\vec{G} = (X; \vec{U})$ o orientare tranzitivă, iar $\overleftarrow{G} = (X; \overleftarrow{U})$ este orientarea ce se obține din $\vec{G}$ la inversarea tuturor arcelor din $\vec{G}$. Presupunem că $\overleftarrow{G}$ nu este o orientare tranzitivă. Aceasta înseamnă că există vârfurile $x, y, z \in X$ încât nu se verifică relația de tranzitivitate, $[x, y] \in \overleftarrow{U}$ & $[y, z] \in \overleftarrow{U}$, însă $[x, y] \notin \overleftarrow{U}$. Atunci, în orientarea $\vec{G}$ am avea situația că $[z, y] \in \vec{U}$&$[y, x] \in \vec{U}$, însă $[z, x] \notin \vec{U}$. Aceasta contrazice faptul că $\vec{G}$ este orientare tranzitivă. ■

Consecința 3. *Dacă $G = (X; U)$ este un graf tranzitiv orientabil, atunci numărul tuturor orientărilor tranzitive ale lui G este număr par.*

Lema 12. *Graful tranzitiv orientabil G nu conține subgrafuri proprii, dacă și numai dacă el conține exact două orientări tranzitive opuse una alteia.*

Demonstrație: *Necesitatea.* Fie G un graf tranzitiv orientabil. În baza teoremei 4 din [1] rezultă că acesta conține cel puțin două orientări tranzitive opuse una alteia. Să demonstrăm că G conține exact două astfel de orientări.

Deoarece G nu conține subgraf propriu stabil, în baza lemei 4 rezultă că G nu conține nici subgraf B-stabil. Conform lemei 8, orice subgraf B-stabil este ITO-subgraf. Facem concluzia că în G nu există subgraf care ar genera o orientare tranzitivă independentă de G. Astfel, orice inversare a orientării unui arc din $\vec{G}$ duce la inversarea orientării tuturor arcelor din $\vec{G}$. Aceasta conduce la obținerea orientării $\overleftarrow{G}$.

Suficiența. Fie graful G are două orientări tranzitive. Conform lemei 8, rezultă că în G nu există ITO-subgraf. Dar acest lucru implică faptul că în G nu există nici subgrafuri proprii stabile.■

Următoarea teoremă completează rezultatele din [2] şi serveşte drept suport pentru caracterizarea grafurilor tranzitiv orientabile.

Fie G un graf tranzitiv orientabil, iar $\vec{G} = (X; \vec{U_G})$ o orientare a muchiilor din G. Vom nota prin $\vec{F} = (X_F; \vec{U_F})$ o orientare tranzitivă a unui subgraf stabil minimal F din G, iar prin $\overleftarrow{F} = (X_F; \overleftarrow{U_F})$ orientarea obținută prin inversarea tuturor arcelor din a $\vec{U_F}$.

Teorema 2. *Orientarea* $\vec{G}$ *a grafului* G *este tranzitivă dacă şi numai dacă pentru orice subgraf stabil minimal* $F = (X_F; U_F)$ *se verifică relația:*

$$\vec{U_F} \cap \overleftarrow{U_F} = \emptyset \tag{4}$$

Demonstrație: *Necesitatea.* Conform teoremei 1, mulțimea X_F poate fi acoperită cu un lanț netriangulat. În baza lemei 12, în orice orientare tranzitivă a grafului G subgraful stabil minimal F are două orientări tranzitive opuse una alteia. Rezultă că orice arc $[x, y]$ din $\vec{U_G}$ nu aparține mulțimii $\overleftarrow{U_G}$. Deci, $\vec{U_F} \cap \overleftarrow{U_F} = \emptyset$.

Suficiența. Presupunem contrariul. Fie există vârfurile $x, y \in X_F$, încât $[x, y] \in \vec{U_F}$ şi $[x, y] \in \overleftarrow{U_F}$. În acest caz obținem că vârfurile x, y generează ITO-subgraf. Conform lemei 8, obținem că vârfurile $x, y \in X_F$ determină un subgraf B-stabil. Obținem contradicție cu faptul că F este subgraf stabil minimal. Astfel, dacă $\vec{U_F} \cap \overleftarrow{U_F} = \emptyset$, atunci orientarea subgrafului stabil minimal F este tranzitivă. ■

3. Numărul de orientări tranzitive în graf

Fie F un subgraf B-stabil al grafului $G = (X; U)$. Vom nota prin G/F graful ce se obține din G, după următoarele reguli:

1) subgraful stabil F se înlocuieşte printr-un vârf x';

2) toate muchiile $[x, z], \forall x \in X_F$, $z \in X \setminus X_F$ se înlocuiesc cu muchia $[x', z]$.

Graful G/F se va numi graf factor corespunzător subgrafului B-stabil F. Vom nota prin G^0 graful G, iar prin $G^1 = G^0/F_0$. Dacă graful G^1 conține la rândul său un alt subgraf B-stabil F_1, atunci construim următorul graf factor G^1/F_1. Dacă acest graf factor iarăşi conține un subgraf B-stabil, atunci continuăm procedura descrisă mai sus până nu obținem un alt graf factor ce nu conține subgraf B-stabil. Astfel, pornind de la subgraful B-stabil $F_0 = F$ obținem şirul de grafuri factor neorientate:

$$G^0 = G, G^1 = G^0/F_0, G^2 = G^1/F_1, \dots, G^k = G^{k-1}/F_{k-1} \tag{5}$$

cu proprietățile:

1. F_i este subgraf B-stabil în graful G^i, unde $0 \le i \le k - 1$;
2. graful $G^k = G^{k-1}/F_{k-1}$ nu conține subgrafuri B-stabile.

Vom numi şirul (5), construit conform regulilor descrise mai sus, şir complet de grafuri factor ale grafului G. Menționăm că şirul respectiv conține $k + 1$ grafuri neorientate.

Lema 13. *Dacă*

$$G^0 = G, G^1 = G^0/A_0, G^2 = G^1/A_1, \dots, G^k = G^{k-1}/A_{k-1} \tag{6}$$

$$G^0 = G, G^1 = G^0/B_0, G^2 = G^1/B_1, \dots, G^t = G^{t-1}/B_{t-1} \tag{7}$$

sunt două şiruri complete de grafuri factor ale grafului G, atunci are loc egalitatea $k = t$.

Demonstrație: Cu alte cuvinte, trebuie să arătăm că, indiferent cum alegem subgrafurile B-stabile într-un graf, numărul de paşi până a obține un graf asupra căruia nu mai poate fi aplicat procedeul de factorizare este identic.

Conform lemei 1 din [3], putem spune că subgraful B-stabil A nu influențează procedeul de factorizare aplicat asupra subgrafului B-stabil B. Dacă în graful G aplicăm procedeul de factorizare asupra subgrafului A, reiese că în graful factor rezultant G/A neapărat va exista şi subgraful B. Aceeaşi logică este valabilă şi atunci când aplicăm procedeul de factorizare asupra subgrafului B. Indiferent cum alegem un subgraf B-stabil care urmează a fi factorizat, neapărat celelalte subgrafuri B-stabile vor fi în şirul de grafuri factor.

Următorul lucru necesar pentru a demonstra afirmația dată este să arătăm că între grafurile G/A şi G/B există o aplicație bijectivă. Cu alte cuvinte, trebuie să arătăm că factorizarea unui subgraf B-stabil nu generează alte subgrafuri B-stabile care nu pot fi obținute la factorizarea altui subgraf.

Deoarece în urma operației de factorizare în graful factor obținut apare un vârf nou, acesta, la rândul său, poate fi implicat în factorizarea unui subgraf B-stabil. Acest fapt denotă că orice subgraf B-stabil obținut la o anumită etapă de construire a şirului de grafuri factor poate fi obținut la o altă etapă de construire a şirului, în dependență de subgraful B-stabil care a fost ales pentru factorizare. Putem spune că în construcția şirului de grafuri factor poate fi schimbată ordinea apariției grafurilor, nu şi a numărului lor. Astfel, lungimea tuturor şirurilor complete de grafuri factor este identică. ∎

Consecința 4. *Pentru orice şir complet de grafuri factor ai grafului G numărul de orientări tranzitive ale lui G este acelaşi.*

Următoarele rezultate se vor referi la determinarea numărului de orientări tranzitive cu ajutorul tehnicii de factorizare.

Lema 14. *Dacă $G = (X; U)$ este un graf tranzitiv orientabil şi F un subgraf stabil vid maximal din G, iar G/F graful factor corespunzător, atunci numărul de orientări tranzitive ale grafului G este egal cu numărul de orientări tranzitive ale grafului G/F.*

Demonstrație: Pentru a demonstra lema este suficient să arătăm că orice orientare tranzitivă a lui G determină o orientare tranzitivă în G/F, şi invers.

Necesitatea. Fie $\vec{G} = (X_{\vec{G}}; \overrightarrow{U_{\vec{G}}})$ o orientare tranzitivă a grafului G. Notăm prin z_F vârful grafului G/F ce corespunde subgrafului stabil F. Vom orienta muchiile din G/F. Fie $[x, y]$ o muchie arbitrară din G/F. Dacă $x, y \neq z_F$, atunci orientarea muchiei $[x, y]$ o păstrăm ca şi în $\vec{G}$. Dacă însă $y = z_F$, atunci, conform lemei 1 din [5], orientarea muchiei $[x, z_F]$ va coincide cu orientarea oricărui arc $[x, t], t \in X_F$ din orientarea tranzitivă $\vec{G}$.

Să demonstrăm că orientarea obținută a grafului G/F este la fel tranzitivă.

Fie vârfurile $a, b, c \in X_{G/F}$, astfel încât în orientarea grafului G/F construită conform procedeului de mai sus există arcurile $[a, b]$ şi $[b, c]$. Dacă $a, b, c \neq z_F$, atunci rezultă că arcele sunt orientate în aceeaşi direcție precum în $\vec{G}$, deci rezultă că există şi arcul $[a, c]$. Fie $a = z_F$, atunci din F luăm un vârf arbitrar x, obținem că arcul $[x, b]$ aparține orientării tranzitive $\vec{G}$. Obținem că există şi arcul $[x, c]$. Conform modelului descris mai sus, ajungem la concluzia că există şi arcul $[a, c]$. Aceeaşi procedură o aplicăm şi în cazul când $b = z_F$ sau $c = z_F$. Obținem că orientarea grafului G/F obținută după modalitatea descrisă mai sus este tranzitivă.

Faptul că orientării tranzitive $\vec{G}$ îi corespunde o singură orientare tranzitivă a grafului G/F rezultă din procedura descrisă mai sus.

Suficiența. Fie o orientare tranzitivă $\overrightarrow{G/F}$ a grafului factor G/F. Să demonstrăm că, pornind de la aceasta, putem obține o orientare tranzitivă a grafului G, şi doar una singură.

Fie z_F vârful grafului G/Q ce corespunde subgrafului stabil F. Luăm o muchie arbitrară $[x, y]$ din G/F. Dacă $x, y \neq z_F$, atunci orientăm muchia $[x, y]$ din G în aceeaşi direcție ca şi orientarea arcului din $\overrightarrow{G/F}$. Dacă însă $y = z_F$, atunci y în G substituie vârfurile $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ din F, $p = |X_F|$ şi, conform lemei 1 din [5], orientarea arcului $[x, y_i]$, $i = \overline{1, p}$ în G va coincide cu orientarea $[x, y]$ din $\overrightarrow{G/F}$.

Uşor se verifică faptul că orientarea tranzitivă a grafului G obținută după procedeul descris mai sus este tranzitivă.

Faptul că unei orientări tranzitive $\overrightarrow{G/F}$ a grafului G/F îi corespunde doar o singură orientare tranzitivă în G rezultă din procedeul descris mai sus de construire a orientării tranzitive a lui G. ■

Vom nota prin $\tau(G)$ numărul de orientări tranzitive ale grafului G.

Lema 15. *Pentru graful G, asupra căruia nu poate fi aplicat procedeul de factorizare, este adevărată una din relațiile:*

1. $\tau(G) = 0$;
2. $\tau(G) = 2$;
3. $\tau(G) = |X_G|!$

Demonstrație: Dacă graful G nu este tranzitiv orientabil, atunci evident că $\tau(G) = 0$. Dacă însă G este tranzitiv orientabil şi nu poate fi aplicat procedeul de factorizare asupra grafului G, atunci sunt adevărate următoarele cazuri:

1. G nu conține subgrafuri proprii stabile;
2. G este graf complet.

Dacă graful tranzitiv orientabil G nu conține subgrafuri proprii stabile, atunci, conform lemei 12, obținem că $\tau(G) = 2$.

Este cunoscut faptul că graful complet nu conține subgrafuri B-stabile, deci asupra lui nu poate fi aplicat procedeul de factorizare. De asemenea, este cunoscut faptul că numărul de orientări tranzitive ale grafului complet $K_n = n!$. ■

Fie $G^0 = G, G^1 = G^0/F_0, G^2 = G^1/F_1, \ldots, G^{p+1} = G^p/F_p$ şirul de grafuri factor, încât:

a) G^{p+1} nu conţine subgrafuri B-stabile;

b) F_i este un subgraf B-stabil în G^i, $0 \leq i \leq p$.

Lema 16. Numărul de orientări tranzitive într-un graf G poate fi calculat după următoarea formulă:

$$\tau(G) = \tau(G^{p+1}) \prod_{i=1}^{p} \tau(F_i) \quad (8)$$

Concluzii

În această lucrare au fost descrise diverse clase de subgrafuri stabile. În comparaţie cu clasele de implicaţii descrise în [2], subgrafurile stabile oferă flexibilitate ce ţine de editarea orientărilor tranzitive. Cu ajutorul acestei categorii de subgrafuri pot fi construite noi orientări tranzitive în baza unei orientări existente. Clasele de implicaţii nu oferă posibilitatea de a obţine o orientare tranzitivă din alta. Formula de calcul al numărului de orientări tranzitive cu ajutorul subgrafurilor stabile (8) este mai viabilă şi compactă. Rezultatele ce ţin de determinarea unei orientări tranzitive şi a numărului de orientări tranzitive reprezintă baza pentru elaborarea algoritmilor de construire a orientărilor tranzitive.

Bibliografie:

1. CATARANCIUC, S., GRIGORIU, N. Transitive orientations on undirected graphs. In: *Proceedings of the „Doctoral Intensive Summer School on Evolutionary Computing in Optimisation and Data Mining* (ECODAM)". Iaşi, 2012, p.165-169.
2. GOLUMBIC, M. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. In: *Annals of Discrete Mathematics*, 57. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., (2004)
3. GRIGORIU, N. B-stable subgraphs in undirected graphs. In: *The third conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova*, Chişinău, 2014, p.354-357.
4. GRIGORIU, N. Orientarea tranzitivă a grafurilor ce nu conţine subgrafuri stabile maximale. În: *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*. Chişinău, 2014, p.87-94
5. GRIGORIU, N. Minimal stable subgraphs in undirected graphs. In: *International conference, Mathematics & Information Technologies: Research and Education* (MITRE-2013), Chişinău, 2013, p.48-49.
6. GRIGORIU, N. Stable subgraphs and non-triangulated chains. In: *The 20th conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu*, Chişinău, 2012, p.118-119.
7. GRIGORIU, N. Subgrafuri stabile într-un graf neorientat. În: *Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale*. Conferinţă internaţională, Chişinău, 2012, p.19-23.
8. ЕВСТИГНЕЕВ, В. *Применение теории графов в программировании*. Москва: Наука, 1985.
9. ЗЫКОВ, А. *Основы теории графов*. Москва: Вузовская книга, 2004, с.664. ISBN: 5-9502-0057-8

Prezentat la 10.06.2015