STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.39-47

GRUPURILE CRISTALOGRAFICE DE $\overline{4}$ – SIMETRIE CU GRUPURILE GENERATOARE DE CATEGORIA G_{320}

Alexandru LUNGU, Marina ROŞCA
Universitatea de Stat din Moldova

În această lucrare sunt deduse şi descrise grupurile tuturor tipurilor posibile ale $\overline{4}-$simetriei ce au în calitate de grupuri generatoare grupurile cristalografice de categoriile G_{20} şi G_{320}.
Cuvinte-cheie: *simetrii generalizate, grupuri, cvasiomomorfisme de dreapta.*

THE CRYSTALLOGRAPHIC GROUPS OF $\overline{4}$ – SYMMETRY WITH THE GENERATING GROUPS OF CATEGORY G_{320}

In this paper are drawn and described possible groups for all types of $\overline{4}-$symmetry groups who as generating crystallographic groups of categories G_{20} and G_{320}.
Keywords: *generalized symmetries, groups, right quasi-homomorphism.*

1. Scopul studiului efectuat în această lucrare este de a analiza, în general, $\overline{4}-$simetria (cazul când $P \cong C_4$), apoi de a deduce grupurile de diferite tipuri posibile ale acestei generalizări din grupurile cristalografice de categoriile G_{20} (numite grupuri de rozete) şi G_{320} (numite grupuri de tablete) în calitate de grupuri generatoare şi, în sfârşit, de a descrie structura concretă a unora din grupurile deduse. Bazele teoriei generale a $\overline{P}-$simetriei, elaborate într-un şir de lucrări [5-8,1,4], asigură un suport teoretic solid pentru diferite cercetări concrete. Vom menţiona că această lucrare completează rezultatele concrete publicate în [2] pe tematica grupurilor de $\overline{P}-$simetrii cristalografice ciclice cu grupurile generatoare de categoria G_{320}.

2. Mulţimea $G^{(P)}$ transformărilor de $\overline{P}-$simetrie a unei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu legea de compoziţie a elementelor $p_i g_i \bullet p_j g_j = p_k g_k$, unde $g_k = g_i g_j$, $p_k = p_i p_j^{g_i}$, $p_j^{g_i} = g_i p_j g_i^{-1} = \vec{\varphi}_{g_i}(p_j)$, iar $\vec{\varphi}_{g_i}$ este automorfismul grupului P ce corespunde lui g_i din grupul generator G conform omomorfismului însoţitor $\varphi : G \to AutP$ cu nucleul $H = Ker\varphi$. Totalitatea componentelor geometrice g formează grupul generator $G = \{g \mid g^{(p)} \in G^{(P)}\}$, iar totalitatea componentelor-substituţii p formează mulţimea $P' = \{p \mid g^{(p)} \in G^{(P)}\}$, care, în general, nu este grup, dar verifică condiţia $e \subseteq P' \subseteq P$. Grupul G se numeşte grup generator pentru $G^{(P)}$, P se numeşte grup de definire, iar totalitatea grupurilor de $\overline{P}$ – simetrie cu acelaşi grup generator – familie. Intersecţia H' a grupului $G^{(P)}$ cu grupul său generator G reprezintă subgrupul lui de simetrie ($H' = G^{(P)} \cap G$), iar intersecţia Q a grupului $G^{(P)}$ cu totalitatea P' reprezintă subgrupul de transformări $P-$identice ale grupului $G^{(P)}$ ($Q = G^{(P)} \cap P' = G^{(P)} \cap P$).

Orice grup $G^{(P)}$ de $\overline{P}-$simetrie este subgrup în produsul semidirect de dreapta al grupului de definire P cu grupul generator G, însoţit de omomorfismul fixat $\varphi : G \to AutP$, unde $\varphi(g) = \vec{\varphi}_g$ pentru orice $g \in G$ şi $\vec{\varphi}_g(p) = gpg^{-1}$, adică $G^{(P)} \le P \leftthreetimes_{\varphi H(\Phi)} G$. În acest caz H este nucleul omomorfismului φ ($H = Ker\varphi$), iar Φ este imaginea completă a grupului G ($\Phi = \operatorname{Im}\varphi \le AutP$).

Pentru grupurile de substituţii P finite orice grup de $\overline{P}$ – simetrie poate fi dedus din grupul său generator G, ştiind nucleul H al omomorfismului însoţitor $\varphi: G \to AutP$ (unde $H \triangleleft G$), conform următorilor paşi: 1) se găsesc în P toate subgrupurile Q şi submulţimile P' ce se descompun în clase de resturi de dreapta în raport cu Q, iar în G toate subgrupurile H' de indice egal cu puterea mulţimii tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui P' în raport cu Q, pentru care există izomorfismul grupurilor-factor P''/Q şi H/H'', unde $e \le Q \le P'' \subseteq P'$ şi $Q \triangleleft P'' < P$, iar $H'' = H' \cap H$ şi $H'' \triangleleft H$; 2) se construieşte cvasiomomorfismul de dreapta generalizat $\widetilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului G pe mulţimea tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui P' în raport cu Q, însoţit de omomorfismul φ cu nucleul H, şi care păstrează corespondenţa dintre elementele lui P'' şi H obţinută în rezultatul izomorfismului grupurilor-factor H/H'' şi P''/Q; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare p' din $Qp = \widetilde{\psi}(g)$ şi în mulţimea acestor perechi se introduce operaţia $p_i g_i \bullet p_j g_j = p_k g_k$, unde $p_k = p_i \vec{\varphi}_{g_i}(p_j)$, $g_k = g_i g_j$, $\vec{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$ şi $\vec{\varphi}_{g_i}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (teorema principală a $\overline{P}$ – simetriei) [8,4].

Pentru grupurile $G^{(P)}$ de $\overline{P}$ – simetrie au fost elaborate simboluri cu mai mulţi termeni (simboluri polinomiale) $G|H'[\{P,P_i\}|(P')|P''|Q;H/H'''/H'']$, care includ în sine o informaţie detaliată despre structura grupului respectiv: 1) G este grupul generator; 2) H' este subgrupul de simetrie în $G^{(P)}$; 3) $\{P,P_i\}$ este simbolul grupului de definire (grup concret de substituţii cu subgrupul staţionar P_i), 4) (P') este totalitatea componentelor-substituţii ale elementelor grupului $G^{(P)}$; 5) Q este subgrupul de transformări P – identice din $G^{(P)}$; 6) H este nucleul omomorfismului însoţitor $\varphi: G \to AutP$; 7) $H'' = H' \cap H$ este subgrupul de simetrie în subgrupul de P – simetrie $H^{(P)}$; 8) $H/H'''/H''$ este simbolul trinomial al grupului $H^{(P)}$. Vom menţiona că H/H'' este izomorf cu subgrupul P'' al grupului de definire, unde $P'' = \{p \,|\, h^{(p)} \in H^{(P)}\}$, iar H'''/H'' este izomorf cu $P_i' = P_i \cap P''$.

3. În continuare vom analiza rezultatele concrete obţinute în procesul de deducere şi descriere a grupurilor de $\overline{4}$ – simetrie din grupurile de tablete în calitate de grupuri generatoare G. Grupurile cristalografice de categoria G_{320} le vom prezenta în simbolica lui Şubnikov cu ajutorul unui sistem generator ireductibil. Conform lui Şubnikov, axele şi planele de simetrie se notează tot aşa ca şi în simbolica internaţională, pe când perpendicularitatea elementelor de simetrie se notează nu prin linie fracţionară, ci prin două puncte, iar paralelismul lor – printr-un punct. Axele de rotoreflexie de ordinul N se notează prin simbolul $\tilde{N}$. Grupurile concrete de substituţii P şi subgrupurile lor pentru $\overline{P}$ – simetriile cristalografice ($P \cong S$, unde S este unul din grupurile punctuale cristalografice) le vom prezenta cu ajutorul simbolurilor Schonflies ale grupurilor respective S.

Deoarece grupul de definire $P = \{e, p = (1234), p^2 = (13)(24), p^{-1} = (1432)\}$ este ciclic de ordinul 4, apoi el conţine numai subgrupul netrivial $P' = \{e, p^2\}$ de ordinul 2. Prin urmare, pentru $\overline{4}$ – simetrie nu pot exista atât grupuri semimijlocii, cât şi grupuri pseudomijlocii. Deci, în orice familie de grupuri de $\overline{4}$ – simetrie pot exista numai grupuri generatoare, majore, minore, mijlocii, semimajore, semiminore sau pseudominore. Întâi de toate, vom menţiona că grupurile majore de $\overline{P}$ – simetrie nedegenerată cu grupul generator G ($e < Q = P' = P$), în corespundere cu teorema principală a $\overline{P}$ – simetriei, se deduc în formă de produs semidirect de dreapta nedegenerat [1] al grupului de definire P cu grupul G, însoţit de omomorfismul $\varphi: G \to AutP$, care este construit conform legii $\varphi(g) = \vec{\varphi}_g$, unde $\vec{\varphi}_g(p_i) = g p_i g^{-1}$.

În cazul concret cercetat grupul tuturor automorfismelor $AutP=\{1^{\alpha},2^{\alpha}\}$, unde 1^{α} este automorfismul identic, iar automorfismul 2^{α} aplică unul pe celălalt elementele de ordinul 4 p și p^{-1}. Ca consecință, nucleul $H=Ker\varphi$ al omomorfismului însoțitor trebuie să fie un subgrup de indicele 2 în grupul generator G.

Vom menționa că în cele 31 grupuri de tabletă ($1,2,3,4,6,\ 1\cdot m,2\cdot m,3\cdot m,\ 4\cdot m,6\cdot m,\ 1:m,$ $2:m,3:m,\ 4:m,6:m,\ m\cdot 1:m,m\cdot 2:m,\ m\cdot 3:m,m\cdot 4:m,m\cdot 6:m,\ \tilde{2},\tilde{4},\tilde{6},\tilde{2}\cdot m,\ \tilde{4}\cdot m,\tilde{6}\cdot m,$ $1:2,\ \ 2:2,\ 3:2,4:2,6:2$) există exact 59 de divizori normali ($H\lhd G$) de indicele 2. Pentru fiecare din cele 59 subgrupuri invariante de indicele 2, în calitate de nucleu, construim produsul semidirect de dreapta, respectiv, $P\leftthreetimes_{\varphi H(\Phi)}G=[P,G,H,\Phi]$, unde $\Phi=AutP$ (deoarece $G/H\cong C_2\cong AutP$).

Vom analiza în detalii numai un singur exemplu concret. Grupul $G=\tilde{4}\cdot m$ are trei divizori normali de indicele 2, anume: $H_1=\tilde{4}, H_2=2\cdot m$ și $H_3=2:2$. Subgrupurile H_2 și H_3, fiind grupuri neciclice de ordinul 4, sunt izomorfe între ele, dar sunt caracterizate de ansambluri de elemente de simetrie cu conținut geometric diferit [3]. În rezultat, se obțin 3 grupuri majore diferite de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu același grup generator $\tilde{4}\cdot m$, anume: $G_1=[P,G,H_1,\Phi]=[\{C_4,C_1\},\tilde{4}\cdot m,\tilde{4},C_2^{\alpha}]$, $G_2=[\{C_4,C_1\},\tilde{4}\cdot m,2\cdot m,C_2^{\alpha}]$ și $G_3=[\{C_4,C_1\},\tilde{4}\cdot m,2:2,C_2^{\alpha}]$. Deosebirea dintre grupurile G_1, G_2 și G_3 se manifestă la nivelul operațiilor lor de grup, unde anumite elemente concrete g din grupul generator G se manifestă diferit generând diferite automorfisme ale grupului P.

În debutul deducerii și analizei grupurilor semimajore sau mijlocii de $\overline{4}-$simetrie cu grupurile generatoare de categoria G_{320} vom menționa următoarele. Grupul de definire P, fiind ciclic de ordinul 4, are un singur subgrup netrivial P' de ordinul 2. Mai mult, restricția oricărui automorfism al lui P pe subgrupul P' coincide cu automorfismul identic. Ca consecință, grupurile $P'-$semimajore ce se obțin formal nu se deosebesc prin nimic de grupurile majore de $2-$simetrie, care se deduc în formă de produs direct al grupului de definire P' cu grupul generator G, adică $G^{(P)}=P'\times G$. Deci, există 31 grupuri $2-$semimajore de $\overline{4}-$simetrie cu grupurile generatoare de tablete.

Deoarece subgrupul $P'=Q$ este un divizor normal de indicele 2 în grupul $P(\cong C_4)$, apoi , conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, pentru grupurile $Q-$mijlocii trebuie de construit un cvasiomomorfism de dreapta generalizat $\tilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului generator G pe grupul factor P/Q, a cărui restricție pe $H=Ker\varphi$ să fie un omomorfism cu nucleul $H''=H\cap H'$ pe grupul factor P''/Q, unde $Q\leq P''\leq P$. Deci, P'' poate fi egal cu subgrupul Q sau cu P.

Fie $P''=Q$. Atunci H'' trebuie să coincidă cu H, ceea ce este posibil numai în cazul când $H\leq H'$, adică când $H=H'$ (H este subgrup de indicele 2 în G, iar $H'\neq G$). Ca consecință, se obțin 59 grupuri $2-$mijlocii de $\overline{4}-$simetrie cu simbolurile polinomiale $G|H[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_2;H/H/H]$, unde H este subgrup de indicele 2 în grupul generator de tabletă G. Vom menționa că cele 59 grupuri $2-$mijlocii de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată, obținute mai sus, practic coincid cu grupurile $2-$mijlocii de $4-$simetrie cu aceleași grupuri generatoare. Ultimele se deduc din grupurile date P și G prin inermediul omomorfismului $\lambda:G\to P/Q$ cu nucleul H'.

În cazul când $P''=P$, subgrupul $H''=H\cap H'$ trebuie să fie de indicele 2 în H. Deci, în cazul analizat vom avea că $H/H''\cong P/Q$ și $G/H\cong C_2\cong P/Q$. Prin urmare, grupul $2-$mijlociu de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator G, subgrupul de simetrie H' și nucleul omomorfismului însoțitor H, dacă el există, coincide formal cu grupul respectiv de $4-$simetrie. Vom menționa că, în cazul dat, subgrupurile H şi H' sunt de indicele 2 în grupul generator G, iar intersecția lor H'' este subgrup de indicele 2 în H. Mai mult, grupul $2-$mijlociu respectiv de $4-$simetrie există întotdeauna, în virtutea faptului că $G/H' \cong P/Q$.

4. Vom descrie grupurile minore de $\overline{4}-$simetrie. Conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, pentru a deduce grupurile minore cu grupul generator G trebuie să se caute în G aşa subgrupuri H', al căror indice coincide cu ordinul grupului P. Deci, trebuie analizate numai grupurile G ce conțin subgrupuri de indicele 4. În rezultatul cercetării respective a celor 31 grupuri generatoare am constatat că numai grupurile $4, \tilde{4}, 2\cdot m, 4\cdot m, 6\cdot m,$ $2:m, 4:m,$ $6:m,$ $m\cdot 1:m$, $m\cdot 2:m$, $m\cdot 3:m$, $m\cdot 4:m$, $m\cdot 6:m$, $\tilde{2}\cdot m$, $\tilde{4}\cdot m$, $\tilde{6}\cdot m$, $2:2, 4:2, 6:2$ au subgrupuri H' de indicele 4. Vom analiza în detalii toate cazurile respective de deducere a grupurilor minore.

Fie $G=4$, $H=2$, iar $H'=1$. Deoarece grupul factor G/H' este izomorf cu grupul P considerat, apoi grupul minor ce se obține este de $4-$simetrie cu simbolul binomial $4/1$. Concluzia este că nu există grup minor de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator $G=4$. O situație similară se obține şi în cazul grupului generator $G=\tilde{4}$.

Fie $G=2\cdot m$, $H=2$, iar $H'=1$. În acest caz, $H''=H\cap H'=1$, iar grupul factor $2/1$ este izomorf cu un subgrup P'' din grupul dat P. Construim aplicația ψ a grupului $G=2\cdot m$ pe grupul $P(\cong C_4)$ cu nucleul $H'=1$, anume: $\psi(1)=e, \psi(2)=p^2, \psi(m_1)=p$ şi $\psi(m_2)=p^{-1}$. Este uşor de verificat că ψ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoțit de omomorfismul $\varphi: 2\cdot m \to \{1^\alpha, 2^\alpha\}$ cu nucleul $H=2$. În rezultat se obține grupul minor de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolul polinomial $2\cdot m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2/1/1]$. În mod analog pentru $G=2\cdot m$, $H=m$ şi $H'=1$ se obține grupul minor de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolul polinomial $2\cdot m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ m/1/1]$.

Cercetarea cazurilor când $G=2:2$, $G=2:m$, $G=\tilde{2}\cdot m$ şi $G=m\cdot 1:m$ este similară cazului $G=2\cdot m$. Ca consecință, se obțin încă 9 grupuri minore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolurile polinomiale respective: 1) $2:2|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ 2/1/1]$, 2) $2:m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ 2/1/1]$, 3) $2:m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ m/1/1]$, 4) $2:m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ \tilde{2}/1/1]$, 5) $\tilde{2}\cdot m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ \tilde{2}/1/1]$, 6) $\tilde{2}\cdot m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ 2/1/1]$, 7) $\tilde{2}\cdot m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ m/1/1]$ 8) $m\cdot 1:m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ m/1/1]$ şi 9) $m\cdot 1:m|1[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2/C_1;\ 2/1/1]$.

Fie $G=4\cdot m$. Vom analiza pe rând ambele cazuri ale subgrupurilor de indicele 2 $H_1=4$ şi $H_2=2\cdot m_i$, $i=1,2$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 4 din $G=4\cdot m$, anume: $H_1'=2$ şi $H_2'=m_i$, $i=1,2,3,4$. Pentru $G=4\cdot m$, $H=4$ şi $H'=2$ se obține grupul minor de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată $G^{(P)}=\{e1, e2, p^2 4, p^2 4^{-1}, pm_1, pm_3, p^{-1}m_2, p^{-1}m_4\}$ cu simbolul polinomial $4\cdot m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 4/2/2]$, deoarece aplicația ψ a grupului $G=4\cdot m$ cu nucleul $H'=2$ pe grupul $P(\cong C_4)$ este un cvasiomomorfism de dreapta nedegenerat, însoțit de omomorfismul $\varphi: 4\cdot m \to \{1^\alpha, 2^\alpha\}$ cu nucleul $H=4$. O cercetare analogică pentru $G=4\cdot m$,

$H=4$ şi $H'=m_1$ ne dă grupul minor $G^{(P)}=\{e1, em_1, p4, pm_2, p^2 2, p^2 m_3, p^{-1}4^{-1}, p^{-1}m_4\}$ cu simbolul $4\cdot m\,|\,m[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_4\,|\,C_1;\ 4/1/1]$, iar pentru $G=4\cdot m$, $H=2\cdot m_1$ şi $H'=2$ se obţine grupul minor $G^{(P)}=\{e1, e2, p4, p4^{-1}, p^2 m_1, p^2 m_3, p^{-1}m_2, p^{-1}m_4\}$ cu simbolul $4\cdot m\,|\,2[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 2\cdot m/2/2]$.

Situaţia se deosebeşte radical pentru subcazurile următoare. Dacă $G=4\cdot m$, $H=2\cdot m_1$ şi $H'=m_1$, atunci $H''=m_1 \lhd H$ şi $H/H''\cong P''<P$. Cu regret, nu poate fi construit cvasiomomorfismul de dreapta ψ al grupului $G=4\cdot m$ cu nucleul $H'=m_1$ pe grupul $P(\cong C_4)$, însoţit de omomorfismul $\varphi: G\to AutP$ cu nucleul $H=2\cdot m_1$, de aceea nu există grup minor de $\bar{4}-$simetrie nedegenerată cu structura respectivă. Vom menţiona că nu poate fi construit nici omomorfismul ψ al grupului $G=4\cdot m$ cu nucleu $H'=m_1$ pe grupul $P(\cong C_4)$, deoarece subgrupul $H'=m_1$ nu este divizor normal în grupul $G=4\cdot m$. Ca rezultat, putem afirma că nu există nici grupul minor de $4-$simetrie cu grupul generator $G=4\cdot m$ şi subgrupul de simetrie $H'=m_1$. Dacă $G=4\cdot m$, $H=2\cdot m_1$ iar $H'=m_2$, atunci $H''=1$ şi $H/H''=2\cdot m/1$ nu este izomorf cu un subgrup P'' a lui P. Ca consecinţă, nu există grup minor de $\bar{4}-$simetrie nedegenerată cu structura respectivă.

Cercetarea grupului $G=4:2$ este similară cazului $G=4\cdot m$. În rezultat se vor obţine încă 3 grupuri de $\bar{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolurile $4:2\,|\,2[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 4/2/2]$, $4:2\,|\,2'[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_4\,|\,C_1;\ 4/1/1]$ şi $4:2\,|\,2[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 2:2/2/2]$.

Acum vom studia cazul pentru $G=\tilde{4}\cdot m=\{1, \tilde{4}, 2, \tilde{4}^{-1}, m_1, 2_2, m_3, 2_4\}$. Vom analiza pe rând toate subcazurile posibile pentru subgrupurile de indicele 2 $H_1=\tilde{4}$, $H_2=2\cdot m$ şi $H_3=2:2$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 4 din $G=\tilde{4}\cdot m$, anume: $H_1'=2$ (axa de rotaţie 2 coincide cu axa principală $\tilde{4}$), $H_2'=m_i'$, $i=1,3$ (planele de reflexie m_i' trec prin axa principală $\tilde{4}$) sau $H_3'=2_i'$, $i=2,4$ (axele de rotaţie $2_i'$ sunt perpendiculare pe axa principală $\tilde{4}$). Pentru $G=\tilde{4}\cdot m$, $H=\tilde{4}$ şi $H'=2$ se obţine grupul minor de $\bar{4}-$simetrie nedegenerată $G^{(P)}=\{e1, e2, p^2\tilde{4}, p^2\tilde{4}^{-1}, pm_1, pm_3, p^{-1}2_2, p^{-1}2_4\}$ cu simbolul polinomial $\tilde{4}\cdot m\,|\,2[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ \tilde{4}/2/2]$. Pentru $G=\tilde{4}\cdot m$, $H=\tilde{4}$ şi $H'=m'$ se obţine grupul minor cu simbolul $\tilde{4}\cdot m\,|\,m'[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_4\,|\,C_1;\ \tilde{4}/1/1]$, iar pentru $G=\tilde{4}\cdot m$, $H=\tilde{4}$ şi $H'=2'$ se obţine grupul minor de $\bar{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolul $\tilde{4}\cdot m\,|\,2'[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_4\,|\,C_1;\ \tilde{4}/1/1]$.

Dacă $G=\tilde{4}\cdot m$, $H=2\cdot m$ şi $H'=2$, atunci se obţine grupul minor cu simbolul polinomial $\tilde{4}\cdot m\,|\,2[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 2\cdot m/2/2]$. Pentru $G=\tilde{4}\cdot m$, $H=2\cdot m$ şi $H'=m'$ se obţine grupul cu simbolul $\tilde{4}\cdot m\,|\,m'[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 2\cdot m/m/m]$, iar pentru $G=\tilde{4}\cdot m$, $H=2\cdot m$ şi $H'=2'$ nu se obţine niciun grup minor de $\bar{4}-$simetrie nedegenerată, deoarece $H''=1$ şi H/H'' este grup neciclic de ordinul 4, iar în grupul P $(\cong 4)$ nu există subgrupuri P'' neciclice de ordinul 4. Rezultate similare (2 grupuri minore de $\bar{4}-$simetrie) se obţin şi în subcazurile $H=2:2$, anume: $\tilde{4}\cdot m\,|\,2[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 2:2/2/2]$şi $\tilde{4}\cdot m\,|\,2'[\{C_4, C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\ 2:2/2'/2']$.

Mai departe vom analiza grupurile abeliene $4:m$, $m\cdot 2:m$ şi $6:m$. Fie $G=4:m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt: $H_1=2:m$, $H_2=4$ şi $H_3=\tilde{4}$. Subgrupurile de indicele 4 sunt: $H_1'=2$, $H_2'=m$ (planul de reflexie m este perpendicular axei principale 4) şi $H_3'=\tilde{2}$. Grupuri minore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată dau numai subcazurile când $H'=2$, deoarece grupul factor G/H' este neciclic de ordinul 4, iar grupul P este ciclic de ordinul 4. Se obțin 3 grupuri cu următoarele simboluri polinomiale: $4:m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 4/2/2]$, $4:m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ \tilde{4}/2/2]$ şi $4:m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2:m/2/2]$.

Fie acum $G=m\cdot 2:m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt: $H_1=2:m$, $H_2=2\cdot m$ şi $H_3=2:2$. Subgrupurile de indicele 4 sunt: $H_1'=2_i$, unde $i=1,2,3$; $H_2'=m_i$, unde $i=1,2,3$; $H_3'=\tilde{2}$. Vom menționa că toate grupurile factor G/H' sunt neciclice de ordinul 4. Conform metodei de deducere a grupurilor minore de $\overline{P}-$simetrie, grupul factor H/H'' trebuie să fie izomorf cu unul din subgrupurile lui P, unde H este nucleul omomorfismului însoțitor, $H''=H\cap H'$, iar H' este subgrupul de simetrie al grupului minor. Prin urmare, pentru grupurile minore respective grupul factor H/H'' trebuie să fie un grup ciclic de ordinul 1, 2 sau 4, ceea ce este posibil numai când $H''=H'$. În total se obțin 6 grupuri minore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolurile polinomiale următoare:

1) $m\cdot 2:m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2:2/2/2]$,
2) $m\cdot 2:m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2\cdot m/2/2]$,
3) $m\cdot 2:m|m[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2\cdot m/m/m]$,
4) $m\cdot 2:m|2[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2:m/2/2]$,
5) $m\cdot 2:m|m[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2:m/m/m]$,
6) $m\cdot 2:m|\tilde{2}[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 2:m/\tilde{2}/\tilde{2}]$.

Vom analiza rezultatele obținute în cazul grupului generator $G=6:m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt: $H_1=3:m$, $H_2=6$ şi $H_3=\tilde{6}$. De indicele 4 este numai subgrupul $H'=3$. Pentru toate subcazurile $H''=3$. Deci, $H/H''\cong 2$, iar $G/H'\cong 2:m$. Se obțin următoarele 3 grupuri minore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolurile polinomiale: 1) $6:m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3:m/3/3]$, 2) $6:m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 6/3/3]$ şi 3) $6:m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ \tilde{6}/3/3]$.

Cercetarea grupurilor izomorfe între ele $6\cdot m$, $6:2$, $\tilde{6}\cdot m$ şi $m\cdot 3:m$ este analogică. Vom analiza în detalii numai cazul când $G=6\cdot m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt: $H_1=3\cdot m$ şi $H_2=6$. De indicele 4 este numai subgrupul $H'=3$. Pentru ambele subcazuri $H''=3$. Deci, $H/H''\cong 2$, iar $G/H'\cong 2\cdot m$. Pentru toate 4 grupuri generatoare se obțin 10 grupuri minore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu simbolurile:
1) $6\cdot m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 6/3/3]$, 2) $6\cdot m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3\cdot m/3/3]$, 3) $6:2|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 6/3/3]$, 4) $6:2|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3:2/3/3]$, 5) $\tilde{6}\cdot m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ \tilde{6}/3/3]$, 6) $\tilde{6}\cdot m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3\cdot m/3/3]$, 7) $\tilde{6}\cdot m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3:2/3/3]$, 8) $m\cdot 3:m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3\cdot m/3/3]$, 9) $m\cdot 3:m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ 3:m/3/3]$ şi 10) $m\cdot 3:m|3[\{C_4,C_1\}|(C_4)|C_2|C_1;\ \overline{3}/3/3]$.

Fie acum $G = m \cdot 4 : m.$ Subgrupurile de indicele 2 sunt: $H_1 = 4 : m$, $H_2 = 4 \cdot m$, $H_3 = m \cdot 2 : m$, $H_4 = \tilde{4} \cdot m$ şi $H_5 = 4 : 2$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 4 din $G = m \cdot 4 : m$, şi anume: 2 subgrupuri de tipul $2 : 2$ (ambele invariante), 6 subgrupuri de tipul $2 \cdot m$ (numai două din ele sunt invariante), 5 subgrupuri de tipul $2 : m$ (numai unul este invariant), $H' = 4$ sau $H' = \tilde{4}$. Vom menționa că invariante sunt numai acele subgrupuri, care sunt caracterizate de ansambluri de elemente de simetrie, printre care numaidecât este şi axa de rotație de ordinul 2 ce coincide cu axa de ordinul 4. Mai mult, grupurile factor G/H' sunt neciclice de ordinul 4. Conform metodei de deducere a grupurilor minore de $\overline{P}-$simetrie nedegenerată, grupul factor H/H'' trebuie să fie izomorf cu unul din subgrupurile lui P, adică grupul factor H/H'' trebuie să fie un grup ciclic de ordinul 1, 2 sau 4.

După o cercetare detaliată a tuturor posibilităților concrete pentru H şi H', efectuând etapele teoremei principale de deducere a grupurilor de $\overline{P}-$simetrie nedegenerată, au fost obținute 17 grupuri minore din grupul generator $G = m \cdot 4 : m.$ Menționăm că axa de ordinul 2 ce coincide cu axa de ordinul 4 am notat-o cu simbolul 2, iar pe celelalte axe de acelaşi ordin (ele sunt perpendiculare axei de ordinul 4) le-am notat cu simbolul $2'$. Lista celor 17 grupuri minore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu grupul generator $G = m \cdot 4 : m$ este următoarea:

1) $m \cdot 4 : m \,|\, 2' \cdot m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_4 \,|\, C_1; 4 : m / m / m]$,
2) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 : m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; 4 : m / 2 : m / 2 : m]$,
3) $m \cdot 4 : m \,|\, 2' : m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_4 \,|\, C_1; 4 : m / \tilde{2} / \tilde{2}]$,
4) $m \cdot 4 : m \,|\, 4[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; 4 : m / 4 / 4]$,
5) $m \cdot 4 : m \,|\, \tilde{4}[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; 4 : m / \tilde{4} / \tilde{4}]$,
6) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 \cdot m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; 4 \cdot m / 2 \cdot m / 2 \cdot m]$,
7) $m \cdot 4 : m \,|\, 4[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_2) \,|\, C_4 \,|\, C_1; 4 \cdot m / 4 / 4]$,
8) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 : 2[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; m \cdot 2 : m / 2 : 2 / 2 : 2]$,
9) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 \cdot m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; m \cdot 2 : m / 2 \cdot m / 2 \cdot m]$,
10) $m \cdot 4 : m \,|\, 2' \cdot m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; m \cdot 2 : m / 2' \cdot m / 2' \cdot m]$,
11) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 : m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; m \cdot 2 : m / 2 : m / 2 : m]$,
12) $m \cdot 4 : m \,|\, 2' : m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; m \cdot 2 : m / 2' : m / 2' : m]$,
13) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 : 2[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; \tilde{4} \cdot m / 2 : 2 / 2 : 2]$,
14) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 \cdot m[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; \tilde{4} \cdot m / 2 \cdot m / 2 \cdot m]$,
15) $m \cdot 4 : m \,|\, \tilde{4}[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; \tilde{4} \cdot m / \tilde{4} / \tilde{4}]$,
16) $m \cdot 4 : m \,|\, 2 : 2[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; 4 : 2 / 2 : 2 / 2 : 2]$,
17) $m \cdot 4 : m \,|\, 4[\{C_4, C_1\} \,|\, (C_4) \,|\, C_2 \,|\, C_1; 4 : 2 / 4 / 4]$.

Vom analiza cazul rămas: $G = m \cdot 6 : m$. Subgrupurile de indicele 2 sunt: $H_1 = 6 : m$, $H_2 = 6 \cdot m$, $H_3 = 6 : 2$, $H_4 = m \cdot 3 : m$ şi $H_5 = \tilde{6} \cdot m$. În calitate de H' pot fi subgrupurile de indicele 4 din $G = m \cdot 6 : m$, anume: $H' = 6$, $H' = \tilde{6}$, 2 subgrupuri de tipul $3 : 2$, 2 subgrupuri de tipul $3 \cdot m$ şi $H' = 3 : m$. Vom menționa că toate subgrupurile H' de indicele 4 ale grupului $G = m \cdot 6 : m$ sunt invariante, iar grupurile factor G/H' respective sunt neciclice de ordinul 4.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.39-47

Cercetând detaliat toate posibilităţile concrete pentru H şi H' şi efectuând etapele teoremei principale de deducere a grupurilor de $\overline{P}-$simetrie nedegenerată, din grupul generator $G=m\cdot 6:m$ au fost obţinute 13 grupuri minore, al căror simboluri polinomiale urmează:

1) $m\cdot 6:m\,|\,6[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6:m/6/6]$,

2) $m\cdot 6:m\,|\,\tilde{6}[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6:m/\tilde{6}/\tilde{6}]$,

3) $m\cdot 6:m\,|\,3:m[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6:m/3:m/3:m]$,

4) $m\cdot 6:m\,|\,6[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6\cdot m/6/6]$,

5) $m\cdot 6:m\,|\,3\cdot m[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6\cdot m/3\cdot m/3\cdot m]$,

6) $m\cdot 6:m\,|\,6[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6:2/6/6]$,

7) $m\cdot 6:m\,|\,3:2[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;6:2/3:2/3:2]$,

8) $m\cdot 6:m\,|\,3:2[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;m\cdot 3:m/3:2/3:2]$,

9) $m\cdot 6:m\,|\,3\cdot m[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;m\cdot 3:m/3\cdot m/3\cdot m]$,

10) $m\cdot 6:m\,|\,3:m[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;m\cdot 3:m/3:m/3:m]$,

11) $m\cdot 6:m\,|\,\tilde{6}[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\tilde{6}\cdot m/\tilde{6}/\tilde{6}]$,

12) $m\cdot 6:m\,|\,3:2[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\tilde{6}\cdot m/3:2/3:2]$,

13) $m\cdot 6:m\,|\,3\cdot m[\{C_4,C_1\}\,|\,(C_4)\,|\,C_2\,|\,C_1;\tilde{6}\cdot m/3\cdot m/3\cdot m]$.

Totalizând rezultatele acestui compartiment, vom sublinia că din grupurile cristalografice de categoria G_{320} au fost obţinute 76 grupuri minore diferite de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată.

5. Pentru a deduce grupurile $P'-$semiminore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată, conform teoremei principale a $\overline{P}-$simetriei, trebuie de construit cvasiomomorfismele de dreapta ψ ale grupurilor generatoare G pe subgrupul P' din grupul P cu nucleele H', însoţite de omomorfismele $\varphi:G\to AutP$ cu nucleele H, ale căror restricţii pe H sunt omomorfisme cu nucleele $H''=H\cap H'$. În cazul cercetat grupurile P' şi $AutP$ sunt de ordinul 2. Deci, H' şi H trebuie să fie subgrupuri de indicele 2 în G. Se obţin 59 grupuri $2-$semiminore de $\overline{4}-$simetrie din grupurile de categoria G_{320} în calitate de grupuri generatoare. Vom menţiona că automorfismele grupului P aplică subgrupul P' identic pe sine. Ca consecinţă, grupurile $P'-$semiminore obţinute formal nu se deosebesc prin nimic de grupurile $P'-$semiminore respective de $4-$simetrie.

Vorbind despre grupurile pseudominore de $\overline{4}-$simetrie, mai întâi vom menţiona că submulţimi $P^{/}$ (nu sunt subgrupuri) ale grupului P (ciclic de ordinul 4) ce verifică condiţia $e\subseteq P'\subset P$ sunt exact 5, anume: $P_1^{/}=(e,p), P_2^{/}=(e,p^{-1}), P_3^{/}=(e,p,p^2)$, $P_4^{/}=(e,p,p^{-1})$ şi $P_5^{/}=(e,p^2,p^{-1})$. Pentru submulţimile $P_1^{/}$ şi $P_2^{/}$ indicele subgrupului de simetrie H' al grupului pseudominor respectiv trebuie să fie 2. Nemijlocit se verifică că aplicaţia ψ a grupului G de categoria G_{320} cu nucleul H' de indicele 2 pe fiecare din submulţimile $P^{/}$ considerate este un cvasiomomorfism de dreapta, însoţit de omomorfismul $\varphi:G\to AutP$ cu nucleul $H=H'$. Ca consecinţă, se obţin 118 grupuri pseudominore de $\overline{4}-$simetrie cu simbolurile polinomiale $G\,|\,H[\{C_4,C_1\}\,|\,(P^{/})\,|\,C_1\,|\,C_1;H/H/H]$, unde G este grup concret cristalografic de categoria G_{320}, H este subgrup de indicele 2 în G, iar $P^{/}$ este pe rând una din submulţimile considerate formate din 2 elemente.

Pentru a deduce grupurile $P^{/}-$pseudominore de $\overline{4}-$simetrie cu submulţimea $P^{/}$ formată din 3 elemente, cu nucleul omomorfismului însoţitor $H = Ker\varphi$ şi subgrupul de simetrie H', trebuie de analizat cazurile când H' sunt subgrupuri de indicele 3, iar H – de indicele 2 în G. Conform teoremei de deducere a grupurilor pseudominore de $\overline{P}-$simetrie, subgrupul $H'' = H \cap H'$ trebuie să fie divizor normal în H, iar grupul factor H/H'' să fie izomorf cu un subgrup P'' al grupului P, care se include în submulţimea $P^{/}$.

În submulţimea $P^{/} = (e, p, p^{-1})$ se include numai subgrupul unitate al lui P. Ca consecinţă, H'' trebuie să coincidă cu H. Acest lucru este imposibil, deoarece intersecţia unui subgrup H de indicele 2 cu un subgrup H' de indicele 3 ale aceluiaşi grup G numaidecât este diferită atât de H, cât şi de H'. Prin urmare, nu există grupuri $P^{/}-$pseudominore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată cu totalitatea de componente-substituţii $P^{/} = (e, p, p^{-1})$.

Pentru $P^{/} = (e, p^2, p^{-1})$ sau $P^{/} = (e, p^2, p)$ avem că $P'' = (e, p^2)$, deci H'' trebuie să fie un subgrup de indicele 2 în H. Printre grupurile generatoare, ce au subgrupuri de indicele 2 şi de indicele 3, există numai 11. Anume: $6,\ 3\cdot m,\ 6\cdot m,\ 3:m,\ 6:m,\ m\cdot 3:m, m\cdot 6:m,\ \tilde{6},\ \tilde{6}\cdot m,\ 3:2, 6:2$. O cercetare detaliată a acestor grupuri ne arată că niciunul din ele nu generează grupuri $P^{/}-$pseudominore de $\overline{4}-$simetrie nedegenerată, deoarece întotdeauna se obţine că $H'' = H \cap H'$ este un subgrup de indicele 3 în H.

Bibliografie:

1. LUNGU, A. Aplicaţii cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri. În: *Conferinţa ştiinţifică jubiliară „50 de ani ai USM". Rezumatele comunicărilor*. 2-3 octombrie 1996. - Chişinău, USM, 1996, p.22-24.
2. LUNGU, A., ROŞCA, M. Generalizarea grupurilor cristalografice de categoria G_{320} cu $\overline{3}-$simetrie. În: *Studia Universitatis Moldaviae*. Revistă ştiinţifică. *Seria „Ştiinţe exacte şi economice"*. Chişinău: CEP USM, 2013, nr.2(62), p.3-9.
3. ZAMORZAEV, A., PALISTRANT, A., LUNGU, A. *Teoria grupurilor discrete de simetrie. Partea II:* Ciclu de prelegeri speciale. Chişinău, 1992. 100 p.
4. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Р-симметрия и ее дальнейшее развитие.* Кишинев: Штиинца, 1986.
5. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н., КУЖУКЕЕВ, Ж.-Н.М. Беловские цветные группы и классификация магнитных структур. В: *Сообщения ОИЯИ, Р4-7513*. Дубна, 1973.
6. ЛУНГУ, А.П. *К теории $\overline{P}-$симметрии* / Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 мая 1978г., №1709-78 Деп. 16 с.
7. ЛУНГУ, А.П. *К выводу групп Q-симметрии ($\overline{P}$–симметрии)*. В: Кристаллография, 1980, т.25, вып.5, с.1051-1053.
8. ЛУНГУ, А.П. *Универсальная методика вывода групп $\overline{P}$–симметрии (Q-симметрии)* // Рукопись деп. в МолдНИИНТИ 28 июля 1983 г., №308М-Д83. 14 с.

Notă: *Lucrarea a fost elaborată în cadrul Proiectelor 11.817.08.41F şi 12.839.08.07F.*

Prezentat la 08.11.2013