STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.7(77)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

GENERALIZAREA GRUPURILOR DISCRETE DE TABLETE CU $\overline{6}$ –SIMETRIA

Alexandru LUNGU

Departamentul Matematici Fundamentale

În acest articol sunt deduse şi descrise grupurile tuturor tipurilor posibile ale $\overline{6}-$ simetriei ce au în calitate de grupuri generatoare pe cele de tablete.

Cuvinte-cheie: *simetrii generalizate, grupuri, cvasiomomorfisme de dreapta.*

THE GENERALIZATION OF THE DISCRETE TABLET GROUPS WITH THE $\overline{6}$ SYMMETRY

In the present paper there are derived and described possible groups for all types of $\overline{6}-$ symmetry, who have in quality of generating groups those of the tablet groups.

Keywords: *generalized symmetries, groups, right quasi-homeomorphisms.*

1. Scopul studiului efectuat în această lucrare este de a analiza, în general, $\overline{6}-$ simetria (cazul când $P \cong C_6$), apoi de a deduce grupurile de diferite tipuri posibile ale acestei generalizări din grupurile discrete de tablete (grupurile cristalografice de categoria G_{320}) în calitate de grupuri generatoare şi, în sfârşit, de a descrie structura concretă a grupurilor deduse. Bazele teoriei generale a $\overline{P}-$ simetriei, inclusiv metode de deducere a diferitelor tipuri de grupuri din grupul de definire P şi grupul său generator G, au fost elaborate într-un ciclu de lucrări [1-6], asigurând astfel un suport teoretic solid pentru diferite cercetări concrete ulterioare.

2. Orice grup $G^{(P)}$ de $\overline{P}-$ simetrie cu grupul generator $G=\{g \mid g^{(p)} \in G^{(P)}\}$, nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutP$ şi imaginea Φ a grupului G ($\Phi = \operatorname{Im}\varphi \le AutP$) este subgrup în produsul semidirect de dreapta al grupului de definire P (grup tranzitiv de substituţii pe o mulţime $N=\{1,2,...,m\}$ de „indici"-calităţi ce reprezintă mărimi omogene orientate) cu grupul G, însoţit de omomorfismul fixat φ, unde $\varphi(g)=\bar{\varphi}_g$ pentru orice $g \in G$ şi $\bar{\varphi}_g(p)=gpg^{-1}$; cu alte cuvinte, $G^{(P)} \le P \,{}_{\varphi H(\Phi)}G$. Totalitatea componentelor-substituţii p din elementele grupului $G^{(P)}$ formează mulţimea $P'=\{p \mid g^{(p)} \in G^{(P)}\}$, care, în general, nu este grup, dar verifică condiţiile $e \subseteq P' \subseteq P$. Intersecţia H' a grupului $G^{(P)}$ cu grupul său generator G reprezintă subgrupul lui de simetrie ($H'=G^{(P)} \cap G$), iar intersecţia Q a grupului $G^{(P)}$ cu totalitatea P' reprezintă subgrupul de transformări $P-$identice ale grupului $G^{(P)}$ ($Q=G^{(P)} \cap P'$, care coincide cu intersecţia grupului $G^{(P)}$ şi a grupului de definire P).

Pentru grupurile de substituţii P finite orice grup de $\overline{P}$ –simetrie poate fi dedus din grupul său generator G, cunoscând nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutP$ conform următorilor paşi: 1) se găsesc în P toate subgrupurile Q şi submulţimile P' ce se descompun în clase de resturi de dreapta în raport cu Q, iar în G toate subgrupurile H' de indice egal cu puterea mulţimii tuturor claselor de resturi de dreapta a lui P' în raport cu Q, pentru care există izomorfismul grupurilor-factor P''/Q şi H/H'', unde $e \le Q \le P'' \subseteq P'$ şi $Q \triangleleft P'' < P$, iar $H''=H' \cap H$ şi $H'' \triangleleft H$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de dreapta generalizat $\widetilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de dreapta a lui P' în raport cu Q, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H, şi care păstrează corespondenţa dintre elementele lui P'' şi H obţinută în rezultatul izomorfismului grupurilor-factor H/H'' şi P''/Q; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare p' din $Qp = \widetilde{\psi}(g)$ şi în mulţimea acestor perechi se introduce operaţia $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_k g_k$, unde $p_k = p_i \bar{\varphi}_{g_i}(p_j)$, $g_k = g_i g_j$, $\bar{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$ şi $\bar{\varphi}_{g_i}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (teorema principală a $\overline{P}$ –simetriei) [5,6].

Pentru grupurile $G^{(P)}$ de $\overline{P}-$simetrie sunt elaborate şi propuse simboluri polinomiale $G\,|\,H'[\{P,P_i\}\,|\,(P')\,|\,P''\,|\,Q; H/H'''/H'']$, care includ în sine o informaţie detaliată despre structura grupului respectiv, unde P_i este subgrupul staţionar al grupului concret de substituţii P, iar grupul factor H'''/H'' este izomorf cu intersecţia lui P_i cu P''; $H/H'''/H''$ este simbolul trinomial al subgrupului de $P-$simetrie [7,6] $H^{(P)}$ din $G^{(P)}$.

3. În continuare vom analiza rezultatele concrete obţinute în procesul de deducere şi descriere a grupurilor de $\overline{6}-$simetrie din grupurile discrete de tablete în calitate de grupuri generatoare G. Grupurile cristalografice de tablete sunt prezentate în simbolica lui Şubnikov cu ajutorul unui sistem generator ireductibil. Conform lui Şubnikov, axele şi planele de simetrie se notează tot aşa ca şi în simbolica internaţională, pe când perpendicularitatea elementelor de simetrie se notează nu prin linie fracţionară, ci prin două puncte, iar paralelismul lor – printr-un punct. Axele de rotoreflexie de ordinul N se notează prin simbolul $\tilde{N}$.

Deoarece grupul $P = \{e, p = (123456), p^2 = (135)(246), p^3 = (14)(25)(36),\ p^4 = (153)(264), p^{-1} = (165432)\}$ este ciclic de ordinul 6, el conţine numai subgrupurile netriviale $P' = \{e, p^3\}$ de ordinul 2 şi $P' = \{e, p^2, p^4 = (p^2)^{-1}\}$ de ordinul 3. Prin urmare, pentru $\overline{6}-$simetrie nu pot exista atât grupuri semimijlocii, cât şi grupuri pseudomijlocii. Deci, în orice familie a grupurilor de $\overline{6}$ –simetrie cu grupul generator dat G pot exista numai grupuri majore, minore, $3-$mijlocii, $2-$mijlocii, $3-$semimajore, $2-$semimajore, $3-$semiminore, $2-$semiminore sau $P'-$pseudominore, unde P' nu este subgrup în P, dar verifică condiţiile $e \subset P' \subset P$. Întâi de toate, vom menţiona că grupurile majore de $\overline{P}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator G ($e < Q = P' = P$), în corespundere cu teorema principală a $\overline{P}-$simetriei, se deduc în formă de produs semidirect de dreapta nedegenerat al grupului de definire P cu grupul G, însoţit de omomorfismul $\varphi: G \to AutP$ cu nucleul H.

În cazul concret cercetat, grupul tuturor automorfismelor $AutP = \{1^\alpha, 2^\alpha\}$, unde 1^α este automorfismul identic, iar automorfismul 2^α aplică unul pe celălalt elementele reciproc inverse p şi p^{-1}, respectiv, p^2 şi p^4 [8]. Ca consecinţă, nucleul $H = Ker\varphi$ al omomorfismului însoţitor trebuie să fie un subgrup de indicele 2 în grupul generator G. În cele 31 grupuri discrete de tablete (1, 2, 3, 4, 6, $1\cdot m$, $2\cdot m$, $3\cdot m$, $4\cdot m$, $6\cdot m$, $1:m$, $2:m$, $3:m$, $4:m$, $6:m$, $m\cdot 1:m$, $m\cdot 2:m$, $m\cdot 3:m$, $m\cdot 4:m$, $m\cdot 6:m$, $\tilde{2}$, $\tilde{4}$, $\tilde{6}$, $\tilde{2}\cdot m$, $\tilde{4}\cdot m$, $\tilde{6}\cdot m$, $1:2$, $2:2$, $3:2$, $4:2$, $6:2$) ca grupuri generatoare există exact 59 de divizori normali ($H \lhd G$) de indicele 2. Pentru fiecare din cele 59 subgrupuri invariante de indicele 2, în calitate de nucleu, construim produsul semidirect de dreapta, respectiv, $P \leftthreetimes_{\varphi H(\Phi)} G = [P, G, H, \Phi]$, unde $\Phi = AutP$ ($G/H \cong C_2 \cong AutP$).

Vom analiza în detalii numai un singur exemplu concret. Grupul $G = \tilde{6}\cdot m$ are trei divizori normali de indicele 2, anume: $H_1 = \tilde{6}$, $H_2 = 3\cdot m$ şi $H_3 = 3:2$. Subgrupurile H_2 şi H_3, fiind grupuri neciclice de ordinul 6, sunt izomorfe între ele, dar sunt caracterizate de ansambluri de elemente de simetrie cu conţinut geometric diferit [9]. În rezultat, se obţin 3 grupuri majore diferite de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată cu acelaşi grup generator $\tilde{6}\cdot m$, anume: $G_1 = [P, G, H_1, \Phi]$, $G_2 = [P, G, H_2, \Phi]$ şi $G_3 = [P, G, H_3, \Phi]$.

Deosebirea dintre grupurile G_1, G_2 şi G_3 se manifestă la nivelul operațiilor lor de grup, unde unele elemente concrete g din grupul generator G generează automorfisme diferite ale grupului P.

4. Deducerea şi descrierea structurii grupurilor semimajore sau mijlocii de $\overline{6}-$simetrie cu grupurile generatoare de tablete prezintă un interes aparte. Grupul de definire P, fiind ciclic de ordinul 6, are două subgrupuri netriviale P' de ordinul 2 şi 3, respectiv. Mai mult, restricția oricărui automorfism al lui P pe subgrupul P' de ordinul 2 coincide cu automorfismul identic. Ca consecință, grupurile $P'-$semimajore ($P' \cong C_2$) ce se obțin formal nu se deosebesc prin nimic de grupurile majore de $2-$simetrie, care se deduc în formă de produs direct al grupului P' cu grupul generator G, adică, $G^{(P)} = P' \times G$. Deci, există exact 31 grupuri $2-$semimajore de $\overline{6}-$simetrie cu grupurile generatoare de tablete. Grupurile $P'-$semimajore ($P' \cong C_3$) se deduc în formă de produs semidirect de dreapta $P' \leftthreetimes_{\varphi H(\Phi)} G = [P', G, H, \Phi]$, însoțit de omomorfismul χ al grupului G pe grupul $AutP'$. Ca consecință, există exact 59 grupuri $3-$semimajore de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată cu grupurile generatoare de tablete.

Subgrupurile $Q_1(\cong C_2)$ şi $Q_2(\cong C_3)$ ale grupului de definire $P(\cong C_6)$ sunt subgrupuri invariante, deoarece grupul P este abelian. Conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, pentru grupurile $Q-$mijlocii trebuie de construit un cvasiomomorfism de dreapta generalizat $\tilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului generator G pe grupul factor P/Q, a cărui restricție pe $H = Ker\varphi$ să fie un omomorfism cu nucleul $H'' = H \cap H'$ pe grupul factor P''/Q, unde $Q \leq P'' \leq P$. Deci, P'' poate fi egal cu subgrupul Q sau cu grupul de definire P.

Fie $P'' = Q_1$. Atunci H'' ($H'' = H \cap H'$ şi verifică condiția $H/H'' \cong P''/Q_1 \cong C_1$) trebuie să coincidă cu H, unde H este subgrup de indicele 2, iar H' este subgrup de indicele 3 în G. Acest lucru este imposibil. Prin urmare, nu există posibilități acceptabile pentru a continua cercetarea concretă. Fie $P'' = Q_2$. Deci, $H/H'' \cong P''/Q_2 \cong C_1$ şi $P/Q_2 \cong C_2$. Ca consecință, se obține $H'' = H$ (este posibil numai atunci când $H' = H$). Astfel, se obțin 59 grupuri $3-$mijlocii de $\overline{6}-$simetrie cu simbolurile $G|H[\{C_6, C_1\}|(C_6)|C_3/C_3; H/H/H]$, unde H este subgrup de indicele 2 în grupul generator de tabletă G. Vom menționa că cele 59 grupuri $3-$mijlocii de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată, obținute mai sus, sunt concomitent şi grupuri $3-$mijlocii de $6-$simetrie cu aceleaşi grupuri generatoare. Ultimele se deduc din grupurile date P şi G prin intermediul omomorfismului $\lambda: G \to P/Q_2$ cu nucleul H' de indicele 2. Grupurile cu acelaşi grup generator sunt formate din aceleaşi perechi pg (unde $p \in P$ iar $g \in G$), dar se deosebesc între ele prin înmulțirea concretă a acestor perechi (pentru unele perechi rezultatele sunt diferite).

În cazul când $P'' = P$, subgrupul $H'' = H \cap H'$ trebuie să fie de indicele 2 în H pentru Q_2 şi de indicele 3 pentru Q_1. Deci, vom avea: 1) $H/H'' \cong P/Q_2$ şi $G/H' \cong C_2 \cong P/Q_2$; 2) $P/Q_1 \cong C_3$ şi H' – subgrup de indicele 3 în G. Analizând fiecare caz posibil, se obțin următoarele rezultate: 1) Grupul $3-$mijlociu de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator G, subgrupul de simetrie H' şi nucleul omomorfismului însoțitor H, dacă el există, coincide formal cu grupul respectiv de $6-$simetrie. Vom menționa că, în cazul dat, subgrupurile H şi H' sunt de indicele 2 în grupul generator G, iar intersecția lor H'' este subgrup de indicele 2 în H. Mai mult, grupul $3-$mijlociu respectiv de $6-$simetrie există întotdeauna, în virtutea faptului că $G/H' \cong P/Q_2$. 2) Pentru grupul $2-$mijlociu subgrupul său de simetrie H' (subgrup de indicele 3 în G) are aşa o intersecție H'' cu nucleul omomorfismului însoțitor H (subgrup de indicele 2 în G), încât grupul-factor H/H'' este ciclic de ordinul 3. Pentru cercetarea ulterioară

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.7(77)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

trebuie să considerăm numai acele grupuri G ce au așa subgrupuri H de indicele 2 (care, la rândul lor, au subgrupuri invariante H'' de indicele 3) și subgrupuri H' de indicele 3 în G, încât $H''=H\cap H'$.

Din cele 31 grupuri generatoare G numai 11 ($6, \tilde{6}, 3:m,$ $6:m,$ $3\cdot m,$ $3:2,$ $6\cdot m,$ $6:2,$ $\tilde{6}\cdot m,$ $m\cdot 3:m,$ $m\cdot 6:m$) verifică toate condițiile enumerate mai sus. Pentru fiecare din grupurile abeliene $6, \tilde{6}, 3:m,$ $6:m$ se obține câte un singur grup $2-$mijlociu de $6-$simetrie, deoarece $G/H'\cong P/Q_1\cong C_3$. Din celelalte 7 grupuri generatoare rămase se deduc în total 7 grupuri $2-$mijlocii de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată ce au simbolurile polinomiale:

$3\cdot m\,|\,m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;3/1/1]$, $3:2\,|\,2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;3/1/1]$,

$6\cdot m\,|\,2\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;6/2/2]$, $6:2\,|\,2:2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;6/2/2]$,

$\tilde{6}\cdot m\,|\,2'\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;\tilde{6}/\tilde{2}/\tilde{2}]$,

$m\cdot 3:m\,|\,2'\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;3:m/m/m]$ și

$m\cdot 6:m\,|\,m\cdot 2:m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6/C_2;6:m/2:m/2:m]$.

5. Vom deduce și vom descrie grupurile minore de $\overline{6}-$simetrie. Conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, pentru a deduce grupurile minore cu grupul generator G, trebuie să se caute în G așa subgrupuri H', indicele cărora coincide cu ordinul grupului P. Deci, trebuie analizate numai subgrupurile de indicele 6 din grupurile generatoare, care au subgrupuri de indicele 2. În rezultatul cercetării concrete respective am constatat că numai grupurile $6,$ $\tilde{6},$ $3\cdot m,$ $6\cdot m,$ $3:m,$ $3:2,$ $6:m,$ $m\cdot 3:m$, $m\cdot 6:m$, $\tilde{6}\cdot m$, $6:2$ au subgrupuri H' de indicele 6. Vom analiza în detalii toate cazurile respective de deducere a grupurilor minore.

Fie $G=6$, $H=3$, iar $H'=1$. Deoarece grupul factor G/H' este izomorf cu grupul P considerat, apoi grupul minor ce se obține este de $6-$simetrie cu simbolul binomial $6/1$. Concluzie: nu există grupuri minore de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator $G=6$. O situație similară se obține în toate cazurile grupurilor generatoare abeliene $6, \tilde{6}, 3:m, 6:m$.

Fie $G=3\cdot m$, $H=3$, iar $H'=1$. În acest caz, $H''=H\cap H'=1$, iar grupul factor $3/1$ este izomorf cu un subgrup P'' din grupul dat P. Construim aplicația ψ a grupului $G=3\cdot m$ pe grupul $P(\cong C_6)$ cu nucleul $H'=1$, anume: $\psi(1)=e$, $\psi(3)=p^2$, $\psi(3^{-1})=p^4$, $\psi(m_1)=p$, $\psi(m_2)=p^3$ și $\psi(m_3)=p^{-1}$. Este ușor de verificat că ψ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoțit de omomorfismul $\varphi:3\cdot m\to\{1^\alpha,2^\alpha\}$ cu nucleul $H=3$. În rezultat se obține grupul minor de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată cu simbolul polinomial $3\cdot m\,|\,1[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3/e;\ 3/1/1]$. Vom menționa că se pot construi trei cvasiomomorfisme de dreapta nedegenerate diferite ale grupului $G=3\cdot m$ pe grupul $P(\cong C_6)$ cu nucleul $H'=1$, restricțiile cărora pe $H=3$ coincid. Mai mult, se pot construi două omomorfisme diferite ale lui $H=3$ (cu nucleul $H''=1$) pe subgrupul $P''=\{e,p^2,p^4\}$. Ca consecință, în total se obțin 6 grupuri minore diferite de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată echivalente între ele, deci cu același simbol polinomial.

Cercetarea cazului când $G=3:2$ este similară cazului $G=3\cdot m$. Ca consecință, se obține grupul minor de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată cu simbolul polinomial $3:2\,|\,1[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3/e;3/1/1]$.

Fie $G=6\cdot m$. Vom analiza pe rând ambele cazuri ale subgrupurilor de indicele 2 $H_1=6$ și $H_2=3\cdot m$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 6 din $G=6\cdot m$, anume: $H_1'=2$ și $H_2'=m_i$, $i=1,2,3,4,5,6$. Pentru $G=6\cdot m$, $H=6$ și $H'=2$ se obține grupul minor de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată $G^{(P)}=\{e1,e2,p^2 3,p^2 6^{-1},p^4 3^{-1},p^4 6,pm_1,pm_4,p^{-1}m_2,p^{-1}m_5,\ p^3m_3,p^3m_6\}$ cu simbolul polinomial

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.7(77)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

$6\cdot m\,|\,2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3\,/\,e;\ 6/2/2]$, deoarece aplicaţia ψ a grupului $G=6\cdot m$ cu nucleul $H'=2$ pe grupul $P(\cong C_6)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoţit de omomorfismul $\varphi: 6\cdot m \to \{1^{\alpha}, 2^{\alpha}\}$ cu nucleul $H=6$. Vom sublinia că se repetă aceeaşi situaţie ca şi pentru cazul $G=3\cdot m$, $H=3$ şi $H'=1$. Deci, se obţin în total 6 grupuri minore diferite, dar echivalente, ce au grupul generator $G=6\cdot m$, nucleul omomorfismului însoţitor $H=6$ şi subgrupul de simetrie $H'=2$.

În rezultatul cercetării detaliate a cazurilor $G=6\cdot m$, $H=6$ şi $H'=m_i$, $i=1-6$ se obţin 6 grupuri minore concrete echivalente între ele. De exemplu, pentru $H'=m_1$ vom avea grupul minor $G^{(P)}=\{e1, em_1, p6, pm_2, p^2 3, p^2 m_3, p^3 2, p^3 m_4, p^4 3^{-1}, p^4 m_5, p^{-1}6^{-1}, p^{-1} m_6\}$ cu simbolul polinomial $6\cdot m\,|\,m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;\ 6/1/1]$. Vom menţiona că pentru grupul $H=6$ există două izomorfisme concrete diferite cu grupul de substituţii $P''=P\cong C_6$. Pentru $G=6\cdot m$, $H=3\cdot m$ şi $H'=2$ sau $H'=m$ nu se obţine niciun grup minor, deoarece $H''=H\cap H'$ nu verifică condiţiile necesare respective.

Cercetarea grupului $G=6:2$ este similară cazului $G=6\cdot m$. În rezultat se obţin încă 18 grupuri minore diferite, dintre care numai două grupuri sunt neechivalente de $\overline{6}$–simetrie nedegenerată. Grupurile menţionate au următoarele simboluri polinomiale: $6:2\,|\,2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3\,/\,e;\ 6/2/2]$ şi $6:2\,|\,2'[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;\ 6/1/1]$.

În cele ce urmează vom studia cazul când $G=\tilde{6}\cdot m=\{1,\tilde{6},3,\tilde{2},3^{-1},\tilde{6}^{-1},m_1,2_2,m_3,2_4,m_5,2_6\}$. Vom analiza pe rând toate subcazurile posibile pentru subgrupurile de indicele 2 $H_1=\tilde{6}$, $H_2=3\cdot m$ şi $H_3=3:2$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 6, anume: $H_1'=\tilde{2}$, $H_2'=m_i$, $i=1,3,5$ sau $H_3'=2_j$, $j=2,4,6$. Pentru $G=\tilde{6}\cdot m$, $H=\tilde{6}$ şi $H'=\tilde{2}$ se obţine grupul $G^{(P)}=\{e1, e\tilde{2}, p^2 3, p^2\tilde{6}^{-1}, p^3 2_2, p^3 m_5, p^4 3^{-1}, p^4\tilde{6}, pm_1, p2_4, p^{-1}2_6, p^{-1}m_3\}$ cu simbolul polinomial $\tilde{6}\cdot m\,|\,\tilde{2}[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3\,/\,e;\ \tilde{6}/\tilde{2}/\tilde{2}]$. Dacă $G=\tilde{6}\cdot m$, $H=\tilde{6}$ şi $H'=m$, atunci se obţine grupul minor cu simbolul $\tilde{6}\cdot m\,|\,m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;\ \tilde{6}/1/1]$, iar pentru $G=\tilde{6}\cdot m$, $H=\tilde{6}$ şi $H'=2'$ se obţine grupul minor de $\overline{6}$–simetrie nedegenerată cu simbolul $\tilde{6}\cdot m\,|\,2'[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;\ \tilde{6}/1/1]$. Niciunul din celelalte 6 subcazuri posibile rămase ($H=3\cdot m$ sau $H=3:2$, iar $H'=m_i,\tilde{2},2_j$) nu dau grupuri minore din diferite motive. De exemplu, a) $H''=1$, iar H/H'' nu este izomorf cu un subgrup din P; b) $H''=2$ sau m, iar H'' nu este un divizor normal al subgrupului $H=Ker\varphi$. Deci, din grupul generator $G=\tilde{6}\cdot m$ se obţin în total 18 grupuri minore diferite de $\overline{6}$–simetrie nedegenerată, dintre care numai 3 sunt neechivalente între ele.

Cercetarea grupului $m\cdot 3:m$ este analogică cazului $G=\tilde{6}\cdot m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt $H=3:m$, $3\cdot m'$ şi $3:2'$, iar de indicele 6 sunt subgrupurile $H'=m, m'$ şi $2'$. Se obţin în total 18 grupuri minore diferite, dintre care numai 3 sunt neechivalente. Simbolurile lor polinomiale:

1) $m\cdot 3:m\,|\,m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3\,/\,e;\ 3:m/m/m]$,

2) $m\cdot 3:m\,|\,m'[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,|\,e;\ 3:m/1/1]$ şi

3) $m\cdot 3:m\,|\,2'[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;\ 3:m/1/1]$.

Vom analiza cazul rămas: $G=m\cdot 6:m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt $H=6:m$, $6\cdot m$, $6:2$, $m\cdot 3:m$ şi $\tilde{6}\cdot m$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 6 din $G=m\cdot 6:m$, anume: $2:m$, 3 subgrupuri $2\cdot m$, 6 subgrupuri $2'\cdot m$, 6 subgrupuri $2':m$ şi 3 subgrupuri $2:2$. Vom menționa că numai subgrupul $H'=2:m$ este invariant în grupul generator $G=m\cdot 6:m$ şi grupul factor G/H' este neciclic de ordinul 6, ceea ce permite cercetarea ulterioară. Studiind detaliat toate posibilitățile concrete pentru $H=6:m$ şi H' arbitrar (pentru toți candidații), apoi efectuând etapele teoremei principale de deducere a grupurilor de $\overline{P}-$simetrie nedegenerată, din grupul generator $G=m\cdot 6:m$ se obțin 5 grupuri minore neechivalente, ale căror simboluri polinomiale le enumerăm în continuare:

$$m\cdot 6:m\,|\,2:m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_3\,/\,e;6:m/2:m/2:m], \qquad 1)$$

$$m\cdot 6:m\,|\,2':m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;6:m/\tilde{2}/\tilde{2}], \qquad 2)$$

$$m\cdot 6:m\,|\,2\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;6:m/2/2], \qquad 3)$$

$$m\cdot 6:m\,|\,2'\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;6:m/m/m], \qquad 4)$$

$$m\cdot 6:m\,|\,2:2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_6)\,|\,C_6\,/\,e;6:m/2/2]. \qquad 5)$$

În toate celelalte 4 cazuri pentru H şi orice H' posibil nu se obține niciun grup minor de $\overline{6}-$simetrie, deoarece nu se respectă toate condițiile necesare respective (H'' nu este divizor normal în H sau grupul factor H/H'' nu este izomorf unui subgrup P'' al grupului de definire P). Deci, din grupul $G=m\cdot 6:m$ se obțin în total 36 grupuri minore diferite, dintre care numai 5 sunt grupuri neechivalente între ele.

Totalizând rezultatele acestui compartiment, vom sublinia că din grupurile discrete cristalografice de tablete se obțin în total 118 grupuri minore diferite de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată, dintre care numai 21 sunt grupuri neechivalente.

6. Pentru a deduce grupurile $P'-$semiminore de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată, conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, trebuie de construit cvasiomomorfismele de dreapta ψ ale grupurilor generatoare G pe subgrupul P' din grupul P cu nucleele H', însoțite de omomorfismele $\varphi:G\to AutP$ cu nucleele H, ale căror restricții pe H sunt omomorfisme cu nucleele $H''=H\cap H'$. În cazul concret cercetat, grupul $AutP$ este de ordinul 2, iar P' este de ordinul 2 sau de ordinul 3. Deci, H trebuie să fie subgrup de indicele 2, iar H' – de indicele 2 sau 3 în grupul generator G. Ca consecință, $P'=\{e,p^3\}$ sau $P'=\{e,p^2,p^4\}$.

Pentru $P'=\{e,p^3\}$ se obțin 59 grupuri $2-$semiminore de $\overline{6}-$simetrie din grupurile discrete de tablete în calitate de grupuri generatoare, care au simbolurile polinomiale de forma $G|H[\{C_6,C_1\}|(C_2)|C_1/e;H/H/H]$, unde G este unul din cele 31 grupuri generatoare, iar H este subgrup de indicele 2 în G. Vom menționa că automorfismele grupului P aplică subgrupul P' identic pe sine. Deci, grupurile $P'-$semiminore obținute formal nu se deosebesc prin nimic de grupurile $P'-$semiminore respective de $6-$simetrie.

Pentru $P'=\{e,p^2,p^4\}$ cercetarea în detalii nu se deosebeşte cu nimic de deducerea grupurilor minore de $\overline{3}-$simetrie [10]. În rezultat, se obțin 7 grupuri $3-$semiminore neechivalente de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată, ale căror simboluri polinomiale sunt:

$3\cdot m\,|\,m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;3/1/1]$, $3:2\,|\,2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;3/1/1]$,

$6\cdot m\,|\,2\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;6/2/2]$, $6:2\,|\,2:2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;6/2/2]$,

$\tilde{6}\cdot m\,|\,2:2[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;\tilde{6}/\tilde{2}/\tilde{2}]$,

$m\cdot 3:m\,|\,2\cdot m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;3:m/m/m]$ şi

$m\cdot 6:m\,|\,m\cdot 2:m[\{C_6,C_1\}\,|\,(C_3)\,|\,C_3\,/\,e;6:m/2:m/2:m]$.

7. Vorbind despre grupurile $P^{/}-$pseudominore de $\overline{6}-$simetrie, mai întâi vom menționa că submulțimi $P^{/}$, care nu sunt subgrupuri ale grupului P (ciclic de ordinul 6) şi care verifică condițiile $e\subseteq P^{/}\subset P$, sunt tocmai 28: 4 cu 2 elemente, 9 cu 3 elemente, 10 cu 4 elemente şi 5 cu 5 elemente. Mai departe vom

exclude din cercetarea concretă submulțimile $P^{/}$ cu 5 elemente, deoarece în grupurile generatoare analizate G nu sunt subgrupuri H' de indicele 5.

Pentru fiecare submulțime $P^{/}$ cu 2 elemente cercetarea este mai simplă, deoarece în cazul acesta atât H', cât și H sunt subgrupuri de indicele 2 în grupul generator G. Conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, pentru fiecare submulțime $P^{/}$ concretă trebuie de construit cvasiomomorfismul de dreapta ψ al fiecărui grup generator G pe $P^{/}$ cu nucleul H', însoțit de omomorfismul $\varphi: G \to AutP$ cu nucleul H, a cărui restricție pe H este un omomorfism cu nucleul $H'' = H \cap H'$ pe subgrupul $P'' = e$ (P'' se include în submulțimea $P^{/}$). Ca consecință, $H' = H$ și din cele 31 grupuri cristalografice de tablete în calitate de grupuri generatoare și din fiecare submulțime $P^{/} = (e,p), P^{/} = (e,p^{-1}), P^{/} = (e,p^{2})$ și $P^{/} = (e,p^{4})$ se obțin exact câte 59 grupuri $P^{/}$–pseudominore cu simbolul polinomial respectiv $G\,|\,H[\{C_6, C_1\}\,|\,(P^{/})\,|\,C_1 / e; H/H/H]$. Deci, în total se obțin 236 grupuri $P^{/}$–pseudominore pentru $|P^{/}| = 2$.

Fie $|P^{/}| = 3$. În acest caz, H este un subgrup de indicele 2, iar H' de indicele 3 în G. Intersecția lor H'' trebuie să fie un divizor normal în H, care verifică condiția $H/H'' \cong P''$, unde subgrupul P'' al grupului P se include în $P^{/}$. Sunt posibile două subcazuri: 1) $P'' = e$ (valabil pentru toate 9 submulțimi $P^{/}$ cu 3 elemente). Din condiția $H/H'' \cong P''$ urmează că $H'' = H' \cap H$ trebuie să coincidă cu H, ceea ce este imposibil, deoarece subgrupul H' are indicele 3, iar H are indicele 2 în G. Ca consecință, nu există niciun grup $P^{/}$–pseudominor. 2) $P'' = (e,p^{3})$, valabil pentru submulțimile $P^{/} = (e,p^{3},p)$, $P^{/} = (e,p^{3},p^{-1}), P^{/} = (e,p^{3},p^{2})$ și $P^{/} = (e,p^{3},p^{4})$. După o cercetare minuțioasă a tuturor celor 11 grupuri generatoare G ce conțin atât subgrupuri H de indicele 2, cât și subgrupuri H' de indicele 3 s-a constatat că nu se satisfac toate condițiile necesare ca să existe grupuri $P^{/}$–pseudominore. Anume: a) sau $H'' = H' \cap H$ nu-i divizor normal în H, b) sau grupul factor H/H'' nu-i de ordinul 2. Deci, nu există grupuri $P^{/}$–pseudominore pentru $|P^{/}| = 3$.

Fie $|P^{/}| = 4$. În acest caz, H este un subgrup de indicele 2, iar H' de indicele 4 în G. Intersecția H'' a lor trebuie să fie un divizor normal în H, care verifică condiția $H/H'' \cong P''$, unde subgrupul P'' al grupului P se include în $P^{/}$. Pentru cercetarea ulterioară sunt valabile toate subcazurile posibile: 1) $P'' = e$, 2) $P'' = (e,p^{3})$ și 3) $P'' = (e,p^{2},p^{4})$.

1) Fie $P'' = e$ (este valabil pentru toate 10 submulțimi $P^{/}$ cu 4 elemente). Din condiția $H/H'' \cong P''$ urmează că H' trebuie să coincidă cu H, ceea ce este imposibil ($H'' = H' \cap H$, unde H are indicele 2, iar H' are indicele 4 în G). Concluzie: nu există grupuri $P^{/}$–pseudominore pentru acest subcaz.

2) Fie $P'' = (e,p^{3})$ (este valabil pentru 6 submulțimi $P^{/}$ cu 4 elemente). Din condiția $H/H'' \cong P''$ urmează că H'' trebuie să fie subgrup de indicele 2 în H. Trebuie analizate toate 19 grupuri generatoare ce au subgrupuri de indicele 2 și 4 (4, $\tilde{4}$, $2 \cdot m$, $2:m$, $2:2$, $m \cdot 1:m$, $\tilde{2} \cdot m$, $4 \cdot m$, $4:2$, $\tilde{4} \cdot m$, $4:m$, $m \cdot 2:m$, $6 \cdot m$, $6:2$, $\tilde{6} \cdot m$, $m \cdot 3:m$, $6:m$, $m \cdot 4:m$, $m \cdot 6:m$). Pentru grupurile ciclice 4 și $\tilde{4}$, ce verifică toate condițiile necesare cerute pentru H, H' și H'', nu se poate construi un cvasiomomorfism de dreapta a acestor grupuri nici pe una din cele 6 submulțimi $P^{/}$ cu 4 elemente.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.7(77)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-25

Vom menționa că numai în cazurile când H' este un așa divizor normal în G, încât grupul factor G/H' este un grup neciclic de ordinul 4, se pot construi cvasiomomorfisme ψ ale grupului G pe submulțimi $P^{/}$ cu 4 elemente. Mai mult, numai submulțimile $P^{/}=(e,p^3,p,p^4)$ și $P^{/}=(e,p^3,p^{-1},p^2)$ admit așa aplicații ψ. Grupurile neciclice de ordinul patru $2\cdot m,\ 2:m,\ 2:2,\ m\cdot 1:m$ și $\tilde{2}\cdot m$ generează, în total, 44 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite cu simbolurile $G\,|\,1[\{C_6,C_1\}\,|\,(P^{/})\,|\,C_2/e;H/1/1]$, unde G este grupul generator respectiv, H este subgrup de indicele 2 în G, iar $P^{/}$ este una din submulțimile menționate. Vom sublinia că pentru fiecare din submulțimile $P^{/}$ și fiecare din grupurile generatoare menționate G se pot construi câte 2 cvasiomomorfisme de dreapta diferite ψ_1 și ψ_2 cu același nucleu H', ale căror restricții pe $H=Ker\varphi$ coincid. În rezultat, se obțin câte 2 grupuri $P^{/}$–pseudominore echivalente. Deci, din grupurile $2\cdot m,\ 2:m,\ 2:2,\ m\cdot 1:m$ și $\tilde{2}\cdot m$ se obțin 22 grupuri $P^{/}$–pseudominore neechivalente.

Pentru celelalte 4 submulțimi $P^{/}$ cu 4 elemente, ce includ în sine subgrupul $P''=(e,p^3)$, nu poate fi construit niciun cvasiomomorfism de dreapta ψ cu nucleul $H'=1$ al oricăruia din cele 5 grupuri generatoare analizate.

Grupurile $4\cdot m, 4:2, \tilde{4}\cdot m$ generează în total 36 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite cu simbolurile polinomiale $G\,|\,2[\{C_6,C_1\}\,|\,(P^{/})\,|\,C_2/e;H/2/2]$, unde grupul generator G este unul din grupurile menționate de ordinul 8, iar H este subgrup de indicele 2 în G. Dintre cele 36 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite numai 14 sunt neechivalente între ele. Grupurile echivalente între ele au același subgrup de simetrie $H'=2$, același nucleu $H=Ker\varphi$ al omomorfismelor însoțitoare sau, dacă nucleele omomorfismelor însoțitoare sunt diferite, atunci ele fiind izomorfe au conținut geometric diferit.

Grupurile abeliene de ordinul opt $4:m$ și $m\cdot 2:m$ generează în total tocmai 48 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată, dintre care numai 18 sunt neechivalente între ele. Vom menționa că din subgrupurile $H'=m,2$ sau $\tilde{2}$ de indicele 4 ale grupului $4:m$ numai pentru $H'=2$ pot fi construite aplicații cvasiomomorfe de dreapta ψ cu nucleul $Ker\varphi=H$, unde $H=4,\tilde{4}$ sau $2:m$. Deci, din grupul $4:m$ se obțin în total 12 grupuri diferite, dintre care numai 6 sunt neechivalente. În ce privește grupul $m\cdot 2:m$, apoi pentru toate subgrupurile $H=2:m, 2\cdot m, 2:2$ de indicele 2 și pentru toate subgrupurile $H'=2,m,\tilde{2}$ de indicele 4 se pot construi aplicații cvasiomomorfe de dreapta ψ ale grupului generator $m\cdot 2:m$ pe fiecare din submulțimile $P^{/}$ menționate mai sus. Deci, grupul $m\cdot 2:m$ generează 36 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite de $\overline{6}-$simetrie nedegenerată, dintre care numai 12 sunt neechivalente.

Grupurile $6\cdot m,\ 6:2, \tilde{6}\cdot m,\ m\cdot 3:m, 6:m$ de ordinul 12 generează în total 60 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite, dintre care numai 26 sunt neechivalente între ele. În cazurile grupurilor $m\cdot 4:m$ și $m\cdot 6:m$, a căror structură este mai complexă, cercetarea este mai anevoioasă. Grupul $m\cdot 4:m$ generează 52 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite, dintre care numai 20 sunt neechivalente. În cazul grupului $m\cdot 6:m$ se obțin 56 grupuri $P^{/}$–pseudominore diferite, dintre care numai 16 sunt neechivalente.

3) $P''=(e,p^2,p^4)$ (este valabil pentru 3 submulțimi $P^{/}$ cu 4 elemente). Amintim că H trebuie să fie un subgrup de indicele 2, iar H' – de indicele 4 în grupul generator G. Mai mult, $H''=H\cap H'$ trebuie să verifice condiția $H/H''\cong P''$, adică H'' trebuie să fie subgrup invariant de indicele 3 în H.

Prin urmare, ordinul grupului generator G trebuie să fie divizibil prin 12. Dintre cele 31 grupuri de tablete numai grupurile $6\cdot m, 6:2, \tilde{6}\cdot m,\ m\cdot 3:m, 6:m$ şi $m\cdot 6:m$ verifică această condiție. O cercetare detaliată a acestor grupuri ne convinge că ele nu generează grupuri $P^{/}$–pseudominore ce verifică condiția $P" = (e, p^2, p^4) \subset P'$.

Totalizând rezultatele acestui compartiment, vom sublinia că din grupurile cristalografice de tablete se obțin în total 532 grupuri pseudominore diferite de $\overline{6}$ –simetrie nedegenerată, dintre care numai 352 sunt grupuri neechivalente între ele.

Bibliografie:

1. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н., КУЖУКЕЕВ, Ж.-Н.М. Беловские цветные группы и классификация магнитных структур. În: *Сообщения ОИЯИ. Р4-7513*. Дубна, 1973. 13 с.
2. ЛУНГУ, А.П. *К теории* $\overline{P}$ *– симметрии* / Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп. 16 с.
3. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ЛУНГУ, А.П. К теории групп Р-симметрии и её развитию. În: *Труды Международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике"* (Звенигород, 20-30 ноября 1979 г.) Москва: Наука 1980, т.1, с.90-97.
4. ЛУНГУ, А.П. К выводу групп Q-симметрии ($\overline{P}$ -симметрии). În: *Кристаллография*, 1980, т.25, вып.5, с.1051-1053.
5. ЛУНГУ, А.П. *Универсальная методика вывода групп* $\overline{P}$ *-симметрии (Q-симметрии)* / Рукопись деп. в МолдНИИНТИ 28 июля 1983 г., №308М-Д83. 14 с.
6. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Р-симметрия и ее дальнейшее развитие.* Кишинев: Штиинца, 1986. 156 с.
7. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии). În: *Кристаллография*, 1967, т.12, вып.5, с.819-825.
8. LUNGU, A., BRANIŞTE, M. Structura automorfismelor grupurilor cristalografice de categoria G_{30}. În: *Studia Universitatis*. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice". Chişinău: CEP USM, 2007, nr.8, p.5-11. ISSN 1857-2073
9. ZAMORZAEV, A., PALISTRANT, A., LUNGU, A. *Teoria grupurilor discrete de simetrie. Partea II:* Ciclu de prelegeri speciale. Chişinău, 1992. 100 p.
10. LUNGU, A., ROŞCA, M. Generalizarea grupurilor cristalografice de categoria G_{320} cu $\overline{3}$ – simetrie. În: *Studia Universitatis*. Revistă ştiinţifică. Seria „Ştiinţe exacte şi economice". Chişinău: CEP USM, 2013, nr.2(62), p.3-9.

***Notă:** Lucrarea a fost elaborată în cadrul Proiectelor 11.817.08.41F şi 12.839.08.07F.*

Prezentat la 06.05.2014