STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.60-72

ASUPRA SIMBOLULUI PE ALGEBRE GENERATE DE OPERATORI INTEGRALI SINGULARI

Vasile NEAGU

Universitatea de Stat din Moldova

În prezenta lucrare este definit simbolul pe algebrele generate de operatorii integrali singulari cu conjugare complexă şi cu translaţii de tip Carleman. Pentru operatorii din aceste algebre condiţiile noetheriene şi formulele de calcul ale indicelui sunt formulate în termenii simbolului. Se demonstrează că condiţiile noetheriene depind de coeficienţii operatorului şi de spaţiu. Cazul conturului cu puncte unghiulare şi nemărginit va fi studiat în alte publicaţii ale autorului.
Cuvinte-cheie: *operator integral singular, operator noetherian, algebre Banach, simbol.*

ON THE SYMBOL OF ALGEBRAS GENERATED BY SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

In the work it is defined the symbol on algebras generated by singular integral operators with complex conjugation and with of Carleman typ. Noetherian condition and computing formulae of the index for operators of this algebras are formulated in terms of the symbol.
Keywords: *singular integral operator, noetherian operators, Banach algebra, symbol.*

Aproximativ 70 de ani în urmă matematicianul S.Mihlin, rezolvând problema privind regularizarea operatorilor integrali singulari bidimensionali [14], a stabilit o relaţie dintre orice operator de acest tip şi o anumită funcţie (numită de el *simbol*) şi a demonstrat că regularizarea operatorului este posibilă dacă şi numai dacă infimumul modulului acestei funcţii este diferit de zero. Mai târziu, noţiunea de simbol a fost generalizată pentru operatorii integrali singulari de orice dimensiune, iar sinteza operatorilor singulari şi diferenţiali a condus la teoria operatorilor pseudodiferenţiali, care, firesc, sunt caracterizaţi de propriile lor simboluri.

Teoria lui Ghelfand despre idealele maximale ale algebrelor comutative Banach a avut un rol deosebit în construirea simbolurilor pentru multe clase de operatori. Cu ajutorul acestei teorii au fost stabilite criterii noetheriene pentru operatorii integrali singulari cu coeficienţi continui [9]; operatorii Winer-Hopf [10]; operatorii integrali singulari multidimensionali [11]. Studiul sistemelor de ecuaţii, care conţin operatorii menţionaţi mai sus, a condus la noţiunea de simbol matriceal [2,6,12,15] cu o mare importanţă nu doar pentru sistemele de ecuaţii, ci şi pentru operatorii integrali singulari (scalari) cu coeficienţi continui pe porţiuni [3]. Totodată, încercările de a defini un simbol pentru anumite algebre nu au dat rezultate. Aceasta se referă la algebrele care conţin operatorii Winer-Hopf multidimensionali, operatorii integrali singulari cu coeficienţi cu discontinuităţi aproape periodice, operatorii cu translaţii care nu verifică condiţiile lui Carleman ş.a. A apărut ipoteza că, în general, pe aceste algebre simbolul nu poate fi definit.

I. Sisteme suficiente de funcţionale multiplicative

Fie A o algebră Banach (nu neapărat comutativă) cu unitatea e şi GA grupul elementelor inversabile din algebra A. Intersecţia tuturor idealelor maximale la stânga se numeşte radicalul algebrei A şi coincide cu intersecţia tuturor idealelor maximale la dreapta. Radicalul R este un ideal bilateral şi inchis. Un element x aparţine radicalului R dacă şi numai dacă elemental $e+ux$ $(e+xu)$ este inversabil pentru orice u din A.

Notăm prin $\widetilde{A}=A/R$ algebra cât în raport cu radicalul R. Fie $\widetilde{x}$ elementul algebrei cât $\widetilde{A}$, care conţine elementul x. Sunt bine cunoscute următoarele proprietăţi ale algebrelor Banach.

Fie A o algebră Banah comutativă, M mulţimea tuturor idealelor maximale ale ei şi f_M $(M\in \mathrm{M})$ funcţionala multiplicativă pe A care corespunde idealului $M\in\mathrm{M}$ $(\ker f_M(x)=M)$. În acest caz, $x\in GA \Leftrightarrow f_M(x)\neq 0\ \forall M\in\mathrm{M}$.

Dacă complementara spectrului elementului $x\in A$ este o mulţime conexă, atunci la trecerea la orice subalgebră spectrul elementului x nu se schimbă.

Lema 1.1. *Dacă $x\in \mathrm{A}$ $x\in A$, atunci $x\in G\mathrm{A}\Leftrightarrow \widetilde{\mathrm{x}}\in G\ddot{\mathrm{A}}$.*

Demonstraţie. Fie $\widetilde{\mathrm{x}}\in G\ddot{\mathrm{A}}$, atunci există un element $z\in A$ astfel încât $xz=e+u_1$ *şi* $zx=e+u_2$ $(u_k\in \mathrm{R})$. Aşa cum $e+u_k\in GA$, rezultă că $x\in G\mathrm{A}$. Afirmaţia inversă este evidentă.

Definiţia 1.1. *Fie A o algebră (comutativă sau necomutativă). Un set de funcţionale multiplicative $\{f_M\}_{M\in\alpha}$ se numeşte suficient dacă el posedă proprietatea*

$$\textit{orice element } x \textit{ este inversabil } \Leftrightarrow f_M(x)\neq 0,\ \forall M\in\alpha .$$

Conform teoremei lui I.Ghelfand, orice algebră comutativă posedă un set suficient de funcţionale multiplicative. Mulţimea funcţionalelor de forma $\{f_M\}$, unde M parcurge mulţimea idealelor maximale ale algebrei A, formează un set suficient de funcţionale.

Teorema 1.1. *Elementul x este inversabil dacă şi numai dacă $f_M(x)\neq 0$ pentru orice f_M.*

Cu ajutorul acestei teoreme se demonstrează cu uşurinţă ca în cazul în care o funcţie φ se dezvoltă în serie Fourier, $\varphi(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k t^k$, absolut convergentă pe cercul unitate şi $\varphi(t)\neq 0, \forall t: |t|=1$, atunci funcţia $\psi(t)=\dfrac{1}{\varphi(t)}$ de asemenea se dezvoltă în serie Fourier absolut convergentă.

Menţionăm însă că există şi algebre necomutative care posedă un set suficient de funcţionale multiplicative. Vom considera un exemplu de astfel de algebră. Fie A algebra necomutativă formată din mulţimea matricelor numerice triunghiulare

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\right\}\quad (a_{jk}\in\mathbb{C}).$$

Funcţionalele $f_1(a)=a_{11}$ şi $f_2(a)=a_{22}$ formează un sistem suficient de funcţionale multiplicative. Este important să menţionăm că în acest exemplu radicalul algebrei A este format din elementele

$$R(A)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

şi algebra cât $\tilde{A}=A/R$ este comutativă. Profesorul N.Krupnik [4] a demonstrat că această proprietate reprezintă o caracteristică a algebrei care posedă sisteme suficiente de funcţionale multiplicative, adică *o algebră A posedă un set suficient de funcţionale multiplicative dacă şi numai dacă algebra cât $\tilde{A}=A/R$, în raport cu radicalul ei R, este comutativă.*

De aici rezultă

Consecinţa 1.1. *Fie A o algebră necomutativă şi radicalul ei, R, este egal cu zero, atunci pe A nu există un set suficient de funcţionale multiplicative.*

Din această afirmaţie deducem că o algebră A semisimplă ($R(A)=\{0\}$) posedă un set suficient de funcţionale multiplicative dacă şi numai dacă A este comutativă, iar de aici obţinem rezultate care au o însemnătate atât practică, cât şi teoretică. În acest context considerăm câteva exemple.

Exemplul 1. *Fie E un spaţiu Banach şi $L(E)$ înseamnă mulţimea tuturor operatorilor liniari şi mărginiţi care acţionează în spaţiul E; dacă $\dim E>1$, atunci pe $L(E)$ nu există un set suficient de funcţionale multiplicative.*

Într-adevăr, deoarece $\dim E>1$, rezultă că algebra $L(E)$ nu este comutativă. Vom demonstra că radicalul algebrei $L(E)$ este 0, ($R(A)=\{0\}$), şi vom aplica consecinţa de mai sus. Fie $A\in L(E)$, $A\neq 0$, şi arătăm că $A\notin R(E)$. Aşa cum $A\neq 0$, există un element $x_0\in E$, astfel încât $Ax_0=y_0\neq 0$. Punem $Bx=f(x)x_0$, unde $f\in E^{\bullet}$ şi $f(y_0)=1$. Atunci $(I-BA)x_0=0$ şi, prin urmare, operatorul $I-BA$ nu este inversabil, ceea ce demonstrează că $A\notin R(E)$.

Exemplul 2. Fie $A\in L(E)$ pentru care există $m\in N$, încât $A^{m+1}=0$. Notăm prin $A=\{\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_m A^m\}\subset L(E))$, unde $\alpha_j\in\mathbb{C}$. În acest exemplu $R(A)=\{\alpha_1 A+\ldots+\alpha_m A^m\}$, $\tilde{A}=A/R$ este o algebră comutativă şi, prin urmare, A posedă un sistem suficient de funcţionale multiplicative. Acest sistem constă dintr-o singură funcţională f, $f(\alpha_0 I+\ldots+\alpha_m A^m)=\alpha_0$. Un operator $B=\alpha_0 I+\ldots\alpha_n A^n$ este inversabil în A dacă şi numai dacă $\alpha_0\neq 0$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.60-72

Menţionăm că în acest exemplu operatorul B este inversabil în A dacă şi numai dacă el este inversabil în $L(E)$.

Exemplul 3. Fie $B = L_2(a,b)$ şi A este subalgebra algebrei $L(B)$ generată de operatorul integral singular

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \qquad (t \in [a,b]).$$

Se demonstrează că $S^* = S$, A este o subalgebră C^* a algebrei $L(B)$ şi, în particular, este simetrică. Spectrul operatorului S în algebra A coincide cu spectrul său în algebra $L(B)$, adică cu segmentul $[-1,1]$.

Orice funcţională multiplicativă este determinată de un punct $\tau \in [-1,1]$:

$$f_\tau\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k S^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k .$$

În particular, operatorul $A = \alpha I + \beta S$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ este inversabil în A dacă şi numai dacă $\alpha + \beta\tau \neq 0, \forall \tau \in [-1,1]$.

Considerăm operatorul B, definit prin relaţia

$$(B\varphi)(t) = \alpha\varphi(t) + \frac{\beta}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{\gamma}{(\pi i)^2}\int_a^b \ln\frac{(b-t)(\tau-a)}{(t-a)(b-\tau)}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}.$$

Operatorul B aparţine algebrei A. Într-adevăr, utilizând formulele lui Poincaré - Bertrand, uşor deducem că $B = \alpha I + \beta S + \gamma(S^2 - I)$. De aici rezultă

Teorema 1.2. *Operatorul B este inversabil în $L_2(a,b)$ dacă şi numai dacă $\gamma\tau^2 + \beta\tau + (\alpha - \gamma) \neq 0$ pentru orice $\tau \in [0,1]$.*

Exemplul 4. Notăm cu $A_{p\beta}$ subalgebra minimală cu unitate a algebrei $L(L_p(R^+, x^\beta))$ $(R^+ = (0,+\infty)$, $-1 < \beta < p-1, 1 < p < \infty)$ ce conţine operatorul

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y - x}dy,\ x \in (0,+\infty).$$

Fie δ un număr din intervalul $\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$. Notăm cu $l(\delta)$ arcul de cerc care uneşte punctele - 1 şi 1 cu proprietăţile: din punctele $z \neq \pm 1$ ale arcului $l(\delta)$ segmentul [-1,1] se vede sub unghiul $2\pi\delta$; la parcurgerea acestui arc de la punctul -1 spre 1 acest segment rămâne la stânga observatorului. Pentru numerele δ din intervalul $(\tfrac{1}{2},1)$ punem $l(\delta) = l(1-\delta)$, iar prin $l\left(\tfrac{1}{2}\right)$ notăm segmentul [-1,1]. Spectrul operatorului S în spaţiul $L_p(R^+, x^\beta)$ coincide (a se vedea [1,7,11]) cu arcul $l((1+\beta)/p)$. Aşa cum algebra $A_{p\beta}$ este generată de un singur operator S, atunci are loc următoarea teoremă.

Teorema 1.3. *Mulţimea idealelor maximale ale algebrei $A_{p\beta}$ este omeomorfă cu arcul $l = l((1+\beta)/p)$. Dacă M_z este un ideal maximal care corespunde punctului $z\,(\in l)$, atunci transformarea Ghelfand se scrie sub forma $S(M_z) = z$.*

Această teoremă poate fi desfăşurată şi completată (a se vedea [8]).

Teorema 1.4. *Algebra $A_{p\beta}$ este o algebră cu involuţie simetrică, $A \to \overline{A}$. În particular*

$$\overline{\mathrm{S}} = (\cos(2\pi\gamma)\mathrm{S} - i\sin(2\pi\gamma)\mathrm{I})(\cos(2\pi\gamma)\mathrm{I} - i\sin(2\pi\gamma)\mathrm{S})^{-1},\ (\gamma = (1+\beta)/p). \tag{1.1}$$

Dacă $p = 2$, atunci pentru transformata lui Ghelfand $A(z) = A(M_z)$, $z \in l((1+\beta)/p)$, avem

$$\|A\| = \max_{z\in l(\gamma)}|A(z)|, \tag{1.2}$$

iar pentru $p \neq 2$ sunt adevărate estimările

$$\max_{z\in l(\gamma)}|A(z)| \leq \|A\| \leq c\max\left(\max_{z\in l(\gamma)}|A(z)|, \max_{z\in l(\gamma)}\left|(1-z^2)\ln\frac{1-z}{1+z}\frac{dA(z)}{dz}\right|\right), \tag{1.3}$$

unde c *este o constantă care depinde doar de* p *şi* β.

Evaluările din partea dreaptă a inegalităţilor (1.3) au sens în cazul în care există derivata $\frac{dA(z)}{dz}$.

Demonstraţie. Operatorul B, definit de relaţia $(B\varphi)(t)=\varphi(e^t)e^{\gamma t}$, aplică în mod izometric spaţiul $L_p(R^+,x^\beta)$ pe spaţiul $L_p(R)$. Se verificîă uşor că operatorul $\widetilde{S}=BSB^{-1}$ are forma

$$(\widetilde{S}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\gamma(t-s)}(1-e^{t-s})\varphi(s)ds.$$

Astfel, algebra $A_{p\beta}$ generată de un singur operator S este izometrică cu o subalgebră a algebrei de convoluţii. Fie $\pi i\hat{S}(\xi)$ transformata lui Fourier a funcţiei $e^{\gamma t}(1-e^t)^{-1}$. Calculele directe ne demonstrează că

$$\hat{S}(\xi)=1+2(exp(2\pi(\xi+i\gamma))^{-1})^{-1}\quad(-\infty<\xi<\infty).$$

Mulţimea valorilor funcţiei $\hat{S}(\xi)$ parcurge arcul $l(\gamma)$. Notăm $z=\hat{S}(\xi)$, atunci pentru operatorii $A\in A_{p\beta}$ are loc egalitatea $A(z)=(FBAB^{-1}F^{-1})(\xi)$, unde F este transformata lui Fourier. De aici se obţine egalitatea (1.2) pentru $p=2$. Pentreu $p\neq 2$ majorarea inferioară a normei operatorului se obţine din teorema precedentă. Evaluarea superioară se obţine cu ajutorul teoremei lui S.Mihlin despre multiplicatori (*a se vedea* [15]) în care este stabilit că

$$\left|BAB^{-1}\right|\leq c_p\cdot max(\max_{\xi\in R}A\left|(\hat{S}(\xi))\right|,\max_{\xi\in R}\left|\xi\frac{dA(\hat{S}(\xi))}{d\xi}\right|).$$

Aici c_p depinde doar de p. Egalitatea $\overline{S}(z)=\overline{S(z)}$ se verifică fără dificultăţi. Teorema este demonstrată.

Observaţie. *Scriem funcţionalele definite pe spaţiul* $L_2(R^+,x^\beta)$ *sub forma*

$$f(\varphi)=\int_0^\infty\varphi(t)\overline{f(t)}t^\beta dt,$$

atunci $S^*=t^{-\beta}St^\beta$. *Prin calcule directe obţinem că* $FBS^*B^{-1}F^{-1}=FB\overline{S}B^{-1}F^{-1}$ *şi, prin urmare, pentru* $p=2$ *are loc egalitatea* $\overline{S}=S^*$.

Consecinţa 1.2. *Fie* f *o funcţie diferenţiabilă în orice punct* $z\in l(\nu)\setminus\{-1,1\}$. *Dacă există un şir de polinoame* p_n, *astfel încât*

$$\max_{z\in l(\gamma)}\left|p_n(z)-f(z)\right|\to 0;\ \max_{z\in l(\gamma)}\left|(1-z^2)ln\frac{1-z}{1+z}(p_n'(z)-f'(z))\right|\to 0\ pentru\ n\to\infty,$$

atunci $f(S)\in A_{p\beta}$.

Un rezultat mai general se conţine în următoarea consecinţă.

Consecinţa 1.3. *Fie* $A_0\in A_{p\beta}$ *şi* $\varphi(z)$ *transfomata Ghelfand a operatorului* A_0 *şi* h *o funcţie diferenţiabilă în orice punct* $z\in l(\nu)\setminus\{-1,1\}$. *Dacă există un şir de polinoame* p_n, *astfel încât*

$$\max_{z\in l(\gamma)}\left|p_n(\varphi(z))-h(z)\right|\to 0;\ \max_{z\in l(\gamma)}\left|(1-z^2)ln\frac{1-z}{1+z}\frac{d}{dz}(p_n(\varphi(z))-h(z))\right|\to 0\ pentru\ n\to\infty,$$

atunci $h(A_0)\in A_{p\beta}$.

Astfel, am demonstrat că algebra $A_{p\beta}$ posedă un sistem de funcţionale multiplicative, $f_z(A)=A(z)$, simetric. Din faptul că algebra $A_{p\beta}$ este şi comutativă rezultă implicaţia

$$A \in GL(L_p(R^+, x^\beta)) \Leftrightarrow A \in G\mathrm{A}_{p\beta} \Leftrightarrow f_z(A) \neq 0,\ \forall z \in l(\gamma).$$

Teorema 1.5. *Fie* $\omega = exp(\gamma i\alpha)$, *unde* α *este un număr complex. Dacă* $-1 < Re\alpha < 1$, *atunci operatorul* N_ω *definit de egalitatea*

$$(N_\omega\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{t-x}dy, x \in R^+,$$

se conţine în algebra $\mathrm{A}_{p\beta}$ *şi* $f_z(N_\omega) = (z-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}(z+1)^{\frac{1-\alpha}{2}}$, $z \in l(\gamma)$. *Ramura acestei funcţii se alege astfel încât în punctul* $z = -ictg(\pi\gamma)$ *să capete valoarea* $-i\,exp(-\pi i\gamma\alpha)/\sin(\pi\gamma)$.

Demonstraţie. Egalitatea $\pi iBN_\omega B^{-1} = (e^{\gamma t}(1+\omega e^t)^{-1})\cdot\varphi$ se verifică nemijlocit. De aici rezultă

$$f(N_\omega) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(\gamma - i\xi)t}}{1+\omega e^t}dt = \frac{-i\omega^{i\xi-\gamma}}{\sin((\gamma - i\xi)\pi)} = (z-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}(z+1)^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Vom arăta că funcţia $h(z) = f_z(N_\omega)$ verifică condiţiile consecinţei de mai sus. Pentru început, fie $\left|\gamma - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$, atunci $|z| \leq 1$. În acest caz, pentru orice $\delta\,(\mathrm{Re}\delta > 0)$ funcţia $(z \pm 1)^\delta$ verifică condiţiile consecinţei 1.2 (în calitate de polinoame p_n pot fi luate sumele parţiale ale seriei Taylor). Dacă $\left|\gamma - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}$, atunci funcţia $f_z(N_\omega) = z(1 - z^{-1})^{\frac{1+\alpha}{2}}(1 + z^{-1})^{\frac{1-\alpha}{2}}$ verifică condiţiile consecinţei 1.3. Rolul operatorului A_0 din consecinţa 1.3 îl joacă operatorul S, care este inversabil în virtutea condiţiei $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Teorema este demonstrată.

II. Algebre cu simbol. Simbolul pe algebre de operatori integrali singulari

Definiţia 2.1. *(a se vedea [4]). Vom spune că o algebră* A *de operatori este algebră cu simbol (semisimbol), dacă există un sistem de funcţionale multiplicative* $\{\gamma_M\}$ $(M \in \tau)$, *astfel încât pentru orice operator* $A \in \mathrm{A}$ *are loc implicaţia*

$$A \text{ este de tip Noether} \Leftrightarrow \gamma_M(A) \neq 0\ \forall M \in \tau,$$
$$(\{\gamma_M\}(A) \neq 0\ \ \forall M \in \tau \Rightarrow A \text{ este de tip Noether}).$$

Exemplu. Fie $\Gamma_0 = \{z \in C : |z| = 1\}$ cercul unitate, $B = L_p(\Gamma_0)$ şi $C_+(\Gamma_0)$ mulţimea funcţiilor analitice în $F^+ = \{z \in C : |z| < 1\}$ şi continue pe $\overline{F}^+$. Notăm prin A subalgebra algebrei $L(B)$ ce constă din mulţimea operatorilor

$$A = \{(A\varphi)(t) = h(t)\varphi(t) + (T\varphi)(t) : h(t) \in C_+(\Gamma_0), T \in T\},$$

unde T este mulţimea operatorilor compacţi care acţionează în spaţiul B.

Spaţiul idealelor maximale ale algebrei $\hat{A}$ este omeomorf cu discul închis $\overline{F}^+$. Mulţimea funcţionalelor multiplicative de forma $f_z(A+T) = h(z)$, $z \in \overline{F}^+$ formează un set suficient. Însă, semisimbolul $\gamma_z(A+T) = h(z)$ nu formează un simbol. De exemplu, operatorul $(A_0\varphi)(t) = t\varphi(t)$ este noetherian în $L_2(\Gamma_0)$, însă $\gamma_{z_{00}}(A_0) = 0$, $z_0 = 0$. În acest exemplu semisimbolul (γ_z), $z \in \overline{F}^+$, conţine *„prea multe"* funcţionale, din care se poate extrage, (γ_z), $z \in \Gamma_0$ care deja formează un simbol:

$$(A+T) \text{ este noetherian dacă şi numai dacă } h(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma_0.$$

Mai menţionăm că în acest exemplu spectrul elementului A_0 se schimbă la trecerea de la algebra $L(B)$ la subalgebra A.

De regulă, se presupune că mulţimea T de operatori compacţi se conţine în algebra A şi în acest caz condiţia ca operatorul A să fie noetherian este echivalentă cu condiţia ca operatorul $\hat{A}$ să fie inversabil în algebra cât A/T şi, prin urmare, definiţia de mai sus este echivalentă cu următoarea definiţie.

Definiţia 2.2. *Vom spune că A este o algebră cu simbol (cu semismbol), dacă există un set de funcţionale multiplicative $\{\gamma_M\}$ $(M \in \tau)$, astfel încât pentru orice operator A are loc implicaţia*

$$\hat{A} \text{ este inversabil} \Leftrightarrow \gamma_M(A) \neq 0 \ \forall M \in \tau,$$

$$(\{\gamma_M\} \ \gamma_M(A) \neq 0 \ \forall M \in \tau \Rightarrow \hat{A} \text{ este inversabil}).$$

Astfel, cunoaşterea sau determinarea simbolului reprezintă un rezultat de o mare importanţă, dat fiind faptul că problema inversabilităţii operatorilor din algebra respectivă A/T se reduce la studiul unor funcţii în sensul stabilirii dacă se anulează sau nu se anulează aceste funcţii. Dacă aceste funcţii nu se anulează, operatorul $\hat{A}$ este inversabil; în caz contrar, el nu este inversabil.

Aşa cum am menţionat, în cazul algebrelor comutative problema construirii simbolului este rezolvată de teorema lui Ghelfand, cu ajutorul căreia în anul 1952 I.Gohberg [9] a demonstrat că operatorul integral singular

$$A\varphi = a(t)(P\varphi)(t) + b(t)(Q\varphi)(t), \quad \text{unde} \tag{2.1}$$

$$P\varphi = \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad Q\varphi = \frac{\varphi(t)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

cu coeficienţii a şi b funcţii continue pe conturul închis Γ, este noetherian în spaţiul $L_p(\Gamma)$ dacă şi numai dacă sunt verificate condiţiile $a(t) \neq 0$ şi $b(t) \neq 0$; în plus, a fost determinat şi regularizatorul operatorului A .

În acest caz, simbolul operatorului A se defineşte în felul următor:

$$f_1(A) = a \ , \ f_2(A) = b.$$

Indicele operatorului A se exprimă prin indicele simbolului său. Dacă în loc de funcţiile a şi b se consideră matrice de funcţii continue, atunci simbolul se determină în mod similar, iar condiţia $f(A) \neq 0$ se înlocuieşte cu $\det a(t) \cdot \det b(t) \neq 0 \cdot$

Vom analiza cazul în care coeficienţii operatorului A (2.1) pot avea puncte de discontinuitate de speţa întâi. Vom arăta că nu există un simbol scalar pe algebra $A_{p\rho}$ generată de operatorii de forma (2.1). Începem cu următoarea observaţie. Dacă f este un simbol scalar pe o algebră de operatori A, atunci elementele de forma AB-BA $(A,B \in A)$ sunt perturbări admisibile pentru orice operator C. Într-adevăr, avem $f(C + AB - BA) = f(C) + f(A)f(B) - f(B)f(A) = f(C)$ şi de aici rezultă că operatorul C este noetherian dacă şi numai dacă $C + AB - BA$ este noetherian. Dacă admitem că pe algebra $A_{p\rho}$ se poate defini un simbol scalar, atunci, conform observaţiei, operatorul $A = \lambda I + aS - SaI$, $\lambda \in \mathbb{C}$ trebuie să fie noetherian pentru orice $\lambda \neq 0$ şi orice funcţie discontinuă $a(t)$. Aceasta este echivalent cu faptul că operatorul

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} I & aI \\ S & \lambda I + aS \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & a \\ 1 & \lambda + a \end{Vmatrix} P + \begin{Vmatrix} 1 & a \\ -1 & \lambda - a \end{Vmatrix} Q$$

este noetherian pentru orice $\lambda \neq 0$. Operatorul $\tilde{A}$ este un operator integral singular caracteristic cu coeficienţi matriceali. În acest caz, din lucrarea lui I.Gohberg şi N.Krupnik [3] se deduce că matricea

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & a \\ -1 & \lambda - a \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & a \\ 1 & \lambda + a \end{Vmatrix}$$

trebuie să fie p nesingulară pentru orice $\lambda \neq 0$. Fie $t_0 \in \Gamma$ un punct de discontinuitate al funcţiei a. Aşa cum

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" *ISSN 1857-2073* *ISSN online 2345-1033* *p.60-72*

$$C = \lambda^{-1}\begin{Vmatrix} \lambda - 2a & -2a^2 \\ 2 & 2a + \lambda \end{Vmatrix},$$

rezultă că $\det c_p(t_0,\mu) = \lambda^{-2} f(t_0,\mu)(1 - f(t_0,\mu)(a(t_0+0) - a(t_0-0))^2 + 1 = 0$ pentru $\lambda = \left(a(t_0+0) - a(t_0-0)\right)\sqrt{f(t_0,\mu)(f(t_0,\mu)-1)} \not\equiv 0$. Am obţinut o contrazicere. Aşadar, din cele expuse mai sus deducem că pe algebra $\mathsf{A}_{p\rho}$ nu se poate defini un simbol scalar. Vom defini simbolul matriceal pe algebra $\mathsf{A}_{p\rho}$. Considerăm mulţimea liniară L formată din operatorii de forma $A = AP + bQ$ $\left(a,b \in CP(\Gamma)\right)$.
În [3] este arătat că operatorul $A \in L$ este noetherian atunci şi numai atunci, când

$$a(t+0)b(t-0)f(t,\mu) + a(t-0)b(t+0)(1 - f(t,\mu)) \neq 0 \quad ((t,\mu) \in \Gamma \times [0,1]).$$ unde

$$f(t,\mu) = \begin{cases} \sin(\omega\mu)\sin^{-1}(\omega)\exp(i\omega(\mu-1)) & pentru\ \ \delta(t) \neq \pi; \\ \mu & pentru\ \ \delta(t) = \pi, \end{cases} \qquad (2.2)$$

iar $\delta(t)$ şi $\omega(t)$ sunt funcţii care depind de $p \in (1,\infty)$ şi de ponderea $\rho(t)$.

Transcriem condiţiile obţinute sub forma $\varphi(t,\mu) \neq 0$. Aplicaţia $ap + bQ \to \varphi(t_0,\mu_0)$ nu este liniară pe L, însă expresia analitică a lui, $\varphi(t,\mu) = a(t+0)b(t-0)f(t,\mu) + a(t-0)b(t+0)(1 - f(t,\mu))$, sugerează ideea că această funcţie poate fi exprimată sub forma

$$\varphi(t,\mu) = \det\left\| \alpha_{jk}(\mu)a(t+0) + \beta_{jk}(\mu)a(t-0) \right\|_{j,k=1}^{2},$$

cu condiţia că funcţiile $\alpha_{jk}(\mu)$ şi $\beta_{jk}(\mu)$ sunt alese în mod rezonabil. Matricea din partea dreaptă a relaţiei pentru $\varphi(t,\mu)$ poate fi obţinută exprimând operatorul $A = aP + bQ$ sub forma de matrice corespunzătoare reprezentării spaţiului L_p în sumă directă $L_p = PL_p + QL_p$ *(reamintim că în cazul în care conturul* Γ *este închis, operatorii P şi Q sunt proiectori complementari).* În suma directă operatorul *A* se transcrie

$$A = \begin{Vmatrix} PaP & PbQ \\ QaP & QbQ \end{Vmatrix}.$$

În particular, operatorului $PaP + Q$ trebuie să-i corespundă matricea $diag\,(\alpha_{11}(\mu)a(t+0) + \beta_{11}(\mu)a(t-0)$. Având în vedere condiţiile lui Noether pentru operatorul $PaP + Q$, este firesc să punem $\alpha_{11}(\mu)a(t+0) + \beta_{11}(\mu)a(t-0) = f(t,\mu)a(t+0) + (1 - f(t,\mu))a(t-0)$. În mod similar, repetând raţionamentele de mai sus pentru operatorul $P + QbQ$, obţinem

$$\alpha_{22}(\mu)a(t+0) + \beta_{22}(\mu)a(t-0) = (1 - f(t,\mu))b(t+0) + f(t,\mu)b(t-0).$$

Folosind şi condiţia ca operatorului adjunct să-i corespundă matricea conjugată, în final obţinem aplicaţia

$$aP + bQ \xrightarrow{\gamma}$$

$$\begin{Vmatrix} a(t+0)f(t,\mu) + a(t-0)(1 - f(t,\mu)) & \sqrt{f(t,\mu)(1 - f(t,\mu))}(b(t+0) - b(t-0)) \\ \sqrt{f(t,\mu)(1 - f(t,\mu))}(a(t+0) - a(t-0)) & b(t+0)(1 - f(t,\mu)) + b(t-0)f(t,\mu) \end{Vmatrix}$$

Aplicaţia $\gamma\,(=\gamma_{t,\mu})$ este liniara pe L şi răspunde de proprietatea ca operatorul $aP + bQ$ să fie noetherian în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Mulţimea valorilor funcţiei $2f(t,\mu) - 1$ coincide cu valorile funcţiei

$$z = \frac{e^{2\pi(\xi + i\gamma(t))} + 1}{e^{2\pi(\xi + i\gamma(t))} - 1} \quad (-\infty \le \xi \le \infty),$$

în care $\gamma(t_k)=\dfrac{1+\beta_k}{p}$ $(k=1,...n)$ şi $\gamma(t)=1/p$ pentru $t\in\Gamma\setminus\{t_1,...,t_n\}$. Menţionăm că simbolul $A=aP+bQ$ depinde de coeficienţii *a* şi *b*, de spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$, însă nu şi de conturul Γ.

Teorema 2.1. *Operatorul* $A=aP+bQ$ *este noetherian dacă şi numai dacă* $DetA(t,\mu)\neq 0$ *pentru orice* $t\in\Gamma$ *şi* $\forall\mu\in[0,1]$. *Dacă aceste condiţii sunt verificate, atunci*

$$IndA=\frac{1}{2\pi}\{arg\,DetA(t,\mu)\}_{(t,\mu)\in(\Gamma\times[0,1]}.$$

III. Simbolul operatorilor integrali singulari cu conjugare complexă. Problema generalizată la frontieră Riemann

Fie Γ un contur închis, orientat, Leapunov pe porţiuni care împarte planul complex în domeniile F^+ şi F^- $(\infty\in F^+)$. Notăm prin $t_1,...,t_n$ toate punctele unghiulare ale conturului Γ cu unghiurile θ_k. În spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$, unde $\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ $(-1<\beta_k<p-1)$, considerăm operatorul

$$(A\varphi)(t)=a_1(t)\varphi(t)+a_2(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+a_3(t)\overline{\varphi}(t)+a_4(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\varphi}(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

în care funcţiile $a_j(t)$ $(j=1,2,3,4)$ sunt continue în orice punct $t\in\Gamma$, cu excepţia punctelor t_k $(k=1,...,n)$, în care există limitele finite $a_j(t_k\pm 0)$. În cele ce urmează este comod ca operatorul A să fie scris sub o altă formă. În acest scop, facem următoarele notaţii:

$$a_1(t)+a_2(t)=a(t),\ a_1(t)-a_2(t)=b(t),\ a_3(t)+a_4(t)=c(t),\ a_3(t)-a_4(t)=d(t),\ (V\varphi)(t)=\overline{\varphi}(t),$$

$$P=\frac{(I+S)}{2},\ P=(I+S)/2,\ Q=I-P,$$

unde $S=S_\Gamma$. Cu aceste notaţii operatorul A se scrie sub forma

$$A=aP+bQ+(cP+dQ)V\ . \tag{3.1}$$

Definim simbolul operatorilor aI, P, Q şi V. Notăm, respectiv, prin $a(t,\xi)$, $P(t,\xi)$, $Q(t,\xi)$ şi $V(t,\xi)$ $(t\in\Gamma,\ -\infty\le\xi\le\infty)$ simbolurile acestor operatori. Punem

$$a(t,\xi)=\begin{cases}\begin{Vmatrix}a(t) & 0\\ 0 & \overline{a}(t)\end{Vmatrix}, & \text{pentru } t\in\Gamma\setminus\{t_1,t_2,...,t_n\},\\[2ex] \begin{Vmatrix}a(t_k+0) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \overline{a(t_k+0)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & a(t_k-0) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \overline{a(t_k-0)}\end{Vmatrix}, & \text{pentru } t=t_k\ (k=1,..,n),\end{cases}$$

$$P(t,\xi)=\begin{cases}\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}, & \text{pentru } t\in\Gamma\setminus\{t_1,t_2,\dots,t_n\},\\[2ex] \dfrac{1}{z_k^{2\pi}-1}\begin{Vmatrix}z_k^{2\pi} & 0 & -z_k^{\theta_k} & 0\\ 0 & -1 & 0 & z_k^{2\pi-\theta_k}\\ z_k^{2\pi-\theta_k} & 0 & -1 & 0\\ 0 & -z_k^{\theta_k} & 0 & z_k^{2\pi}\end{Vmatrix}, & \text{pentru } t=t_k\ (k=1,\dots,n),\end{cases}$$

unde $z_k = exp\left(\xi + i\dfrac{1+\beta_k}{p}\right), -\infty \le \xi \le \infty.$

$$Q(t,\xi) = E(t) - P(t,\xi)\ ,$$

unde $$E(t) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \text{ pentru } t \in \Gamma \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \text{ pentru } t = t_k \ (k = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

În sfârşit

$$V(t,\xi) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, & \text{pentru } \ t \in \Gamma \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, & \text{pentru } \ t = t_k \ (k = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Dacă operatorul A are forma $A = aP + bQ + (cP + dQ)V$, atunci simbolul lui, $A(t,\xi)$, îl definim prin relaţia

$$A(t,\xi) = a(t,\xi)P(t,\xi) + b(t,\xi)Q(t,\xi) + [c(t,\xi)P(t,\xi) + d(t,\xi)Q(t,\xi)]V(t,\xi).$$

Teorema 3.1. *Operatorul*

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V$$

$(a,b,c,d \in CP(\Gamma))$ *este noetherian în spaţiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$ *dacă şi numai dacă*

$$det\, A(t,\xi) \ne 0 \left(t \in \Gamma, -\infty \le \xi \le \infty\right).$$

În încheiere, să considerăm problema generalizată la frontiera lui Riemann, care constă în următoarele: de determinat două funcţii $\Phi^+(z)$ şi $\Phi^-(z)$ analitice în F^+, respectiv în F^-, care pot fi reprezentate cu ajutorul integralei lui Cauchy în F^+ şi F^-, valorile lor la limită $\Phi^+(t)$ şi $\Phi^-(t)$ pe conturul Γ aparţin spaţiului $L_p(\Gamma,\rho)$ şi satisfac condiţiile la frontieră

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t)\overline{\Phi^-(t)} + c(t). \tag{3.2}$$

În cazul conturului Leapunov, problema (3.2) a fost studiată într-un şir de lucrări (*a se vedea* [5]). În particular, dacă a, b, c sunt funcţii continue pe Γ, atunci din aceste lucrări deducem că problema la frontieră (3.2) este noetheriană dacă şi numai dacă

$$|a(t)| \ne 0\ (t \in \Gamma).$$

În cazul conturului Leapunov pe porţiuni, utilizând teorema precedentă, se demonstrează următoarea teoremă.

Teorema 3.2. *Problema la frontieră (3.2) este noetheriană în spaţiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$ *dacă şi numai dacă sunt verificate condiţiile:*

(i) $|a(t)| > 0, t \in \Gamma$;

(ii) $|a(t_k)|^2 - |b(t_k)|^2 \left(\dfrac{z_k^{2\pi-\theta_k} - z_k^{\theta_k}}{z_k^{2\pi} - 1}\right) \ne 0$ *pentru orice* $k = 1, \ldots, n,$

unde $z_k = exp\left(\xi + i\dfrac{1+\beta_k}{p}\right), -\infty \le \xi \le \infty.$

Observăm că în cazul în care conturul Γ *nu are puncte unghiulare,* $\theta_k = \pi$, condiţiile (ii) coincid cu condiţiile (i), adică obţinem rezultatele cunoscute din [5] referitoare la problema la frontieră (3.2).

IV. Simbolul operatorilor integrali singulari cu translaţii. Criterii noetheriene

Fie Γ un contur orientat de tip Leapunov pe planul complex, $E = L_p(\Gamma)\ (1 < p < \infty), \Sigma$ o subalgebră a algebrei $L_\infty(\Gamma)$ şi α un homeomorfism $\Gamma \to \Gamma$, care verifică condiţiile: $\alpha(t) \not\equiv t$, $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ şi derivata $\alpha'(t)$ este o funcţie holderiană pe conturul Γ. Notăm prin K algebra generată de operatorul integral singular S, de operatorii compacţi şi de toţi operatorii de multiplicare la funcţiile $h \in \Sigma$. Mai notăm prin $\widetilde{K}$ algebra generată de operatorii din algebra A şi de operatorul Carleman de translaţie $(V\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$.

În cazul în care aplicaţia α păstrează orientarea conturului, atunci $SVS = V + T\ \ (T \in \mathrm{T})$, iar dacă α schimbă orientarea, atunci $SVS = -V + T_1\ (T_1 \in \mathrm{T})$. În plus, dacă $(H\varphi)(t) = h(t)\varphi(t)$, atunci $(VHV\varphi)(t) = h(\alpha(t))\varphi(t)$.

Teorema 4.1. *Fie* α *păstrează orientarea conturului. Orice operator* $A \in \widetilde{K}$ *poate fi exprimat sub formă de sumă* $A = A_1 + A_2V\ (A_1, A_2 \in K)$, *care se determină cu exactitatea de un termen compact.*

Demonstraţie. Este evident că teorema va fi demonstrată, dacă vom arăta că mulţimea operatorilor de forma

$$A_1 + A_2V\ , \tag{4.1}$$

unde A_1 şi A_2 parcurg algebra K, formează o algebră şi din egalitatea $A_1 + A_2V = 0$, $(A_1, A_2 \in K)$, rezultă că $A_1, A_2 \in \mathrm{T}$. În mod direct se arată că suma şi produsul operatorilor de forma (4.1) sunt operatori de aceeaşi formă (4.1). Să demonstrăm că această mulţime este închisă. Fie şirul de operatori $A_1^n + A_2^nV$ converge uniform către operatorul A, $h(t) = \alpha(t) - t$ şi $(H\varphi)(t) = h(t)\varphi(t)$. Aşa cum $H^{-1}(A_1^n + A_2^nV)H = A_1^n - A_2^nV + T_n$, atunci $2\hat{A}_1^n \to \hat{A} + \hat{H}^{-1}\hat{A}\hat{H} = \hat{A}_1 \in \hat{K}$. În mod similar se arată că $\hat{A}_2^n \to \hat{A}_2 \in \hat{K}$. Aşadar, $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2V$ şi, prin urmare, $A = A_1 + A_2V\ (A_1, A_2 \in K)$. Fie $A_1 + A_2V = 0$, atunci $\hat{A}_1 + \hat{A}_2\hat{V} = 0$ şi $\hat{A}_1 - \hat{A}_2\hat{V} = \hat{H}^{-1}(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\hat{V})\hat{H}$, adică operatorii A_1, A_2 sunt compacţi. Teorema este demonstrată.

Teorema 4.2. *Fie* $A, B, C \in L(E)$ *şi* $C^2 = I$, *atunci are loc egalitatea*

$$\begin{Vmatrix} I & C \\ I & -C \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} A & B \\ CBC & CAC \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} I & I \\ C & -C \end{Vmatrix} = 2\begin{Vmatrix} A+BC & 0 \\ 0 & A-BC \end{Vmatrix}. \tag{4.2}$$

Demonstraţie. Egalitatea se verifică făcând operaţiile respective.

Teorema 4.3. *Fie* $A, B \in K$ *şi translaţia* α *păstrează orientarea conturului* Γ. *În acest caz,* $A + BV$ *este noetherian în spaţiul* $L(E)$ *dacă şi numai dacă operatorul*

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ VBV & VAV \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

este noetherian în spaţiul $L^2(E)$. Dacă $A + BV$ *este noetherian, atunci*

$$Ind(A + BV) = \frac{1}{2} Ind\begin{Vmatrix} A & B \\ VBV & \mathrm{VAV} \end{Vmatrix}. \tag{4.4}$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.60-72

Demonstraţie. Scriem egalitatea (4.2) pentru operatorii A, B, V. Observăm că $H^{-1}(A-BV)H = A+BV+T$; prin urmare, $A+BV$ este noetherian dacă şi numai dacă operatorul $A-BV$ este noetherian şi $Ind(A+BV) = Ind(A-BV)$. Aşa cum operatorii

$$\begin{Vmatrix} I & C \\ I & -C \end{Vmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{Vmatrix} I & I \\ C & -C \end{Vmatrix}$$

sunt inversabili (produsul lor este egal cu $2I$), atunci afirmaţiile teoremei rezultă din egalitatea (4.2). Teorema este demonstrată.

Observaţie. Operatorul matriceal (4.3) reprezintă un operator integral singular cu coeficienţi matriceali (fără translaţie).

Consecinţa 4.1. *Fie $A = aI + bS, B = cI + dS$, $a,b,c,d \in C(\Gamma)$, Γ un contur închis de tip Leapunov, $R = A+BV$ şi α păstrează orientarea conturului. Atunci operatorul R este noetherian dacă şi numai dacă*

$$det\begin{Vmatrix} a(t)+b(t) & c(t)+d(t) \\ c(\alpha(t))+d(\alpha(t)) & a(\alpha(t))+b(\alpha(t)) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a(t)-b(t) & c(t)-d(t) \\ c(\alpha(t))-d(\alpha(t)) & a(\alpha(t))-b(\alpha(t)) \end{Vmatrix} \neq 0 \tag{4.5}$$

Dacă R este noetherian, atunci $IndR = \frac{1}{2} ind \det(f_1(t)f_2^{-1}(t))$, unde $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ sunt matricele scrise în ordinea respectivă în (4.5).

Consecinţa 4.2. *Fie $\Sigma = PC(\Gamma)$ – mulţimea funcţiilor continue pe porţiuni definite pe conturul Γ şi $\{\gamma_M\}$ setul de homeomorfisme, care definesc un simbol pe algebra K. Atunci egalitatea*

$$\tilde{\gamma}_M(R) = \begin{Vmatrix} \gamma(A) & \gamma(B) \\ \gamma(VBV) & \gamma(VAV) \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

reprezintă un simbol pe algebra $\tilde{K}$. Operatorul $R = A+BV$ este noetherian dacă şi numai dacă $\det \tilde{\gamma}_M(R) \neq 0, \forall M$.

Fie aplicaţia α schimbă orientarea conturului Γ. Dacă Γ este inchis şi de tip Leapunov, iar coeficienţii operatorului R sunt funcţii continue pe $\Gamma\,(\Sigma = C(\Gamma))$, atunci afirmaţiile teoremei 4.3 rămân valabile. Demonstraţia se face în mod similar, trebuie doar de schimbat operatorul H cu operatorul S şi de utilizat proprietatea: operatorii $aS - SaI$ şi $SVS + V$ sunt compacţi în spaţiul E. În cazul $\Sigma = PC(\Gamma)$ şi în condiţiile în care funcţia α schimbă orientarea conturului Γ teorema 4.3 nu mai are loc. Pentru a ne convinge, este de ajuns să aducem un exemplu de doi operatori integrali singulari A şi B, astfel încât $A+BV$ este noetherian, însă $A-BV$ nu este noetherian. Din egalitatea (4.2) vom obţine că respectivul operator matriceal nu este noetherian.

Exemplu. Fie $E = L_2(R), (V\varphi)(t) = \varphi(-t)$, $A = I, B = aS$, unde $a(t) = 0$ pentru $t<0$ şi $a(t) = i$ pentru $t>0$. Vom arăta că $A-BV$ este noetherian, însă $A+BV$ nu este noetherian. Pentru aceasta considerăm operatorul $C = A+\lambda BV$. Cu ajutorul izomorfismului $(\nu\varphi)(t) = (\varphi(t), \varphi(-t))\,(t>0$ aplicăm spaţiul $L_2(R)$ pe $L_2^2(R_+)$. Atunci

$$\nu C\nu^{-1} = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix} + \lambda\begin{Vmatrix} iI & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} S_+ & -R \\ R & -S_+ \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I-i\lambda R & i\lambda S_+ \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \tag{4.7}$$

unde $(S_+\varphi)(x) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y-x}dy$ şi $(R\varphi)(x) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y+x}dy$.

Din egalitatea (4.7) rezultă că operatorul $I-iR$ este noetherian în spaţiul $L_2(R)$ dacă şi numai dacă această proprietate o are operatorul $I-i\lambda R$ în spaţiul $L_2(R_+)$. Conform teoremei (2.1), operatorul $I-i\lambda R$ este noetherian în $L_2(R_+)$ dacă şi numai dacă $1-i\lambda\sqrt{z^2-1}\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\notin[1,\infty)$. Aici ramura funcţiei $\sqrt{z^2-1}$ este aleasă astfel încât $\sqrt{-1}=i$. Aşadar, operatorul $I-iR$ nu este noetherian şi, revenind la operatorul C, obţnem că $A+BV$ este noetherian, în timp ce $A-BV$ nu este noetherian. Cu aceasta construirea exemplului a luat sfârşit.

Faptul că nu am considerat conturul închis, ci axa reală nu este relevant, deoarece axa reală poate fi transformată într-un contur închis (de exemplu, în cercul unitate Γ_0) şi vom obţine exemplul respectiv în spaţiul $L_2(\Gamma_0)$. Aceasta înseamnă că egalitatea (4.6) nu determină un simbol pe algebra $\widetilde{K}$ în cazul în care funcţia α schimbă orientarea conturului.

Vom stabili o modalitate de definire a simbolului şi în cazul acesta, demonstrând mai întâi o propoziţie ajutătoare.

Lema 4.1. *Fie Γ un contur închis de tip Leapunov, $\alpha:\Gamma\to\Gamma$ schimbă orientarea conturului, $\alpha(\alpha(t))=t$ şi $\alpha'(t)$ verifică pe Γ condiţiile lui Holder. Atunci există o aplicaţie ν a cercului unitate Γ_0 pe Γ care posedă următoarele proprietăţi:*

$$\nu'(z)\in H(\Gamma_0), \nu'(z)\neq 0,\ \forall z\in\Gamma_0 \tag{4.8}$$

şi

$$(\nu^{-1}\alpha\nu)(z)=z^{-1}. \tag{4.9}$$

Prin $H(\Gamma_0)$ am notat mulţimea funcţiilor care verifică condiţiile lui Holder pe Γ_0.

Demonstraţie. Evident, aplicaţia α are pe conturul Γ două puncte fixe, pe care le notăm cu t_0 şi τ_0. Aşa cum Γ este de tip Leapunov, există o aplicaţie $\eta:\Gamma_0\to\Gamma$ cu proprietăţile $\eta'(z)\in H(\Gamma_0)$ şi $\eta'(z)\neq 0$ pentru $z\in\Gamma_0$. În plus, putem obţine să fie îndeplinită condiţia $\eta(1)=t_0$. Notăm $\lambda=\eta^{-1}\circ\alpha\circ\eta$. Se observă uşor că aplicaţia $\lambda:\Gamma_0\to\Gamma_0$ schimbă orientarea cercului Γ_0. În afară de aceasta, $\lambda(\lambda(z))=z$, $(|z|=1)$, şi $\lambda(\xi_0)=\xi_0$, unde $\xi_0=\eta^{-1}(t_0)$. Punctele 1 şi ξ_0 împart cercul în două arce, Γ_1 şi Γ_2 şi, în afară de aceasta, $\lambda:\Gamma_1\to\Gamma_2$ şi $\lambda:\Gamma_2\to\Gamma_1$. Fie $\mu:\Gamma_1\to\Gamma_2$, o aplicaţie cu proprietăţile $\mu(\xi_0)=-1$, $\mu(1)=1$, $\mu'(z)\neq 0$ pentru $z\in\Gamma_1$ şi $\mu'(z)\in H(\Gamma_1)$. Prelungim funcţia μ pe tot cercul Γ_0 cu ajutorul egalităţii $\mu(z)=1/\mu(\lambda(z))$, pentru $z\in\Gamma_2$. Se verifică uşor că pentru orice $z\in\Gamma_0$ are loc egalitatea $\mu(z)=1/\mu(\lambda(z))$. Fie $\mu'(\xi_0+0)$ şi $\mu'(\xi_0-0)$ limitele funcţiei $\mu'(\xi)$ atunci când punctul ξ tinde către ξ_0, fiind pe conturul Γ_1, respectiv, pe Γ_2. Aşa cum $\mu'(\xi_0-0)=-\mu'(\xi_0+0)\lambda'(\xi_0)(\mu(\xi_0))^{-2}$, $\lambda'(\xi_0)=-1$ şi $\mu(\xi_0)=-1$, atunci $\mu'(\xi_0-0)=\mu'(\xi_0+0)$. În mod similar se verifică egalitatea $\mu'(1-0)=\mu'(1+0)$. Aşadar, $\mu'(\xi)\in H(\Gamma_0)$. Punem $\nu=\eta\circ\mu^{-1}$. În mod direct se arată că aplicaţia ν verifică condiţiile (4.8) şi (4.9). Lema este demonstrată.

Fie, ca şi mai sus, Σ o algebră de funcţii $f:\Gamma\to\mathbb{C}, (\Sigma\subset L_\infty(\Gamma))$, $\widetilde{K}-$ algebra generată de operatorii $H=hI\,(h\in\Sigma), S, T$ şi $(V\varphi)(t)=\varphi(\nu(t))$. Fără a restrânge generalitatea, în continuare vom presupune că $E=L_2(\Gamma)$. Considerăm izomorfismul $(B\varphi)(z)=\varphi(\nu(z))$. Se verifică uşor că $(BHB^{-1}\varphi)(z)=h(\nu(z))I$, $BSB^{-1}=S_0+T\,(T\in \mathrm{T}(E))$ şi $(BVB^{-1}\varphi)(z)=\varphi(1/z)$. Astfel, cazul general se reduce la cazul în care $\Gamma=\Gamma_0$ şi $\alpha(z)=1/z$.

Fie $J:L_2(\Gamma_0)\to L_2(R)$ izomorfismul definit de egalitatea

$$(J\varphi)(x)=\frac{2i}{i+x}\ \left(\frac{i-x}{i+x}\right)\ (x\in R).$$

În acest caz,

$$(J^{-1}\psi)(z)=\frac{1}{z+1}\psi\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)\ (z\in\Gamma_0).$$

Notăm prin W operatorul $(W\varphi)(z)=1/z$. Calculele ne arată că $(JWJ^{-1}\psi)(t)=(i-t)(i+t)^{-1}\psi(-t)$ şi $JSJ^{-1}=S_R$. Prin urmare, algebra $\tilde{K}$ este izomorfă cu algebra generată de operatorii integrali singulari cu translaţia $(V_0\varphi)(x)=\varphi(-x)$ şi cu coeficienţi dintr-o algebră de funcţii $f\in L_\infty(R)$.

Mai considerăm un izomofism $C:L_2(R)\to L_2^2(R_+)$ definit prin egalitatea $(C\varphi)(x)=(\varphi(x),\varphi(-x))$. Atunci

$$CHC^{-1}=\begin{Vmatrix}H_1 & 0\\ 0 & H_2\end{Vmatrix},\quad CS_RC^{-1}=\begin{Vmatrix}S_+ & -R\\ R & -S_+\end{Vmatrix},\quad CV_0C^{-1}=\begin{Vmatrix}0 & I\\ \pm I & 0\end{Vmatrix}.$$

Fie $M=CV_0$, $\Sigma=CP(\Gamma)$ şi $A\in\tilde{K}$, atunci operatorul A este noetherian în $L_2(\Gamma)$ dacă şi numai dacă MAM^{-1} este noetherian în $L_2^2(R_+)$. Operatorul MAM^{-1} aparţine algebrei generate de operatorii integrali singulari cu coeficienţi matriceali (de ordinul doi) continui pe porţiuni; prin urmare, pe algebra K poate fi definit un simbol. Acest simbol se va reprezenta prin matrice de ordinul patru.

De regulă, translaţia $\alpha:\Gamma\to\Gamma$ este numită de tip Carleman, dacă o iteraţie a sa este o aplicaţie identică. Dacă Γ este un contur închis de tip Leapunov, atunci orice translaţie de tip Carleman care schimbă orientarea conturului este de ordinul doi, adică a doua ei iteraţie este identică. Dacă însă α păstrează orientarea conturului, atunci ea poate avea orice ordin. De exemplu, rotaţia cercului unitate la unghiul $2\pi/n$ are ordinul n. Pe algebrele generate de operatori integrali cu coeficienţi continui pe potţiuni şi operatorii de translaţie de tip Carleman de ordinul n se poate defini (*a se vedea* [5]) un simbol matriceal de ordinul $2n$. În [13] se arată că pe algebrele care conţin translaţii ce nu verifică condiţiile lui Carleman, precum şi pe algebrele generate de operatorii multidimensionali Winer-Hopf, nu se poate construi un simbol de ordin finit.

Bibliografie:

1. CASTRO, L., ROIAS, E. Explicit solutions of Cauchy singular integral equations with weighted Carleman shift. In: *J. Math. Anal. And Appl.*, 2010, 371, no.1, p.128-133.
2. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. Extension theorem for invertibility symbols Banach algebras. In: *Integral Equations and Operator Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, vol.15, p.991-1010.
3. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. Banach algebras of singular integral operators wieth piecewise continuous coefficients. General contour and weight. In: *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, no.17, p.322-337.
4. KRUPNIK, N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. In: *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, no.26. 138 p.
5. LITVINCHIUK, G. *Introduction to the theory of singular integral operators with shift*. Kluwer, 2004. 448 p.
6. NEAGU, V. The symbol of singular integral operators with conjugation the case of piecewise Lyapunov contour. In: *American Math. Society*, 1983, vol.27, no.1, p.173-176.
7. NEAGU, V. *Algebre Banach generate de operatori integrali singulari*. Chişinău: CEP USM, 2005. 252 p.
8. NEAGU, V. Singular integral operators. The case of an unlimited contour. In: *Revue d′ analyse numérique et de théorie de l′ approximation*, 2005, tome XXXIV, no.2, p.151-168.
9. ГОХБЕРГ, И.Ц. Об одном применении нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям. В: *УМН*, 7, вып.2, 1952, с.149-156.
10. КРЕЙН, М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. В: *УМН*, 1958, №13, вып.5, с.3-120.
11. КРУПНИК, Н.Я. О многомерных сингулярных интегральных уравнениях. В: *УМН,* 1965, №20, вып.6, с.119-123.
12. КРУПНИК, Н.Я. Некоторые общие вопросы теории одномерных сингулярных операторов с матричными коэффициентами. В: *Математические исследования*, вып.42. Кишинёв: Штиинца, 1976, с.91-113.
13. КРУПНИК, Н.Я., ФЕЛЬДМАН, И.А. О невозможности введения матричного символа на некоторых алгебрах операторов. В: *Математические исследования*, вып.61. Кишинёв: Штиинца, 1981, с.75-85.
14. МИХЛИН, С.Г. Композиция двойных сингулярных интегралов. В: *Доклады АН СССР*, 1946, т.2, №1, с.3-6.

15. МИХЛИН, С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. Москва: Физматгиз, 1962.

Prezentat la 11.09.2013