STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.48-59

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЯТИМЕРНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ С ИНВАРИАНТНЫМИ ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ, ПРЯМОЙ В НЕЙ И ТОЧКОЙ НА НЕЙ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Молдавский государственный университет

Для выявления структуры пятимерных групп симметрии с инвариантными двумерной плоскостью, прямой в ней и точкой на этой прямой, то есть пятимерных групп симметрии категории G_{5210} в краткой записи, полностью выписан каталог двумерных групп кристаллографических P-симметрий G_{210}^P при $P \simeq G_{30}$. Доказано, что между группами G_{210}^P и пятимерными группами симметрии категории G_{5210} устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, означающее, что группа P-симметрии категории G_{210}^P и моделируемая ею группа симметрии категории G_{5210} имеют одинаковое строение.

Ключевые слова: *пятимерные группы симметрии, инвариантная двумерная плоскость, каталог двумерных групп кристаллографических P-симметрий; сильно изоморфное соответствие.*

CERCETAREA GRUPELOR SIMETRIEI CINCIDIMENSIONALE CU PLAN BIDIMENSIONAL INVARIANT, DREAPTĂ PE EL ŞI PUNCT PE ACEASTĂ DREAPTĂ

Pentru determinarea structurii grupelor simetriei cincidimensionale cu plan bidimensional invariant, dreaptă pe el şi punct pe această dreaptă, adică a grupelor simetriei cincidimensionale de categoria G_{5210} în scriere pe scurt, este descris complet catalogul grupelor bidimensionale cristalorgafice ale P-simetriei G_{210}^P pentru $P \simeq G_{30}$. Este demonstrat că între grupele G_{210}^P şi grupele simetriei cincidimensionale de categoria G_{5210} se stabileşte nu doar o corespundere reciprocă unică, dar şi o corespundere puternic izomorfă, ceea ce înseamnă că grupa P-simetrie de categoria G_{210}^P şi grupa simetriei modelată de ea de categoria G_{5210} au aceeaşi structură.

Cuvinte-cheie: *grupele simetriei cincidimensionale, plan bideminsional invariant, catalogul grupelor bidemnsionale cristalografice ale P-simetriei, corespundere puternică izomorfă.*

INVESTGATION OF THE FIVE-DMENSIONAL SYMMETRY GROUPS WITH INVARIANT TWO-DIMENSIONAL PLANE, STRAIGHT LINE INTO IT AND A POINT ON THIS LINE

To identify the structure of the five-dimensional symmetry groups with invariant two-dimensional plane, straight line in it and a point on this line, that is, five-dimensional symmetry groups of the G_{5210} category in brief notation, the catalog of the two-dimensional groups of the crystallographic P-symmetries G_{210}^P for $P \simeq G_{30}$ is completely presented. It is proven that between the groups G_{210}^P and five dimensional symmetry groups of the G_{5210} category established not only one to one, but also strongly isomorphic correspondence, which means that P-symmetry group of the G_{210}^Pcategory and modeled by this group the symmetry group of the category G_{5210} have the sa me structure.

Keywords: *five-dimensional symmetry groups, invariant two-dimensional plane, catalog the two-dimensional grups of the crystallographic P-symetries.*

1. Кристаллографические группы P-симметрии находят применение не только в физике, но в совокупности с классическими позволяют продвинуть принципиальное решение задач n-мерной геометрической кристаллографии. Так, например, младшими пространственными группами G_3^P кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$ описывается магнитная симметрия кристаллов [1], а всеми видами пространственных групп кристаллографических P-симметрий при их полной классификации, согласно общей теории P-симметрии, интерпретируются с точностью до строения все различные 6-мерные группы симметрии, сохраняющие инвариантной 3-мерную плоскость, то есть 6-мерные группы симметрии G_{63} в краткой записи [2]. Ограничившись пятимерными плоскостными группами симметрии ввиду того, что все категории четырёхмерных групп симметрии полностью изучены в [3], покажем, что кристаллографическими группами при $P \simeq G_{30}$ конечных бордюров или страниц, согласно [4, стр.71], полностью интерпретируются с точностью до строения все различные 5-мерные группы симметрии, сохраняющие в пятимерном пространстве инвариантными двумерную плоскость, прямую в ней и точку на этой прямой, то есть 5-мерные группы симметрии категории G_{5210} в краткой записи. Такую цель и преследует настоящая статья.

2. Приведём необходимые нам понятия и факты, требуемые для решения поставленной задачи. Что касается групп симметрии конечных бордюров, то это двумерные точечные группы, сохраняющие на плоскости прямую и точку на ней, то есть двумерные точечные группы с набором трех особенных элементов, обозначаемые в краткой записи символом G_{210}. Таким образом, нужные нам группы симметрии конечных бордюров исчерпываются группой симметрии прямоугольника (листа) 2·m и всеми его подгруппами – тождественным преобразованием 1, двойным центром вращения 2, прямой отражения m_x, перпендикулярной оси *ox*, прямой отражения m_y, перпендикулярной оси *oy*. Исходя из сказанного выше, приходим к выводу, что группы симметрии конечных бордюров удобно представлять в интернациональной символике следующим образом: 1, 2, m1, 1m, mm, где символ m оси отражения записывается на первом или втором месте в группе в зависимости от того, перпендикулярна она оси *ox* или *oy*. Присутствие элемента единицы в группах m1 и 1m означает отсутствие элемента симметрии на занимаемом ею месте.

Сущность нужной нам теории P-симметрии, подробно изложенной в [5,6], состоит в следующем: *приписывая каждой точке фигуры хотя бы один индекс i = 1, 2,…, p и фиксируя некоторую группу P подстановок этих индексов, называем преобразованием P-симметрии фигуры её изометрическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом k_i так, что подстановка* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & p \\ k_1 & k_2 \dots & k_p \end{pmatrix}$ *принадлежит фиксированной группе P*. Преобразования P-симметрии рассматриваемой фигуры с расставленными в её точках индексами составляют мультипликативную группу G, входящие в них преобразования симметрии – её порождающую группу S, а подстановки индексов – группу P_1. При P_1= P называем G группой полной P-симметрии, при $e \subset P_1 \subset P$ – неполной, а при $P_1 = e$ группа G = S.

Всякую группу G полной P-симметрии можно вывести из её порождающей S посредством выделения в S и P таких нормальных делителей H и Q, для которых существует изоморфизм фактор-групп S/H на P/Q , попарного перемножения соответствующих по изоморфизму смежных классов и объединения полученных произведений (основная теорема А.М. Заморзаева о P-симметрии [5,6]). Случай Q = P, Q = e и $e \subset Q \subset P$ соответствует делению групп P-симметрии на старшие, младшие и Q-средние. Совокупность всех групп P-симметрии с общей порождающей назовем порождённым ею семейством [5,6].

Из определения P-симметрии следует, что существует бесчисленное множество P-симметрий, так как на группу подстановок индексов, задающую P-симметрию, не налагается никаких ограничений. Поэтому в [5], наряду с общей теорией P-симметрии, ставился вопрос о классификации самих P-симметрий для так называемых кристаллографических P-симметрий, когда группа P изоморфна одному из 32 кристаллографических классов G_{30}. Из сложившихся при решении этой задачи трёх принципов классификации P-симметрий для нас вполне приемлем так называемый геометрический [8, 6, ξ 1,2], различающий при $P \simeq G_{30}$ 32 кристаллографические P-симметрии, трёхмерными точечными группами G_{30}^P которых впервые были описаны в [8] шестимерные точечные группы симметрии с инвариантной трёхмерной плоскостью и неподвижной точкой на ней, то есть шестимерные группы симметрии категории G_{630}.

Итак, геометрический принцип классификации P-симметрий при $P \simeq G_{30}$ дает возможность выявить 32 кристаллографические P-симметрии в случае, когда группа P подстановок качеств, приписанных точкам преобразуемой фигуры F, последовательно изоморфна трёхмерным точечным группам G_{30}. Полученные при этом в [7,6] 32 симметрии названы кристаллографическими и записаны они в интернациональной символике осевых трёхмерных точечных групп симметрии и антисимметрии.

3. Приведём полный каталог нужных нам для решения поставленной задачи двумерных точечных групп G_{210}^P кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$. Для этого обобщим 5 групп симметрии конечных бордюров G_{210} с отмеченными 32 кристаллографическими P-симметриями, распределёнными в [8] по 22 классам изоморфности следующим образом: 1; $\underline{1}$ 2, $\underline{2}$; 3; 4,$\underline{4}$; 6, 3$\underline{1}$, $\underline{6}$; 2$\underline{1}$; 22; 2$\underline{2}$; 32, 3$\underline{2}$; 42, 4$\underline{2}$; 62, 6$\underline{2}$; 32$\underline{1}$, $\underline{6}$2; 4$\underline{1}$; 6$\underline{1}$; 22$\underline{1}$; 42$\underline{1}$; 621; 23; 43, $\underline{4}$3; 23$\underline{1}$; 43$\underline{1}$. Однако следует заметить при этом, что для правильного подсчёта выведенных Q-средних групп P-симметрии и сведéния его, в основном, к предварительному выводу младших групп, в [8] введены понятия сильного изоморфизма групп и изоморфизма P-симметрии и обоснована связь между числами различных младших групп одних P-симметрий и различных Q-средних групп других P-симметрий. Именно число различных

Q-средних групп P-симметрии в данном семействе равно числу младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна группе P_0 . При этом в семействах групп изоморфных P-симметрий (т.е. P-симметрий, для которых группы подстановок индексов, задающих эти P-симметрии, сильно изоморфны [8]) с общей порождающей совпадают не только числа различных младших групп, но и числа различных Q-средних групп [8].

4. Опираясь на приведенные выше положения общей теории P-симметрии, приступим к освещению каталога всех различных групп G_{210}^P полных кристаллографических P-симметрий конечных бордюров. При обобщении классических групп симметрии G_{210} с 1-симметрией, задаваемой группой P = e, получим эти же 5 групп 1, 2, 1m, m1, mm ввиду того, что в этом случае точкам преобразуемой фигуры приписывается один и тот же индекс, и, следовательно, симметрия рассматриваемой фигуры сохраняется.

Обобщая порождающие группы G_{210} с остальными нетривиальными кристаллографическими P-симметриями, получим старшие, младшие и Q-средние группы G_{210}^P. Вывод старших групп G_{210}^P тривиален, так как из каждой порождающей группы при обобщении её с любой нетривиальной P-симметрией выводится только одна старшая, разлагающаяся в прямое произведение рассматриваемой классической группы и группы подстановок P, задающей использованную P-симметрию, и таких старших групп при обобщении 5 групп симметрии G_{210} с 31 нетривиальной кристаллографической P-симметрией будет 155 (= 31·5), список которых в интернациональной символике исчерпывается рядом, $1\underline{1}$, $2\underline{1}$, $1m\underline{1}$, $m1\underline{1}$, $mm\underline{1}$; $11^{(2)}$, $21^{(2)}$, $1m1^{(2)}$, $m11^{(2)}$, $mm1^{(2)}$; … ; $11^{(4}1^{3)}\underline{1}$, $21^{(4}1^{3)}\underline{1}$, … , $mm1^{(4}\ 1^{3)}\ \underline{1}$ – всего 155 групп, где, например, символом $mm1^{(4}\ 1^{3)}\ \underline{1}$ обозначена группа $mm \times 1^{(43\underline{1})}$.

Таким образом, для завершения полного списка всех различных групп G_{210}^P кристаллографических P-симметрий конечных бордюров недостает только младших и Q-средних групп P-симметрии этой категории. Приступим к их исследованию.

Из рассматриваемых групп симметрии G_{210} конечных бордюров, при их обобщении с каждой P-симметрией $\underline{1}$-, 2- и $\underline{2}$- одного класса изоморфности, выводится по 6 младших групп одинаковой структуры и ни одной средней (всего 6 × 3 = 18 групп). Список 6 младших групп G_{210}^P $\underline{1}$-симметрии, задаваемой группой подстановок P = {(+, –)} [6], выглядит в интернациональной символике следующим образом: $\underline{2}$, $1\underline{m}$, $\underline{m}1$, $\underline{m}m$, $m\underline{m}$,$\underline{m}$ $\underline{m}$, где черта под символом образующего элемента симметрии означает его замену соответствующим преобразованием $\underline{1}$-симметрии. Если в приведенном списке младших групп $\underline{1}$-симметрии черту под символом образующего элемента группы заменить на символ (2) и приписать его справа вверху этого элемента группы, то получим список $2^{(2)}$, $1m^{(2)}$, $m^{(2)}1$, $m^{(2)}m$, $mm^{(2)}$, $m^{(2)}m^{(2)}$ – 6 младших групп 2-симметрии, характеризуемой группой подстановок P = {(1,2)} [6]. Наложение друг на друга в порядке записи символов выписанных групп $\underline{1}$- и 2-симметрии дает список 6 младших групп $\underline{2}$-симметрии в следующем виде: $\underline{2}^{(2)}$, $1\ \underline{m}^{(2)}$, $\underline{m}^{(2)}1$, $\underline{m}^{(2)}m$, $m\ \underline{m}^{(2)}$, $\underline{m}^{(2)}\underline{m}^{(2)}$, характеризуемой группой подстановок $P = \{(1, \bar{2}\ )\ (\bar{1}, 2)\}$ [6].

При 3-симметрии, характеризуемой группой подстановок P = {(1,2,3)} [6], из порождающих групп G_{210} не выводится ни одна младшая и ни одна средняя группа ввиду того, что в этом случае для взятых групп симметрии при 3-симметрии условия упомянутой теоремы А.М. Заморзаева не выполняются (ср. с [9]).

При каждой P-симметрии из класса изоморфных 4 и $\underline{4}$ в каталоге G_{210}^P содержится по 6 две-средних групп одинакового строения (всего (6 × 2 = 12 групп). Для записи 2-средних групп G_{210}^P при 4-симметрии нужно в имеющемся списке младших групп 2-симметрии цифру (2) заменить цифрой (4), в результате чего получим список нужных нам 2-средних групп категории G_{210}^4 в следующем виде: $2^{(4)}$, $1m^{(4)}$, $m^{(4)}1$, $m^{(4)}m$, $mm^{(4)}$, $m^{(4)}m^{(2)} = m^{(2)}m^{(4)}$. Аналогичным образом, если в списке младших групп $\underline{1}$-симметрии $G_{210}^{\underline{1}}$ к подчеркнутым элементам приписать справа вверху символ (4), то получим список 6 две-средних групп категории G_{210}^4 в следующем виде: $\underline{2}^{(4)}$, $1\underline{m}^{(4)}$, $\underline{m}^{(4)}\ 1$, $\underline{m}^{(4)}\ m$, $m\ \underline{m}^{(4)}$, $\underline{m}^{(4)}\ m^{(2)} = m^{(2)}\underline{m}^{(4)}$.

При каждой P-симметрии из класса изоморфности 6-, $\underline{6}$- , $(3\underline{1})$- категория G_{210} может порождать только 2-, $\underline{2}$-, $\underline{1}$- и 3-средних группы. Но из указанных наименований Q-средних групп категория G_{210} может порождать при отмеченных P-симметриях только 3-средние группы ввиду того, что фактор-группа $6/3 \simeq 2$, фактор-группа $\underline{6}/3 \simeq \underline{2}$, а фактор-группа $(3\underline{1})/3 \simeq \underline{1}$, а при этих фатор-группах группы симметрии конечных бордюров G_{210} порождают по 6 младших групп, которые выше выписаны полностью. Отсюда, согласно [8], имеем, что группы симметрии G_{210} при 6-, $\underline{6}$- и (31)-симметрии порождают по 6 три-средних групп, список которых, согласно рассматриваемым P-симметриям, исчерпывается следующим перечнем: $2^{(2)}1^{(3)}$, $1m^{(2)}1^{(3)}$, $m^{(2)}11^{(3)}$,$m^{(2)}m1^{(3)}$, $mm^{(2)}1^{(3)}$, $m^{(2)}m^{(2)}1^{(3)}$; $\underline{2}^{(2)}1^{(3)}$, $1\underline{m}^{(2)}1^{(3)}$, $\underline{m}^{(2)}11^{(3)}$, $\underline{m}^{(2)}m1^{(3)}$, $m\underline{m}^{(2)}1^{(3)}$, $\underline{m}^{(2)}\ \underline{m}^{(2)}1^{(3)}$; $\underline{2}\ 1^{(3)}$, $1\underline{m}1^{(3)}$, $\underline{m}11^{(3)}$, $\underline{m}\ m1^{(3)}$, $m\underline{m}1^{(3)}$, $\underline{m}\ \underline{m}1^{(3)}$ – всего 18 групп, где символом (ε) обозначена подстановка ε = (1, 3, 5)(2,4,6).

При (22)-симметрии, характеризуемой группой подстановок индексов P = {(1,2)(3,4), (1,3)(2,4)}, группы симметрии конечных бордюров G_{210} порождают 1 младшую группу $m^{(2}m^{2)}$, а также 6 две-средних групп ввиду того, что фактор-группа (22)/2)≃(2, где символом (2 обозначена группа, порожденная подстановкой ε_1 = (1,2)(3,4), а символом 2) – группа, порожденная подстановкой ε_2 = (1,3)(2,4). Что касается самих 2)-средних групп конечных бордюров при (22)-симметрии, то они разлагаются в прямое произведение младшей группы (2-симметрии и группы, порожденной подстановкой ε_2, обозначенной символом $1^{2)}$, и записываются следующим образом: $2^{(2}1^{2)}$, $1m^{(2}1^{2)}$, $m^{(2}11^{2)}$, $m^{(2}m1^{2)}$, $mm^{(2}1^{2)}$, $m^{(2}m^{(2}1^{2)}$. Итак, группы симметрии G_{210} при (22)-симметрии порождают 7 новых групп, из которых 1 младшая и шесть 2)-средних.

При (2$\underline{1}$)-симметрии категория G_{210} порождает 6 младших групп, список которых выглядит следующим образом: $\underline{m}m^{(2}$,$\underline{m}\ \underline{m}^{(2}$, $m^{(2}\underline{m}$, $m^{(2}\ \underline{m}^{(2}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}$, а также по шесть $\underline{1}$-, 2- и $\underline{2}$-средних, ибо группа, задающая (2$\underline{1}$)-симметрию, обладает тремя нетривиальными нормальными делителями, указывающими наименования Q-средних групп конечных бордюров при (2$\underline{1}$)-симметрии. В связи с тем, что фактор-группа $(2\underline{1})/\underline{1} = (2\underline{1})/\underline{2} \simeq 2$, список $\underline{1}$-средних групп нужной нам категории при (2$\underline{1}$)-симметрии будет выглядить так: $2^{(2}\underline{1}$, $1m^{(2}\underline{1}$, $m^{(2}1\underline{1}$, $m^{(2}m\ \underline{1}$, $mm^{(2}\underline{1}$, $m^{(2}\ m^{(2}\underline{1}$, а список $\underline{2}$-средних групп этой же категории при (2$\underline{1}$)-симметрии представится следующим образом: $2^{(2}\underline{1}^{(2}$, $1m^{(2}\ \underline{1}^{(2}$, $m^{(2}1\underline{1}^{(2}$, $m^{(2}m\underline{1}^{(2}$, $mm^{(2}\underline{1}^{(2}$, $m^{(2}m^{(2}\ \underline{1}^{(2}$. Что касается 2-средних групп конечных бордюров при (2$\underline{1}$)-симметрии, их также будет 6, поскольку фактор-группа $(2\underline{1})/2 \simeq \underline{1}$, а сам список таких групп таков: $\underline{2}1^{(2}$, $1\underline{m}1^{(2}$, $\underline{m}11^{(2}$,$\underline{m}m1^{(2}$,$m\underline{m}1^{(2}$, $\underline{m}\ \underline{m}1^{(2}$. Суммарно получаем, что группы симметрии категории G_{210} при (2$\underline{1}$)-симметрии порождают 24 новых группы, из которых 6 младших и 18 Q-средних.

При (2$\underline{2}$)-симметрии, задаваемой группой подстановок индексов $P = \{(1{,}2)(\bar{3},\bar{4}), (1\bar{3})(2,\bar{4})\}$, рассматриваемая категория точечных групп G_{210} порождает 3 младших группы и по шесть 2- и $\underline{2}$-средних благодаря тому, что фактор-группы $(2\underline{2})/(2 \simeq \underline{2})$, а $(2\underline{2})/\underline{2}) \simeq (2$ [6]. Список младших групп (2$\underline{2}$)-симметрии таков: $m^{(2}\underline{m}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}$, $\underline{m}^{(2'}m^{2)} = \underline{m}^{2)}\underline{m}^{(2'}$, где символом (2' обозначена подстановка $\varepsilon_1 = (1{,}2)(\bar{3},\bar{4})$, символом $\underline{2}$) – подстановка $\varepsilon_2 = (1,\bar{3})(2,\bar{4})$, а символом (2$'$– подстановка $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = (1,\bar{4})(2,\bar{3})$.

Прямое произведение каждой младшей группы $\underline{2}$)-симметрии на группу, порожденную подстановкой ε_1, дает перечень шести 2-средних групп в следующем виде: $\underline{2}^{2)}1^{(2}$, $1\underline{m}^{2)}1^{(2}$, $\underline{m}^{2)}11^{(2}$, $\underline{m}^{2)}m1^{(2}$, $m\underline{m}^{2)}1^{(2}$, $\underline{m}^{2)}\underline{m}^{2)}1^{(2}$, а прямое произведение каждой младшей группы (2– симметрии на группу, порожденную подстановкой ε_2, дает перечень 6 искомых средних групп $\underline{2}$-симметрии: $2^{(2}\underline{1}^{2)}$, $1m^{(2}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}1\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}m\underline{1}^{2)}$, $mm^{(2}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}m^{(2}\underline{1}^{2)}$. Таким образом, группы симметрии G_{210} при их обобщении с (2$\underline{2}$)-симметрией порождают 15 новых групп, из которых 3 младших и 12 Q-средних при Q = 2 и $\underline{2}$.

При (32)- и (3$\underline{2}$)-симметриях группы подстановок индексов, которыми они задаются, приведены в [6]. Используемые нами группы симметрии G_{210} порождают только по шесть 3-средних групп ввиду того, что фактор-группа (32)/3≃2), а (3$\underline{2}$)/3≃$\underline{2}$). Следовательно, прямое произведение каждой младшей группы конечных бордюров 2- и $\underline{2}$-симметрии на группу $1^{(3}$ дает список всех 12 групп (32)- и (3$\underline{2}$)-симметрии, т.е. следующих групп: $2^{(2}1^{(3}$, $1m^{2)}1^{(3}$, $m^{2)}\,11^{(3}$, $m^{2)}\,m1^{(3}$, $mm^{2)}\,1^{(3}$, $m^{2)}\,m^{2)}\,1^{(3}$ и $\underline{2}^{2)}\,1^{(3}$, $1\underline{m}^{2)}1^{(3}$, $\underline{m}^{2)}\,11^{(3}$, $\underline{m}^{2)}\,m1^{(3}$, $m\underline{m}^{2)}1^{(3}$, $\underline{m}^{2)}\ \underline{m}^{2)}1^{(3}$.

При (42)- и (4$\underline{2}$)-симметриях группы подстановок индексов, которыми они характеризуются, можно найти в [6, с.32-34]. Используемые нами группы симметрии G_{210} могут порождать только по три 2-средних, по шесть 4-средних и по шесть (22)- и (2$\underline{2}$)-средних, всего (3×2+6×2+6×2) = 30 групп.

В связи с тем, что фактор-группа (42)/(2≃22$'$, то количество 2-средних групп, которые порождают группы симметрии G_{210} при (42)-симметрии, совпадает с числом младших групп, согласно [8], которые порождает эта категория при её обобщении с (2$\underline{2}$)-симметрией. Следовательно, если в списке упомянутых младших групп (2$\underline{2}$)-симметрии убрать черту из-под образующих элементов, а символ (2 заменить символом (4, представляющим подстановку ε_1=(1,2,3,4)(5,8,7,6), символом 2) обозначить подстановку ε_2= (1,5)(2,6) (3,7)(4,8), а символом $2^{/}$)– подстановку $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ = (1,6)(2,7)(3,8)(4,5), то получим список всех трёх 2-средних групп конечных бордюров при их обобщении с (42)- симметрией в следующем виде: $m^{(4}\, m^{2)}$, $m^{2)}\, m^{(4}$, $m^{2')}\, m^{2)} = 2^{(4} \cdot m^{2)}$.

Аналогичным образом, ввиду того, что фактор-группа (4$\underline{2}$)/(2 $\simeq$ 2$\underline{2}$, число 2-средних групп конечных бордюров при их обобщении с (4$\underline{2}$)-симметрией совпадает с количеством младших групп (2$\underline{2}$)-симметрии этой категории. Следовательно, если в списке упомянутых младших групп (2$\underline{2}$)-симметрии символ (2 справа вверху образующего элемента заменить символом (4, характеризующим подстановку ε_1= (1,2,3,4)$(\bar{5},\bar{8},\bar{7},\bar{6})$, а оставленному символу $\underline{2}$) придать роль подстановки $\varepsilon_2 = (1,\bar{5})(2,\bar{6})(3,\bar{7})(4,\bar{8})$, а символом $\underline{2}^{/}$) обозначить подстановку $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = (1,\bar{6})(2,\bar{7})(3,\bar{8})(4,\bar{5})$,то получим список всех трёх 2-средних групп конечных бордюров (4$\underline{2}$)-симметрии в следующем виде: $m^{(4}\,\underline{m}^{2)}$, $\underline{m}^{2)}m^{(4}$, $\underline{m}^{2')}\,\underline{m}^{2)} = 2^{(4} \cdot \underline{m}^{2)}$. Далее, так как (42)/4 $\simeq$ 2), а (4$\underline{2}$)/(4 $\simeq$ $\underline{2}$), то 4-средние группы конечных бордюров при (42)-симметрии разлагаются в прямое произведение младших групп 2)-симметрии и группы $1^{(4}$, а 4-средние группы этой категории при (4$\underline{2}$)- симметрии – в прямое произведение младших групп $\underline{2}$)-симметрии и группы $1^{(4}$. Таким образом список нужных нам 6 четыре-средних групп при (42)-симметрии выглядит следующим образом: $2^{2)}1^{(4}$, $1m^{2)}1^{(4}$, $m^{2)}11^{(4}$,$m^{2)}m1^{(4}$, $mm^{2)}1^{(4}$, $m^{2)}m^{2)}1^{(4}$, а список аналогичных $\underline{2}$)-средних групп при (4$\underline{2}$)-симметрии – $\underline{2}^{2)}1^{(4}$, $1\underline{m}^{2)}1^{(4}$, $\underline{m}^{2)}11^{(4}$, $\underline{m}^{2)}m1^{(4}$, $m\underline{m}^{2)}1^{(4}$, $\underline{m}^{2)}\underline{m}^{2)}1^{(4}$.

Наконец, ввиду того, что (42)/(22) = (4$\underline{2}$)/(2$\underline{2}$) $\simeq$ 2), перечень шести (22)-средних групп конечных бордюров при (42)-симметрии таков:$2^{(4}1^{2)}$, $1m^{(4}1^{2)}$, $m^{(4}11^{2)}$, $mm^{(4}1^{2)}$, $m^{(4}m^{2)}1^{2)} = =m^{(2}m^{(4}\,1^{2)}$. По аналогичному образцу воспроизводится список 6 нужных нам (2$\underline{2}$)-средних групп при (4$\underline{2}$)-симметрии, т.е. групп $2^{(4}\underline{1}^{2)}$, $1m^{(4}\underline{1}^{2)}$, $m^{(4}1\underline{1}^{2)}$, $m^{(4}m\,\underline{1}^{2)}$, $mm^{(4}\,1^{2)}$, $m^{(4}m1^{2)}$, $m^{(4}m^{2)}\underline{1}^{2)} = m^{(2}m^{(4}\,\underline{1}^{2)}$.

При ($\underline{4}$2)-симметрии, определяемой группой подстановок индексов из [6], группы G_{210} могут порождать только 6-две средних и по шесть $\underline{4}$- , (22)- и (2$\underline{2}$)-средних, всего (6+6×3)=24 группы.

В связи с тем, что фактор-группа ($\underline{4}$2)/(2 $\simeq$ 2$\underline{1}$, количество 2-средних групп конечных бордюров при их обобщении с ($\underline{4}$2)-симметрией, согласно [8], совпадает с числом младших групп (2$\underline{1}$)-симметрии этой категории. Следовательно, если в полученном ранее списке младших групп (2$\underline{1}$)-симметрии конечных бордюров G_{210} приписанный элементам симметрии символ (2 заменить на символ ($\underline{4}$, задающий подстановку $\varepsilon_1 = (1,\bar{2},3,\bar{4})\,(5,\bar{8},7,\bar{6})$, а черту под элементом симметрии заменить символом 2), обозначающим подстановку $\varepsilon_2 = (1{,}5)(\bar{2},\bar{6})(3{,}7)(\bar{4},\bar{8})$, то получим список нужных нам 6 две-средних групп ($\underline{4}$2)-симметрии в следующем виде: $m^{2)}\underline{m}^{(4}$, $\underline{m}^{(4}\,m^{2)}$, $\underline{m}^{2)}\underline{m}^{(4}$, $\underline{m}^{(4}\,\underline{m}^{2)}$ ввиду того, что группы $\underline{4}$2 и $\underline{4}$ $\underline{2}$ совпадают, а группы $m^{2')}\underline{m}^{(4}$ и $\underline{m}^{(4}m^{2')}$ различны. Далее, $\underline{4}$–средние группы ($\underline{4}$2)-симметрии при обобщении рассматриваемых групп симметрии G_{210} с ($\underline{4}$2)-симметрией , разлагаются в прямое произведение младших групп 2)-симметрии этой категории и группы $\underline{1}^{(4}$. Следовательно, список нужных нам 4-средних групп конечных бордюров при ($\underline{4}$2)-симметрии имеет вид : $2^{2)}\underline{1}^{(4}$, $1m^{2)}\underline{1}^{(4}$, $m^{2)}\,1\underline{1}^{(4}$, $m^{2)}\,m\underline{1}^{(4}$, $m\,m^{2)}\,\underline{1}^{(4}$, $m^{(2}m^{2)}\underline{1}^{(4}$.

Если в списке младших групп $\underline{1}$-симметрии конечных бордюров подчеркнутым образующим элементам справа вверху придать символ ($\underline{4}$ и каждую полученную этим путем группу умножить на группу $1^{2)}$ и $\underline{1}^{2)}$, то получим перечень по 6 нужных нам (22)- и (2$\underline{2}$)-средних групп ($\underline{4}$2)-симметрии листов в следующем виде: $\underline{2}^{(4}\,1^{2)}$, $1\underline{m}^{(4}\,1^{2)}$, $\underline{m}^{(4}\,11^{\,2)}$, $\underline{m}^{(4}\,m1^{2)}$, $m\underline{m}^{(4}1^{2)}$, $\underline{m}^{(4}\,m^{(2}\,1^{2)} = m^{(2}\,\underline{m}^{(4}\,1^{2)}$ и $\underline{2}^{(4}\underline{1}^{2)}$, $1\underline{m}^{(4}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(4}\,1\underline{1}^{\,2)}$, $\underline{m}^{(4}\,m\underline{1}^{2)}$, $m\,\underline{m}^{(4}1^{2)}$, $\underline{m}^{(4}\,m^{(2}1^{2)} = m^{(2}\,\underline{m}^{(4}\,\underline{1}^{2)}$.

При (62)- и (6$\underline{2}$)-симметриях, характеризуемых группами подстановок индексов из [6], используемые нами группы симметрии G_{210} могут порождать только 2-,$\underline{2}$-, 6-, 3-, (32)- и (3$\underline{2}$)-средние группы при указанных P-симметриях.

Сразу заметим, что при Q=2 и $\underline{2}$ группы G_{210} не порождают Q-средних при их обобщении с (62)- и (6$\underline{2}$)-симметриями, так как фактор-группы (62)/(2 $\simeq$ 32 и (6$\underline{2}$)/(2 $\simeq$ 3$\underline{2}$ изоморфны таким P-симметриям, при которых группы G_{210} не порождают младших. Далее, ввиду того, что фактор-группы (62)/6 $\simeq$ 2, (6$\underline{2}$)/6 $\simeq$ $\underline{2}$, взятые нами группы симметрии G_{210} будут порождать, согласно [8] , по 6 шесть-средних групп при их обобщении с (62)- и (6$\underline{2}$)-симметриями. Следовательно, если каждую младшую группу

2- и $\underline{2}$-симметрии конечного бордюра умножить на группу $1^{(6}$, порожденную подстановкой ε_1=(1,2,3,4,5,6), являющейся первым образующим элементом групп P, задающих группы подстановок взятых P-симметрий, то получим список всех 12 шесть-средних групп (62)- и (6$\underline{2}$)-симметрии в таком виде: $2^{2)}1^{(6}$, $1m^{2)}1^{(6}$, $m^{2)}1\,1^{(6}$, $m^{2)}m1^{(6}$, $mm^{2)}1^{(6}$, $m^{2)}m^{2)}1^{(6}$и $\underline{2}^{2)}1^{(6}$, $1\underline{m}^{2)}1^{(6}$, $\underline{m}^{2)}\,11^{(6}$, $\underline{m}^{2)}\,m1^{(6}$, $m\underline{m}^{2)}1^{(6}$, $\underline{m}^{2)}\underline{m}^{2)}1^{(6}$. В свою очередь, поскольку фактор группа (62)/3 ≃ $2^{/}2$ ≃ 2$\underline{2}$, а (6$\underline{2}$)/3 ≃2$\underline{2}$, то последовательное умножение каждой младшей группы ($2^{/}2$)-симметрии и, соответственно, каждой младшей группы (2$\underline{2}$)-симметрии на группу $1^{(3}$, являющуюся подстановкой ε_1^2, даст перечень всех шести 3-средних групп (62)- и (6$\underline{2}$)-симметрий в таком виде: $m^{(2}m^{2)}\,1^{(3}$, $m^{2)}m^{(2}1^{(3}$, $m^{(2'}\,m^{2)}\,1^{(3}$ и $m^{(2}\,\underline{m}^{2)}\,1^{(3}$, $\underline{m}^{2)}\,m\,^{(2}1^{(3}$, $m^{(2'}\,\underline{m}^{2)}\,1^{(3}$. Наконец, в связи с тем, что фактор-группы (62)/(32) = (6$\underline{2}$)/(3$\underline{2}$) = 2, то умножение каждой младшей группы (2-симметрии конечного бордюра на группы $1^{(32)} = 1^{(3}1^{2)}$ и $1^{(32)} = 1^{(3}\underline{1}^{2)}$ дает перечень всех 12 групп этой категории при её обобщении с (62)- и (6$\underline{2}$)-симметриями в следующем виде: $2^{(2}1^{(3}1^{2)}$, $1m^{(2}1^{(3}1^{2)}$, $m^{(2}11^{(3}1^{2)}$, $m^{(2}m1^{(3}1^{2)}$, $mm^{(2}1^{(3}1^{2)}$, $m^{(2}m^{(2}1^{(3}1^{2)}$ и $2^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2),}$ $1m^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}\ 11^{(3}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}m1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $mm^{2)}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}m^{(2}1^{(3}\ \underline{1}^{2)}$.

В итоге имеем, что при обращении групп симметрии G_{210} с (62)- и (6$\underline{2}$)-симметриями всего получаем 3×2 + 6×4 = 30 Q-средних групп при Q = 6,3,32 и 3$\underline{2}$.

При ($\underline{6}$2)- и (321)-симметриях, характеризуемых группами подстановок индексов из [6], из порождающих групп G_{210} могут выводиться только $\underline{2}$-, $\underline{1}$-, 3-, $\underline{6}$- , (3$\underline{1}$)-, (32)- и (3$\underline{2}$)- средние группы. В связи с тем, что фактор-группа ($\underline{6}$2)/$\underline{2}$ = (321)/$\underline{1}$ ≃ 32, группы симметрии G_{210} не порождают $\underline{2}$- и $\underline{1}$-средние группы при их обобщении последовательно с ($\underline{6}$2)- и (32$\underline{1}$)-симметриями, поскольку отмеченные группы симметрии конечных бордюров не порождают младших групп при их обобщении с (32)-симметрией.

Далее, в связи с тем, что фактор-группа ($\underline{6}$2)/3 ≃ $\underline{2}$2 ≃ 2$\underline{1}$, а (321)/3 ≃ 2$\underline{1}$, количество 3-средних групп конечных бордюров при их обобщении с ($\underline{6}$2)- и (32$\underline{1}$)-симметриями совпадает с количеством младших групп этой категории при их обобщении с (2$\underline{1}$)-симметрией. Следовательно, если каждую группу G_{210}^P (2$\underline{1}$)-симметрии умножить на группу $1^{(3}$, то получим все шесть 3-средних групп этой категории при их обобщении с (32$\underline{1}$)- симметрией – именно нужные нам группы $\underline{m}m^{(2}1^{(3}$, $\underline{m}\ \underline{m}^{(2}1^{(3}$, $m^{(2}\underline{m}1^{(3}$, $m^{(2}\ \underline{m}^{(2}\ 1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}1^{(3}$ при обобщении групп симметрии G_{210} с (32$\underline{1}$)-симметрией. Умножение же на группу $1^{(3}$ каждой младшей группы ($\underline{2}$2)-симметрии конечных бордюров, получающихся из младших групп (2$\underline{1}$)-симметрии прибавлением к подчеркнутым символам образующих элементов этих групп справа вверху знака 2), приведет к полному перечню шести 3-средних групп ($\underline{6}$2)- симметрии, т.е. групп $\underline{m}^{(2}m^{2)}1^{(3}$,$m^{2)}\underline{m}^{(2}1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}m\,^{(2}1^{(3}$, $m^{(2}\ \underline{m}^{2)}\ 1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}^{2)}\ 1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}^{(2}1^{(3}$.

Умножение каждой младшей группы 2)-симметрии конечного бордюра на группы $\underline{1}^{(6}$ и $1^{(3}\ \underline{1}$ даст список 12 групп, из которых шесть $\underline{6}$-средних групп ($\underline{6}$2)-симметрии (т.е. групп $2^{2)}\ \underline{1}^{(6}$, $1m^{2)}\ \underline{1}^{(6}$, $m^{2)}1\ \underline{1}^{(6}$, $m^{2)}m\ \underline{1}^{(6}$, $mm^{2)}\ \underline{1}^{(6}$, $m^{2)}\ m^{2)}\ \underline{1}^{(6)}$) и шесть (3$\underline{1}$)-средних групп (32$\underline{1}$)-симметрии (т.е. групп $2^{2)}1^{(3}\underline{1}$, $1m^{2)}1^{(3}\underline{1}$, $m^{2)}11^{(3}\underline{1}$, $m^{2)}m1^{(3}\underline{1}$, $mm^{2)}1^{(3}\underline{1}$, $m^{2)}m^{2)}1^{(3}\underline{1}$), так как ($\underline{6}$2)/$\underline{6}$≃(32$\underline{1}$)/(3$\underline{1}$)≃2). Умножение же каждой $\underline{2}$-младшей группы конечного бордюра последовательно на группы $1^{(3}1^{2)}$ и $1^{(3}\underline{1}^{2)}$ даст шесть (32)-средних групп ($\underline{6}$2)-симметрии (т.е. групп $\underline{2}^{(2}\ 1^{(3}1^{2)}$, $1\underline{m}^{2)}1^{(3}\ 1^{2)}$, $\underline{m}^{2)}11^{(3}1^{2)}$, $\underline{m}^{2)}m\ 1^{(3}\ 1^{2)}$, $m\underline{m}^{2)}1^{(3}\ 1^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}^{(2}1^{(3}\ 1^{2)}$) и шесть (3$\underline{2}$)-средних групп этой же ($\underline{6}$2)-симметрии (т.е. групп $\underline{2}^{(2}\ 1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $1\underline{m}^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}11^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}m1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $m\underline{m}^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$), ибо ($\underline{6}$2)/(32) ≃ ($\underline{6}$2)/(3$\underline{2}$) ≃ $\underline{2}$. Наконец, умножение каждой $\underline{1}$-младшей группы конечного бордюра на группы $1^{(3}\ 1^{2)}$ и $1^{(3}\ \underline{1}^{2)}$ приводит к шести (32)-средним группам (32$\underline{1}$)-симметрии (т.е. группам $\underline{2}\ 1^{(3}1^{2)}$, $1\underline{m}1^{(3}\ 1^{2)}$, $\underline{m}\ 11^{(3}\ \underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\ m1^{(3}\ 1^{2)}$, $m\ \underline{m}1^{(3}\ 1^{2)}$, $\underline{m}\ \underline{m}1^{(3}\ 1^{2)}$) и шести (3$\underline{2}$)-средним группам этой же (321)-симметрии (т.е. группам $\underline{2}1^{(3}\ \underline{1}^{2)}$, $1\underline{m}\ 1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\ 11^{(3}\ \underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\ m1^{(3}\ \underline{1}^{2)}$, $m\underline{m}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\ \underline{m}1^{(3}\ \underline{1}^{2)}$) ввиду того, что (32$\underline{1}$)/(32) ≃ (321)/(3$\underline{2}$) ≃ $\underline{1}$.

Всего при обобщении групп симметрии G_{210} с ($\underline{6}$2)- и (32$\underline{1}$)-симметриями выводится 6×8=48 Q-средних групп при Q = 3, $\underline{6}$,3$\underline{1}$, (32) и (3$\underline{2}$).

При (4$\underline{1}$)-симметрии, характеризуемой группой подстановок индексов P={(1,2,3,4)}×{(+,-)} из [6], группы симметрии G_{210} могут порождать только $\underline{1}$-, $\underline{2}$-, 2-,4-, $\underline{4}$- и (2$\underline{1}$)-средние группы. Но так как фактор-группа (4$\underline{1}$)/$\underline{1}$ ≃ 4, а (4$\underline{1}$)/$\underline{2}$ ≃ 4, то указанные группы симметрии не могут порождать $\underline{1}$- и $\underline{2}$-средних группы при их обобщении с (4$\underline{1}$)-симметрией ввиду того, что они не могут порождать младших групп при их обобщении с 4-симметрией. Далее, в связи с тем, что $(4\underline{1})/2 \simeq 2\underline{1}$, группы G_{210} порождают шесть 2-средних групп при их обобщении с $(4\underline{1})$-симметрией благодаря тому, что используемые нами группы симметрии порождают 6 младших групп при их обобщении с $(2\underline{1})$-симметрией. Следовательно, согласно [8], группы G_{210} при их обобщении с $(4\underline{1})$-симметрией будут порождать шесть 2-средних групп: $\underline{m}m^{(4}$, $\underline{m}\,\underline{m}^{(4}$, $m^{(4}\underline{m}$, $m^{(4}\underline{m}^{(2}$, $\underline{m}^{(4}\underline{m}$, $\underline{m}^{(4}m^{(2}$.

Если $\underline{1}$-младшие группы конечных бордюров умножить последовательно на группы $1^{(4}$ и $\underline{1}^{(4}$, то получим шесть 4-средних групп $(4\underline{1})$-симметрии (т.е. группы $\underline{2}1^{(4}$, $1\underline{m}1^{(4}$, $\underline{m}1\underline{1}^{(4}$, $\underline{m}m1^{(4}$, $\underline{m}\,\underline{m}1^{(4}$) и шесть $\underline{4}$-средних групп (41)-симметрии (т.е. группы $\underline{2}\,\underline{1}^{(4}$, $1\,\underline{m}\,\underline{1}^{(4}$, $\underline{m}1\,\underline{1}^{(4}$, $\underline{m}m\,\underline{1}^{(4}$, $m\underline{m}\,\underline{1}^{(4}$, $\underline{m}\,\underline{m}\,\underline{1}^{(4}$). Наконец ввиду того, что фактор-группа $(4\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq 2$, группы G_{210} будут порождать шесть $(2\underline{1})$-средних групп при их обобщении с $(4\underline{1})$-симметрией, список которых выглядит следующим образом: $2^{(4}\underline{1}$, $1\,m^{(4}\underline{1}$, $m^{(4}1\underline{1}$, $m^{(4}m\underline{1}$, $mm^{(4}\underline{1}$, $m^{(4}m^{(2}\underline{1}$.

В итоге имеем, что группы симметрии G_{210} при их обобщении с $(4\underline{1})$-симметрией порождают $6\times4=24$ Q-средних группы при Q = 2-, 4-, $\underline{4}$- и $2\underline{1}$.

При $(6\underline{1})$-симметрии, определяемой группой подстановок индексов $P=\{(1,2,3,4,5,6\}\times\{(+,-)\}$ из [6], группы G_{210} конечных бордюров могут порождать только $\underline{1}$-, 2-, $\underline{2}$-, 3-, $(2\underline{1})$-, 6-, $\underline{6}$- и $(3\underline{1})$-средние. Однако в связи с тем, что фактор-группы $(6\underline{1})/\underline{1}\simeq(6\underline{1})/2\simeq6$, $(6\underline{1})/\underline{2} \simeq 3\underline{1}$, а $(6\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq 3$, группы G_{210} при этих P-симметриях, как об этом уже было отмечено выше, не могут порождать младших групп, а следовательно, согласно [8], не могут порождать и Q–средних, где Q = $\underline{1}$-, 2-, $\underline{2}$-, и $(2\underline{1})$- при их обобщениях с (61)-симметрией.

Далее, так как $(6\underline{1})/3\simeq2\underline{1}$, то количество 3-средних групп, которые группы G_{210} порождают при их обобщении с (61)-симметрией, совпадает с числом их младших групп при $(2\underline{1})$-симметрии. Следовательно, если младшие группы $(2\underline{1})$-симметрии последовательно умножить на группу $1^{(3}$, то получим шесть нужных нам $(2\underline{1})$-средних групп при $(6\underline{1})$-симметрии в следующем виде: $\underline{m}m^{(2}1^{(3}$, $\underline{m}\,\underline{m}^{(2}1^{(3}$, $m^{(2}\underline{m}1^{(3}$, $m^{(2}\underline{m}^{(2}1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}1^{(3}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}1^{(3}$. По аналогичной причине последовательное умножение младших группам $\underline{1}$-симметрии конечных бордюров на группы $1^{(6}$ и $\underline{1}^{(6}$ приведет к двенадцати 6- и $\underline{6}$-средних группам $(6\underline{1})$-симметрии в следующем виде: $\underline{2}\,1^{(6}$, $1\,\underline{m}\,1^{(6}$, $\underline{m}\,11^{(6}$, $\underline{m}\,m1^{(6}$, $m\,\underline{m}1^{(6}$, $\underline{m}\,\underline{m}1^{(6}$ и $\underline{2}\,\underline{1}^{(6}$, $1\,\underline{m}\,\underline{1}^{(6}$, $\underline{m}\,1\underline{1}^{(6}$, $\underline{m}\,m\underline{1}^{(6}$, $m\,\underline{m}1^{(6}$, $\underline{m}\,\underline{m}1^{(6}$, ибо $(6\underline{1})/6 \simeq(6\underline{1})/\underline{6} \simeq\underline{1}$. Наконец, если младшие группы 2-симметрии используемых групп G_{210} умножить последовательно на группу $1^{(3}\,\underline{1}$, то получим перечень всех шести $(3\underline{1})$-средних групп $(6\underline{1})$-симметрии: $2^{(2}\,1^{(3}\,\underline{1}$, $1\,m^{(2}\,1^{(3}\,\underline{1}$, $m^{(2}\,11^{(3}\underline{1}$, $m^{(2}\,m1^{(3}\,\underline{1}$, $mm^{(2}1^{(3}\underline{1}$, $m^{(2}\,m^{(2}1^{(3}\underline{1}$, так как $(6\underline{1})/(3\underline{1}) \simeq2$.

В итоге имеем, что группы симметрии G_{210} при их обобщении с $(6\underline{1})$-симметрией порождают $6\times4=24$ Q-средних группы при Q = 3-, 6-, $\underline{6}$ и $3\underline{1}$.

При $(22\underline{1})$-симметрии, характеризуемой группой подстановок индексов $P = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2, 4)\}\times\{(+, -)\}$ из [6], рассматриваемые группы G_{210} порождают только $\underline{1}$-, 2-, $\underline{2}$-, (22)-, $(2\underline{2})$- и $(2\underline{1})$- средние.

В связи с тем, что $(22\underline{1})/\underline{1}\simeq22$, то умножив младшую группу конечного бордюра при (22)- симметрии на группу $\underline{1}$, получим нужную нам $\underline{1}$-среднюю группу в виде $m^{(2}m^{2)}\underline{1}$. Аналогичным образом, последовательное умножение младших групп $(2\underline{1})$-симметрии конечных бордюров на группу $1^{2)}$ приведет к шести 2)-средним группам этой категории, при её обобщении с $(22\underline{1})$-симметрией, в таком виде: $\underline{m}m^{(2}1^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}^{(2}1^{2)}$, $m^{(2}\underline{m}1^{2)}$, $m^{(2}\underline{m}^{(2}1^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}1^{2)}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}\,1^{2)}$, ибо $(22\underline{1})/2 \simeq2\underline{1}$, а если младшие группы $(2\underline{2})$-симметрии данной категории умножить на группу $\underline{1}^{(2}$, то получим 3 нужные группы конечных бордюров при обобщении их с $(22\underline{1})$-симметрией, т.е. группы $m^{(2}\underline{m}^{2)}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{2)}m^{(2}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2'}m^{2)}\underline{1}^{2)}$, так как $(22\underline{1})/\underline{2} \simeq(2\underline{2})$. Далее, если $\underline{1}$-младшие группы конечных бордюров последовательно умножить на группу $1^{(22)} = 1^{(2}1^{2)}$, то получим 6 нужных нам групп $\underline{2}1^{(2}1^{2)}$, $1\underline{m}\,1^{(2}\,1^{2)}$, $\underline{m}\,11^{(2}\,1^{2)}$, $\underline{m}\,m1^{(2}\,1^{2)}$, $m\,\underline{m}\,1^{(2}1^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}1^{(2}1^{2)}$ ввиду того, что $(22\underline{1})/(22) \simeq\underline{1}$. В свою очередь, так как $(22\underline{1})/(2\underline{2}) \simeq 2)$, то последовательное умножение младших групп 2)-симметрии конечных бордюров на $1^{(2}\underline{1}^{2)}$ приведёт к списку $(2\underline{2})$-средних групп этой категории при $(22\underline{1})$-симметрии в следующем виде: $2^{2)}1^{(2}\underline{1}^{2)}$, $1m^{2)}\,1^{(2}\,\underline{1}^{2)}$, $m^{2)}\,11^{(2}\underline{1}^{2)}$, $m^{2)}m\,1^{(2}\underline{1}^{2)}$, $mm^{2)}1^{(2}\underline{1}^{2)}$, $m^{2)}m^{2)}1^{(2}\underline{1}^{2)}$. Таким же образом, поскольку $(22\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq2)$, то последовательное умножение младших групп 2)-симметрии рассматриваемой категории на группу $1^{(2}\underline{1}$ даст перечень всех шести $(2\underline{1})$-средних групп конечных бордюров при их обобщении с $(22\underline{1})$-симметрией, т.е. групп $2^{2)}1^{(2}\underline{1}$, $1m^{2)}\,1^{(2}\,\underline{1}$, $m^{2)}11^{(2}\underline{1}$, $m^{2)}m\,1^{(2}\underline{1}$, $mm^{2)}\,1^{(2}\underline{1}$, $m^{2)}m^{2)}\,1^{(2}\,\underline{1}$.

В итоге имеем, что при обобщении групп G_{210} с $(22\underline{1})$-симметрией получаем 28 Q-средних групп при отмеченных значениях Q.

При $(42\underline{1})$-симметрии, характеризуемой громоздкой группой подстановок индексов P из [6], группы G_{210} могут порождать только 2-, $\underline{1}$-,$\underline{2}$- ,4-, (22)-, $(2\underline{2})$-,$(4\underline{1})$-, $(22\underline{1})$-, (42)- , $(4\underline{2})$-, $(\underline{4}2)$-,$(2\underline{1})$- и $\underline{4}$-средние. Но так как фактор-группы $(42\underline{1})/2 \simeq 22'\underline{1}$, $(42\underline{1})/\underline{1} \simeq 42$, а $(42\underline{1})/\underline{2} \simeq 42$ изоморфны таким P-симметриям, при которых рассматриваемые порождающие не имеют младших, то, согласно [8], группы G_{210} не порождают Q-средних, где Q = 2-, $\underline{1}$- и $\underline{2}$- , при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией. Далее, в связи с тем, что $(42\underline{1})/4 \simeq 2\underline{1}$, последовательное умножение младших групп $(2\underline{1})$-симметрии конечных бордюров на группу $1^{(4}$ приведет к перечню шести 4-средних групп этой категории, которые они порождают при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией, т.е. групп $\underline{m}m^{(2}\,1^{(4}$, $\underline{m}\ \underline{m}^{(2}\,1^{(4}$, $m^{(2}\,\underline{m}\ 1^{(4}$, $m^{2}\ \underline{m}^{(2}\,1^{(4}$, $\underline{m}^{(2}\,\underline{m}1^{(4}$, $\underline{m}^{(2}\,m^{(2}\,1^{(4}$. В свою очередь, поскольку $(42\underline{1})/(22) \simeq 2\underline{1}$, то количество $(2\underline{1})$-средних групп конечных бордюров при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией, согласно [8], будет тоже 6, а сам список этих (22)-средних групп выглядит следующим образом: $\underline{m}m^{(4}\,1^{2)}$, $\underline{m}\ \underline{m}^{(4}\,1^{2)}$, $m^{(4}\ \underline{m}\ 1^{2)}$, $m^{(2}\ \underline{m}^{(4}\,1^{2)}$, $\underline{m}^{(4}\ \underline{m}\ 1^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\ m^{(4}\,1^{2)}$. Аналогичным образом, так как фактор-группа $(42\underline{1})/(2\underline{2}) \simeq 2\underline{1}$, то $(2\underline{2})$-средних групп конечных бордюров при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией будет также 6, а их список представится в следующем виде: $\underline{m}m^{(4}\,\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\ \underline{m}^{(4}\,\underline{1}^{2)}$, $m^{(4}\ \underline{m}\ \underline{1}^{2)}$, $m^{(2}\ \underline{m}^{(4}\,\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(4}\ \underline{m}\,\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\ m^{(4}\,\underline{1}^{2)}$. Так как $(42\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq 2\underline{2}$, то количество $(2\underline{1})$-средних групп категории G_{210} при её обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией совпадает с числом младших групп $(2\underline{2})$-симметрии этой категории, поэтому список трёх нужных нам $(2\underline{1})$-средних групп при $(42\underline{1})$-симметрии выглядит так: $m^{(4}\ \underline{m}^{2)}\,\underline{1}$, $\underline{m}^{2)}\ m^{(4}\,\underline{1}$, $m^{2')}\ m^{(4}\,\underline{1}$. Аналогичным образом, в связи с тем, что $(42\underline{1})/\underline{4} \simeq 2\underline{2}$, список трёх $\underline{4}$-средних нужных нам групп при $(42\underline{1})$-симметрии представится таким: $m^{(2}\ \underline{m}^{2)}\,\underline{1}^{(4}$, $\underline{m}^{(2}\ m^{2)}\,\underline{1}^{(4}$, $\underline{m}^{(2'}\ m^{2)}\,\underline{1}^{(4}$.

Поскольку фактор-группа $(42\underline{1})/(4\underline{1}) \simeq 2)$, то последовательное умножение младших групп 2)-симметрии конечных бордюров на группу $1^{(4}\underline{1}$ даст перечень 6 нужных нам групп этой категории при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией, т.е. групп: $2^{2)}1^{(4}\underline{1}$, $1m^{2)}1^{(4}\ \underline{1}$, $m^{(2}11\ ^{(4}\underline{1}$, $m^{2)}m1\ ^{(4}\underline{1}$, $mm^{2)}1\ ^{(4}\underline{1}$, $m^{2)}m^{2)}1\ ^{(4}\underline{1}$. Далее, в связи с тем, что $(42\underline{1})/(22\underline{1}) \simeq (2$, список 6 интересующих нас групп при обобщении групп G_{210} с $(42\underline{1})$-симметрией будет таким: $2^{(4}1^{2)}\underline{1}$, $1m\,^{(4}1^{2)}\underline{1}$, $m\,^{(4}\,11^{2)}\underline{1}$, $m\,^{(4}m1^{2)}\underline{1}$, $mm^{(4}m1^{2)}\underline{1}$, $m\,^{(4}m^{(2}1^{2)}\underline{1}$. Далее, в связи с тем, что $(42\underline{1})/(42) \simeq \underline{1}$, то последовательное умножение младших групп $\underline{1}$-симметрии конечных бордюров на группу $1^{(4}1^{2)}$ даст список нужных нам (42)-средних групп рассматриваемой категории при её обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией, т.е групп $\underline{2}\,1^{(4}1^{2)}$, $1\ \underline{m}1\,^{(4}1^{2)}$, $\underline{m}11\,^{(4}1^{2)}$, $\underline{m}m1^{(4}1^{2)}$, $m\underline{m}\,1^{(4}1^{2)}$, $\underline{m}\ \underline{m}\ 1^{(4}1^{2)}$. Далее, так как фактор-группа $(42\underline{1})/(4\underline{2}) \simeq \underline{1}$,то список 6 $(4\underline{2})$-средних групп конечных бордюров при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией будет таким: $\underline{2}\ 1^{(4}\underline{1}^{2)}$, $1\ \underline{m}1\,^{(4}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}11\,^{(4}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}m\,1^{(4}\underline{1}^{2)}$, $m\ \underline{m}\,1^{(4}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\ \underline{m}\ 1^{(4}\underline{1}^{2)}$. Наконец, в связи с тем, что $(42\underline{1})/(\underline{4}2) \simeq \underline{1}$, список $(\underline{4}2)$-средних групп конечных бордюров при их обобщении с $(42\underline{1})$-симметрией будет выглядеть так : $\underline{2}\,\underline{1}^{(4}1^{2)}$, $\underline{m}1\underline{1}^{(4}1^{2)}$, $1\underline{m}\,\underline{1}^{(4}1^{2)}$, $m\,\underline{1}^{(4}1^{2)}$, $m\underline{m}\,\underline{1}^{(4}1^{2}$, $\underline{m}\ \underline{m}\,\underline{1}^{(4}1^{2}$.

В итоге имеем, что при обобщении групп G_{210} с $(42\underline{1})$-симметрией порождается 54(= 6×3+3×2+6×5) Q-средних групп при Q=4-, (22)-, $(2\underline{2})$-, $(4\underline{1})$-, $(22\underline{1})$-, (42)-,$(4\underline{2})$-, и $(\underline{4}2)$-.

При (621)-симметрии, характеризуемой громоздкой группой подстановок P из [6], рассматриваемые группы симметрии G_{210} могут порождать только 2-,3-, $\underline{1}$-, $\underline{2}$-, 6-, (32)-, $(3\underline{2})$-, $(2\underline{1})$-, $(3\underline{1})$-, $\underline{6}$-,$(6\underline{1})$-, $(32\underline{1})$-, (62)-, $(6\underline{2})$- и $(\underline{6}2)$-средние группы. Но ввиду того, что фактор-группы $(62\underline{1})/2 \simeq 32\underline{1}$, $(62\underline{1})/3 \simeq 22'\underline{1}$, $(62\underline{1})/\underline{1} \simeq 62$, $(62\underline{1})/\underline{2} \simeq 62$, а $(62\underline{1})/(2\underline{1}) \simeq 32$ изоморфны таким P-симметриям, при которых рассматриваемые нами группы симметрии не порождают младших, то эти группы симметрии не порождают и Q-средних групп, где Q=2; 3-, $\underline{1}$-, $\underline{2}$- и $2\underline{1}$- при их обобщении с $(62\underline{1})$-симметрией.

Ввиду того, что фактор-группа $(62\underline{1})/6 \simeq 2\underline{1}$, то 6-средних групп конечных бордюров при их обобщении с $(62\underline{1})$-симметрией будет, согласно [8], тоже 6, а сам список указанных групп представится в виде $\underline{m}m\,^{2)}1\,^{(6}$, $\underline{m}\ \underline{m}\,^{2)}1\,^{(6}$, $m^{2)}\ \underline{m}1\,^{(6}$, $m^{2)}\ \underline{m}^{2)}\ 1\,^{(6}$, $\underline{m}^{2)}\ \underline{m}\ 1\,^{(6}$, $\underline{m}^{2)}\ m^{2)}\ 1\,^{(6}$. Аналогичным образом благодаря тому, что $(62\underline{1})/(32) \simeq 2\underline{1}$, для получения (32)-средних групп конечных бордюров или их обобщений с $(62\underline{1})$-симметрией нужно каждую младшую группу этой категории при $(2\underline{1})$-симметрии последовательно умножить на группу $1\,^{(3}1^{2)}$ и, следовательно, список искомых (32)-средних групп

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.48-59

будет таким: $\underline{m}\,m^{(2}1^{(3}1^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}^{(2}1^{(3}1^{2)}$, $m^{(2}\underline{m}\,1^{(3}1^{2)}$, $m^{(2}\underline{m}^{(2}1^{(3}1^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}1^{(3}1^{2)}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}1^{(3}1^{2)}$. Наконец, ввиду того, что фактор-группа (62$\underline{1}$)/(3$\underline{2}$)≃2$\underline{1}$, то список нужных нам (3$\underline{2}$)- средних групп конечных бордюров при их обобщении с (62$\underline{1}$)-симметрией представится в следующем виде: $\underline{m}\,m^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}\underline{m}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $m^{(2}\underline{m}^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}\,1^{(3}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}^{(2}m^{(2}1^{(3}\underline{1}^{2)}$.

Из этих же соображений, ввиду того, что (62$\underline{1}$)/(3$\underline{1}$)≃ 22, а (62$\underline{1}$)/$\underline{6}$≃ (2$\underline{2}$), умножение младшей группы (22)-симметрии, порожденной группами G_{210}, на группу $1^{(3}\underline{1}$ даст одну ($1^{(2}\underline{1}$)-среднюю группу при обобщении групп G_{210} с (62$\underline{1}$)-симметрией, т.е. группу $m^{(2}\,m^{2)}1^{(2}\underline{1}$, а последовательное умножение трех младших групп, порожденных группами G_{210} при их обобщении с (2$\underline{2}$)-симметрией, на группу $\underline{1}^{(6}$, даст перечень всех трех $\underline{6}$-средних групп, порожденных группами G_{210} при их обобщении с (62$\underline{1}$)-симметрией в следующем виде: $m^{(2}\underline{m}^{2)}\underline{1}^{(6}$, $\underline{m}^{2)}m^{(2}\underline{1}^{(6}$, $m^{(2'}\underline{m}^{(2}1^{(6}$.

Далее, ввиду того, что фактор-группа (62$\underline{1}$)/(6$\underline{1}$) ≃2), последовательное умножение младших групп 2)-симметрии конечных бордюров на группу $1^{(6}\underline{1}$ приведет к списку (6$\underline{1}$)- средних групп этой категории при её обобщении с (62$\underline{1}$)-симметрией в следующей записи: $2^{2)}1^{(6}\underline{1}$, $1m^{2)}1^{(6}\underline{1}$, $m^{2)}11^{(6}\underline{1}$, $m^{2)}m1^{(6}\underline{1}$, $mm^{2)}1^{(6}\underline{1}$, $m^{2)}m^{2)}1^{(6}\underline{1}$. Точно так же, ввиду того, что фактор-группа (62$\underline{1}$)/(32$\underline{1}$) ≃(2, последовательное умножение младших групп (2-симметрии конечных бордюров на группу $1^{(3}1^{2)}\underline{1}$ даст список (32$\underline{1}$)-средних групп этой категории при её обобщении с (62$\underline{1}$)-симметрией в таком виде: $2^{(2}1^{(3}1^{(2}\underline{1}$, $1m^{(2}1^{(3}1^{2)}\underline{1}$, $m^{2)}11^{(3}1^{(2}\underline{1}$, $m^{(2}m1^{(3}1^{2)}\underline{1}$, $mm^{(2}1^{(3}1^{2)}\underline{1}$, $m^{(2}m^{(2}1^{(3}1^{2)}\underline{1}$. Наконец, последовательное умножение младших групп $\underline{1}$-симметрии конечных бордюров на группы $1^{(6}1^{2)}$, $1^{(6}\underline{1}^{2)}$ и $\underline{1}^{(6}1^{2)}$ дает список 18 Q-средних групп используемой категории при её обобщении с (62$\underline{1}$)-симметрией, из которых 6 (62)-средних, 6 (6$\underline{2}$)-средних и 6 ($\underline{6}$2)-средних групп ввиду того, что фактор-группы (62$\underline{1}$)/(62) ≃ (62$\underline{1}$)/(6$\underline{2}$) ≃ (62$\underline{1}$)/($\underline{6}$2)≃$\underline{1}$. Сам же список Q-средних групп конечных бордюров при их обобщении с (62$\underline{1}$)-симметрией выглядит следующим образом: $\underline{2}1^{(6}1^{2)}$,$1\underline{m}1^{(6}1^{2)}$, $\underline{m}11^{(6}1^{2)}$, $\underline{m}m1^{(6}1^{2)}$, $m\underline{m}1^{(6}1^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}1^{(6}1^{2)}$; $\underline{2}1^{(6}\underline{1}^{2)}$, $1\underline{m}1^{(6}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}11^{(6}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}m\,1^{(6}\underline{1}^{2)}$, $m\underline{m}\,1^{(6}\underline{1}^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}\,1^{(6}\underline{1}^{2)}$ и $\underline{2}\,\underline{1}^{(6}1^{2)}$, $1\underline{m}\,\underline{1}^{(6}1^{2)}$, $\underline{m}1\underline{1}^{(6}1^{2)}$, $\underline{m}m\,\underline{1}^{(6}1^{2)}$, $m\underline{m}\,\underline{1}^{(6}1^{2)}$, $\underline{m}\,\underline{m}\,\underline{1}^{(6}1^{2)}$.

В итоге имеем, что при обобщении групп симметрии G_{210} с (62$\underline{1}$)-симметрией порождается 52 (= 6×3 + 1+3 + 6×5) Q-средних группы, где Q = 6-, (32)-, (3$\underline{2}$)-, (3$\underline{1}$)-, $\underline{6}$- , (6$\underline{1}$)-, (32$\underline{1}$)-, (62)-, (6$\underline{2}$)- и ($\underline{6}$2)-.

При (23)-симметрии, задаваемой громоздкой группой подстановок индексов из [6], рассматриваемые нами группы симметрии конечных бордюров G_{210} при их обобщении с (23)-симметрией могут порождать только (22)-средние группы. Но так как фактор-группа (23)/(22)≃3 , а при 3-симметрии отмеченные классические группы не порождают младших, поэтому рассматриваемые группы симметрии не могут порождать и (22)-средних группы при их обобщении с (23)-симметрией.

При (23$\underline{1}$)-симметрии, характеризуемой громоздкой группой подстановок индексов P из [6], постоянно используемые нами группы симметрии G_{210} могут порождать только (22)-, (22$\underline{1}$)-, $\underline{1}$- и (23)-средние группы. Но так как фактор-группы (23$\underline{1}$)/(22)≃3$\underline{1}$, (23$\underline{1}$)/(22$\underline{1}$) ≃3, а (23$\underline{1}$)/$\underline{1}$≃23 изоморфны таким P-симметриям, при которых группы G_{210} не могут порождать младших, то используемые нами группы симметрии не могут порождать также и Q-средние группы, где Q = 22-, 22$\underline{1}$- и $\underline{1}$-, при их обобщении с (23$\underline{1}$)-симметрией. Наконец, поскольку фактор-группа (23$\underline{1}$)/(23)≃$\underline{1}$, то последовательное умножение $\underline{1}$-младших групп конечных бордюров на группу $1^{(23)}$=($1^{(2}1^{3)}$) даст перечень нужных нам (23)-средних групп при их обобщении с (23$\underline{1}$)-симметрией в следующем виде: $\underline{2}(1^{(2}1^{3)})$, $1\underline{m}\,(1^{(2}1^{3)})$, $\underline{m}1(1^{(2}1^{3)})$, $\underline{m}m(1^{(2}1^{3)}$, $m\underline{m}(1^{(2}1^{3)})$, $\underline{m}\,\underline{m}(1^{(2}1^{3)})$. Таким образом, при обобщении групп G_{210} с (23$\underline{1}$)-симметрией получаем 6 (23)-средних групп.

При (43)- и ($\underline{4}$3)-симметриях, характеризуемых приведенными в [6] громоздкими группами подстановок индексов, используемые нами группы симметрии G_{210} могут порождать только (22)- и (23)-средние группы. Но так как фактор–группы (43)/(22)≃32, а ($\underline{4}$3)/(22)≃3$\underline{2}$ изоморфны таким P-симметриям, при которых у групп G_{210} нет младших, то используемые нами группы не могут порождать (22)- средние группы при их обобщении с (43)- и ($\underline{4}$3)-симметриями.

Далее, поскольку фактор-группа (43)/(23)≃2, а ($\underline{4}$3)/(23)≃$\underline{2}$,то последовательное умножение младших групп 2- и $\underline{2}$-симметрии на группы $1^{(23)}$ = ($1^{(2}1^{3)}$ даст перечень 12 (23)-средних групп использованной категории при их обобщении с (43) и ($\underline{4}$3)-симметриями в следующем виде : $2^{(2}(1^{(2}1^{3)})$, $1m^{(2}(1^{(2}1^{3)})$,

$m^{(2}1(1^{(2}1^{3)})$, $m^{(2}\,m(1^{(2}1^{3)})$, $mm^{(2}\,(1^{(2}1^{3)})$, $m^{(2}m^{(2}(1^{(?}1^{3)})$ и $\underline{2}^{(2}(1^{(2}1^{3)})$, $1\underline{m}^{(2}(1^{(2}1^{3)})$, $\underline{m}^{(2}1(1^{(2}1^{3)})$, $\underline{m}^{(2}\,m(1^{(2}1^{3)})$, $m\underline{m}^{(2}\,(1^{(2}1^{3)})$, $\underline{m}^{(2}\underline{m}^{(2}(1^{(6}1^{2)})$.

Таким образом, группы симметрии конечных бордюров при их обобщении с (43)- и ($\underline{4}$3)-симметриями порождают 12 (23)-средних групп, из которых 6 при (43)-симметрии и 6 при ($\underline{4}$3)-симметрии.

Наконец, при (43$\underline{1}$)-симметрии, характеризуемой приведенной в [6] громоздкой группой подстановок индексов, рассматриваемые группы симметрии G_{210} могут порождать только (22)-, (23)-, $\underline{1}$-, (22$\underline{1}$)-, (23$\underline{1}$)-, (43)- и ($\underline{4}$3)-средние группы. Но так как фактор-группы (43$\underline{1}$)/(22)≃32$\underline{1}$≃$\underline{6}$2, (43$\underline{1}$)/$\underline{1}$≃43, (43$\underline{1}$)/(22$\underline{1}$)≃32 изоморфны таким кристаллографическим P-симметриям, при которых группы G_{210} не порождают младших, то использованные нами группы симметрии не могут порождать и Q-средних групп, где Q=(22)- , $\underline{1}$- и (221)- при их обобщении с (43$\underline{1}$)-симметрией.

Далее, ввиду того, что фактор-группа (43$\underline{1}$)/(23) ≃2$\underline{1}$, группы G_{210} при их обобщении с (43$\underline{1}$)-симметрией, согласно [8], будут порождать шесть (23)-средних групп, список которых выглядит следующим образом: $\underline{m}\,m^{(4)}1^{3)}$, $\underline{m}\,\underline{m}^{(4}1^{3)}$, $m^{(4}\,\underline{m}\,1^{3)}$, $m^{(2}\,\underline{m}^{(4}\,1^{3)}$, $\underline{m}^{(4}\,\underline{m}\,1^{3)}$, $\underline{m}^{(2}\,m^{(4}\,1^{3)}$, так как взятые группы симметрии порождают именно столько младших групп при их обобщении с (2$\underline{1}$)-симметрией. В свою очередь, поскольку фактор-группа (43$\underline{1}$)/(23$\underline{1}$) ≃(2 , то используемые нами группы симметрии, согласно [8], будут порождать шесть (231)-средних групп при их обобщении с (43$\underline{1}$)-симметрией и их список будет таким: $2^{(4}1^{3)}\underline{1}$,$1m^{(4}1^{3)}\underline{1}$, $m^{(4}11^{(3}\underline{1}$, $m^{(4}m1^{(3}\underline{1}$, $mm^{(4}\,1^{3)}\underline{1}$, $m^{(4}\,m^{(2}1^{3)}\,\underline{1}$. Благодаря тому, что фактор-группа (43$\underline{1}$)/(43) ≃$\underline{1}$, последовательное умножение младших групп $\underline{1}$-симметрии используемых групп симметрии на группу $1^{(43)} = 1^{(4}\,1^{3)}$ даст список всех (43)-средних групп этой категории при обобщении её с (431)-симметрией в следующем виде: $\underline{2}1^{(4}1^{3)}$, $1\underline{m}\,1^{(4}\,1^{3)}$, $\underline{m}11^{(4}1^{3)}$, $\underline{m}m1^{(4}1^{3)}$, $m\underline{m}1^{(4}1^{3)}$, $\underline{m}\,\underline{m}\,1^{(4}1^{3)}$. Аналогичным образом, ввиду того, что фактор-группа (43$\underline{1}$)/($\underline{4}$3) ≃$\underline{1}$, то последовательное умножение младших групп $\underline{1}$-симметрии конечных бордюров на группу $1^{(\underline{4}3)} = \underline{1}^{(4}\,1^{3)}$ приведет к списку ($\underline{4}$3)-средних групп этой категории при их обобщении с (43$\underline{1}$)-симметрией в таком виде: $\underline{2}\,\underline{1}^{(4}1^{3)}$, $1\underline{m}\,\underline{1}^{(4}\,1^{3)}$, $\underline{m}1\underline{1}^{(4}1^{3)}$, $\underline{m}m\underline{1}^{(4}1^{3)}$, $m\underline{m}\,\underline{1}^{(4}1^{3)}$, $\underline{m}\,\underline{m}\,\underline{1}^{(4}1^{3)}$. Таким образом, группы G_{210} при их обобщении с (43$\underline{1}$)-симметрией порождают 24 (= 6+6×3) Q-средних группы при Q = (23)-, (231)-, (43)- и ($\underline{4}$3)- .

В итоге имеем, что при обобщении групп симметрии конечных бордюров G_{210} с 32 кристаллографическими P-симметриями получено 624 группы G_{210}^{P} , из которых 5 порождающих, 155 старших, 28 младших и 436 Q-средних. Все полученные 624 группы G_{210}^{P} 32 кристаллографических P-симметрий при P ≃ G_{30} полностью выписаны в интернациональной символике, а нужные при выводе этих групп фактор-группы P/Q взяты из [9].

5. Покажем, что выписанными 624 группами G_{210}^{P} кристаллографических P-симметрий интерпретируются с точностью до строения все различные 5-мерые группы симметрии, сохраняющие инвариантными в пятимерном пространстве плоскость, прямую на ней и точку на этой прямой, т.е. пятимерные группы симметрии, обозначаемые в краткой записи символом G_{5210}. Для этого рассмотрим единственную группу 1 нульмерного пространства E_0, порожденную тождественным преобразованием *e*. При её обобщении с 32 кристаллографическими P-симметриями, согласно общей теории P-симметрии [5,6], получим одну порождающую группу 1 и 31 старшую $1\times1^{(2)}$, $1\times\underline{1}$, $1\times\underline{1}^{(2)}$, … , $1\times1^{(43\underline{1})}$, т.е. трехмерные точечные группы G_0^P, записанные в символике осевых кристаллографических групп симметрии и антисимметрии [7], преобразующих трёхмерное пространство E_3. Следовательно, каждой группе из совокупности нульмерных групп G_0^P кристаллографических P-симметрий при P ≃ G_{30} соответствует единственная группа из множества групп G_{30}, имеющая с ней одинаковое строение, ибо группы G_0^P и G_{30} – это одни и те же группы, записанные в разной системе образующих элементов. Иначе говоря, между нульмерными группами G_0^P кристаллографических P-симметрий и трехмерными кристаллографическими группами симметрии G_{30}, согласно [8], устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, означающее, что группа из множества групп G_0^P и моделируемая ею группа из множества групп G_{30} имеют одинаковое строение.

Из сильно изоморфного соответствия между группами G_0^P и G_{30} следует, что первая цифра индекса групп симметрии категории G_{30}, интерпретируемых нульмерными группами G_0^P 32 кристаллографических P-симметрий, равна сумме размерности пространства, в котором содержатся группы G_{30}, связанные с нульмерными группами G_0^P использованных нами 32 кристаллографических P-симметрий, и размерности нульмерного пространства, содержащего единственную порождающую группу 1, равной второму индексу упомянутых групп симметрии категории G_{30}, а также что группы подстановок индексов, приписываемых точкам конечного бордюра при исследовании точечных групп G_{210}^P кристаллографических P-симметрий при P $\simeq G_{30}$, задают с точностью до строения в пространстве E_3 трёхмерные точечные группы симметрии G_{30} .

Точно такое же соответствие, как между группами G_0^P кристаллографических P-симметрий и трёхмерными точечными группами G_{30}, устанавливается и между группами G_{210}^P кристаллографических P-симметрий и пятимерными группами симметрии категории G_{5210} , ибо полученные группы кристаллографических P-симметрий конечных бордюров G_{210}^P базируются на группах G_{210}, преобразующих двумерное пространство с инвариантными прямой и точкой на ней , и на 32 кристаллографических P-симметриях, интерпретирующих в дополнительном трёхмерном пространстве E_3 32 трехмерные кристаллографические группы симметрии G_{30}.

Таким образом, из всего сказанного выше следует, что порождающие группы категории G_{210}^P кристаллографических P-симметрий задают такие пятимерные группы симметрии, которые преобразуют двумерное подпространство с инвариантной прямой и точкой на ней, ограниченное её трёхмерной плоскостью, переходящей в себя. Старшие группы G_{210}^Pкристаллографических P-симметрий задают такие пятимерные группы симметрии, которые одновременно и независимо друг от друга преобразуют двумерное и трехмерное подпространства пятимерного пространства ввиду того, что каждая старшая группа из множества G_{210}^P кристаллографических P-симметрий разлагается в прямое произведение порождающей группы, преобразующей двумерное пространства E_2 с инвариантными прямой и точкой на ней пятимерного пространства E_5, и группы кристаллографической P-симметрии, преобразующие дополнительное трехмерное подпространство E_3 того же пятимерного пространства. В свою очередь, младшие группы из множества групп G_{210}^P кристаллографических P-симметрий, изоморфные порождающим, задают такие пятимерные группы симметрии, которые целиком преобразуют пятимерное пространство E_5 как единое целое.

Наконец, строение 5-мерных групп симметрии категории G_{5210} , задаваемых Q-средними группами категории G_{210}^P кристаллографических P-симметрий, зависит от самой кристаллографической P-симметрии, при которой исходные группы G_{210}^P порождают Q-средние группы. Так, 2-средние группы при 4-симметрии категории G_{210}^P интерпретируют такие 5-мерные группы симметрии, у которых к ранее полученным 5-мерным группам, задаваемым младшими группами G_{210}^P при 2-симметрии, добавляется в трехмерном подпространстве 5-мерного пространства поворот второго порядка вокруг прямой, проходящей через инвариантную точку группы симметрии категории G_{210}^P. В свою очередь, 3-средние группы при 6-симметрии категории G_{210}^P задают такие пятимерные группы симметрии, у которых к ранее полученным 5-мерным группам симметрии, задаваемым младшими группами G_{210}^P при 2-симметрии, добавляется в трёхмерном подпространстве 5-мерного пространства поворот третьего порядка вокруг оси, проходящей через инвариантную точку рассматриваемых нами пятимерных групп симметрии G_{5210}, и т.д.

Аналогичным образом можно выявить структуру пятимерных групп симметрии категории G_{5210} , задаваемых всевозможными видами Q-средних групп категории G_{210}^P при всех использованных кристаллографических P-симметриях.

Отметим, что такое разнообразие структур пятимерных групп симметрии G_{5210}, интерпретируемых разными типами групп G_{210}^P кристаллографических P-симметрий, объясняется тем, что порождающие, младшие и Q-средние группы из множества G_{210}^P кристаллографических P-симметрий являются подгруппами старших групп этой категории.

В целом, как мы показали, между выведенными 624 группами G_{210}^P кристаллографических P-симметрий и пятимерными группами симметрии G_{5210} установилось не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, означающее, что группа категории G_{210}^P кристаллографических P-симметрий и моделируемая ею группа симметрии категории G_{5210} имеют одинаковое строение. Следовательно, различных пятимерных групп симметрии категории G_{5210} имеется ровно 624.

6. Таким образом, поставленная в настоящей работе задача полностью решена. С помощью полученного каталога групп G_{210}^P 32 кристаллографических P-симметрий в геометрической классификации установлено, что имеется 624 различных группы симметрии с инвариантными двумерной плоскостью, прямой в ней и точкой на ней, то есть пятимерные группы симметрии категории G_{5210}, которые интерпретируются с точностью до строения группами G_{210}^{P} кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$.

Заметим, что установленное число различных пятимерных групп симметрии категории G_{5210} является абсолютно точным. Наша уверенность в этом основывается на том факте, что групп симметрии категории G_{5210} должно быть столько, как отмечено на стр.97 в [6], сколько групп симметрии содержит категория G_{5430}, совпадающая с категорией G_{5410}. Но пятимерные группы симметрии категории G_{5430} моделируются трехмерными точечными группами двукратной антисимметрии G_{30}^{P} , которых также 624 [3, табл. III, стр. 164], а пятимерные группы симметрии категории G_{5410} моделируются группами симметрии и антисимметрии 4-мерных конечных стержней, которых, согласно [3], 122 группы симметрии. Имея эти данные, можно сказать, что среди групп симметрии и антисимметрии конечных четырёхмерных стержней G_{41}^{1} содержится 122 порождающих, 122 старших и 380 младших групп, то есть 624 группы симметрии и антисимметрии конечных 4-мерных стержней, которыми с точностью до строения интерпретируются 624 пятимерные группы симметрии G_{5410}, хотя запись самих групп симметрии конечных 4-мерных стержней до сих пор не установлена.

Литература:

1. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Числовой обзор полного вывода пространственных групп магнитной симметрии кристаллов. В: *Кристаллография*, 2007, т.52, №6, с.1088-1095.
2. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Применение пространственных групп кристаллографических P-симметрий к исследованию шестимерных групп симметрии. В: *Кристаллография*, 2009, т.54, №4, с.581-589.
3. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Полная схема четырехмерных кристаллографических групп симметрии. В: *Кристаллография*, 2012, т.57, №4, с.539-545.
4. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. *Теория простой и кратной антисимметрии*. Кишинев: Штиинца, 1976. 283 с.
5. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ГАЛЯРСКИЙ, Э.И., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Цветная симметрия, её обобщения и приложения*. Кишинев: Штиинца, 1978. 275 с.
6. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *P-симметрия и её дальнейшее развитие*. Кишинёв: Штиинца, 1986. 156 с.
7. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Геометрическая классификация P-симметрий. В: *ДАН СССР*, 1981, т.256, №4, с.856-859.
8. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме P-симметрий. В: *Изв. АНРМ. Математика*, 1994, №1, с.75-84.
9. ПАЛИСТРАНТ, А. Исследование пятимерных точечных групп симметрии с инвариантной двумерной плоскостью и неподвижной точкой на ней. В: *Studia Universitatis. Revista Stintifica. Seria: Stiinţe exacte şi economice*, nr.2 (52). Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2012, p.17-30.

Исследование выполнено при поддержке проекта 12.839.08.07F Высшего совета по науке и технологическому развитию АН Молдовы (CSŞDT AŞM).

Prezentat la 07.10.2013