STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2014, nr.2(72)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" *ISSN 1857-2073* *ISSN online 2345-1033* *p.3-7*

ASUPRA UNOR NOI DISTRIBUŢII FIABILISTE ŞI TEOREMA LIMITĂ POISSON PENTRU ELE

Bogdan Gheorghe MUNTEANU, Alexei LEAHU*, Sergiu CATARANCIUC

Universitatea de Stat din Moldova

**Universitatea Tehnică a Moldovei*

Sunt introduse patru noi distribuţii fiabiliste ale minimului şi maximului unui şir de variabile aleatoare independente, identic Erlang distribuite într-un număr aleator, distribuit binomial sau Poisson (zero trunchiate). Sunt abordate proprietăţile şi caracteristicile acestor distribuţii, precum şi condiţiile în care are loc teorema limită Poisson pentru acestea.

Cuvinte-cheie: *distribuţie serie de puteri, distribuţiile Binomiala şi Poisson zero trunchiate, distribuţia Erlang, teorema limită Poisson, distribuţia duratei vieţii.*

ON THE NEW RELIABILITY DISTRIBUTIONS AND POSSON LIMIT THEOREM FOR THEM

Four new distributions of the minimum and maximum of a sequence of independent, identicaly Erlang distributed random variables in a random number distributed binomial and Poisson (zero truncated) are introduced. Properties and characteristics of these distributions and Poisson limit theorem was approached for them.

Keywords: *power series distribution, zero truncated binomial and Poisson distributions, Erlang distribution, Poisson limit theorem, lifetime distribution.*

1. Introducere

În Teoria Fiabilităţii durata vieţii unui sistem este reprezentată deseori ca fiind minimul sau maximul unui număr aleator Z de variabile aleatoare $X_1, X_2, ...,$ independente, identic repartizate, acestea din urmă reprezentând durata vieţii componentelor ce alcătuiesc acest sistem. Distribuţia duratei vieţii sistemului se obţine prin mixarea distribuţiei maximului şi minimului unui număr fixat de variabile aleatoare independente şi identic distribuite (v.a.i.i.d.), unde combinaţiile sunt obţinute prin tehnici ce au fost determinate şi aplicate de către Adamidis şi Loukas (1998 [1]) şi apoi generalizate de Chahkandi şi Ganjali (2009 [3]), Baretto-Souza şi Cribari (2009, [2]) sau Leahu, Munteanu şi Cataranciuc [5]. Această din urmă lucrare vizează, pentru numărul aleator *Z*, o clasă întreagă de distribuţii numite distribuţii de tip serie de puteri (PSD) a numărului aleator *Z* de variabile aleatoare. Drept continuare a lucrării [5], în 6] a fost analizat cazul când v.a. $X_1, X_2, ...$ sunt distribuite Erlang. În continuare vom aborda patru noi distribuţii ale duratei vieţii care rezultă, în calitate de caz particular, din [6]. Aceste rezultate fiind obţinute utilizând cadrul general ale lucrărilor [5] şi [6], noi nu vom prezenta şi demonstraţiile în cauză.

Fie Z o v.a. astfel încât $P(Z \in \{1,2,...\}) = 1$.

Definiţia 1.1. ([4,5]). Spunem că v.a. Z are distribuţie de tip serie de puteri dacă:

$$P(Z = z) = \frac{a_z \theta^z}{A(\theta)},\ z = 1,2,...;\ \theta \in (0,\tau);\ \tau > 0, \tag{1.1}$$

unde $a_1, a_2, ...$ este un şir de numere reale pozitive, τ este un număr pozitiv mărginit superior de raza de convergenţă a seriei de puteri (*funcţia serie*) $A(\theta) = \sum_{z \ge 1} a_z \theta^z, \forall \theta \in (0,\tau)$, iar θ este parametrul putere al repartiţiei. Precizăm că seria de puteri $A(\theta), \theta \in (0,\tau), \tau > 0$ este o funcţie nenegativă şi indefinit derivabilă.

Vom nota prin PSD (*"power series distribution"*) clasa funcţiilor de repartiţie de tip serie de puteri. Dacă v.a. Z are distribuţia din relaţia (1.1), atunci notăm că $Z \in PSD$.

În lucrarea de faţă, luăm drept exemplu de distribuţii din clasa PSD următoarele două distribuţii zero trunchiate: binomială şi Poisson, distribuţii ce intră sub incidenţa teoremei limită de tip Poisson. Pentru fiecare dintre acestea evidenţiem elementele caracteristice clasei PSD: şirul $(a_z)_{z \ge 1}$, funcţia serie $A(\theta)$ şi exprimarea parametrului putere θ în funcţie de parametrul ce caracterizează fiecare distribuţie în parte (*a se vedea* Tabelul).

Tabel

Elementele reprezentative ale clasei PSD pentru diferite repartiţii [4,5]

Distribuţia	a_z	θ	$A(\theta)$	τ
$Binom^*(n,p)$	$\binom{n}{z}$	$\frac{p}{1-p}$	$(1+\theta)^n-1$	∞
$Poisson^*(\alpha)$	$\frac{1}{z!}$	α	$e^{\theta}-1$	∞

2. Distribuţiile MaxErl şi MinErl de tip PSD

Considerăm că $X_i \sim Erlang(k,\lambda),\ k\in N,\ k\geq 1,\ \lambda>0$, unde $(X_i)_{i\geq 1}$ sunt v.a.i.i.d. cu funcţia de repartiţie (f.r.) $F_{X_i}(x)\equiv F_{Erl}(x)=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}e^{-\lambda x}$, $x>0$ şi densitatea de probabilitate (d.p.) $f_{X_i}(x)\equiv f_{Erl}(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!},\ x>0$.

Notăm că $U_{Erl}=\max\{X_1,X_2,...,X_Z\}$ şi $V_{Erl}=\min\{X_1,X_2,...,X_Z\}$.

Propoziţia 2.1. *Dacă v.a.* $U_{Erl}=\max\{X_1,X_2,...,X_Z\}$ *şi* $V_{Erl}=\min\{X_1,X_2,...,X_Z\}$, *unde* $(X_i)_{i\geq 1}$ *sunt v.a. nenegative, i.i.d.,* $X_i \sim Erlang(k,\lambda),\ k\in N,\ k\geq 1,\ \lambda>0$ *şi* $Z\in PSD$ *cu* $P(Z=z)=\frac{a_z\theta^z}{A(\theta)},\ z=1,2,...;\ \theta\in(0,\tau);\ \tau>0$, *v.a.* $(X_i)_{i\geq 1}$ *şi* Z *independente, atunci funcţiile de repartiţie ale v.a.* U_{Erl}, *respectiv* V_{Erl}, *sunt următoarele:*

$$U_{Erl}(x)=\frac{A\left[\theta\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)\right]}{A(\theta)},\ x>0, \tag{2.1}$$

$$V_{Erl}(x)=1-\frac{A\left[\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right]}{A(\theta)},\ x>0. \tag{2.2}$$

Următorul rezultat defineşte d.p. pentru maximul, respectiv minimul unui şir de v.a.i. Erlang distribuite într-un număr aleator.

Consecinţa 2.2. *D.p. ale v.a.* U_{Erl}, *respectiv* V_{Erl}, *sunt următoarele:*

$$u_{Erl}(x)=\frac{\theta\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}A'\left[\theta\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)\right]}{A(\theta)},\ x>0, \tag{2.3}$$

$$v_{Erl}(x)=\frac{\theta\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}A'\left[\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right]}{A(\theta)},\ x>0. \tag{2.4}$$

Următoarele două propoziţii prezintă o nouă caracteristică pentru distribuţiile MaxErlPS şi MinErlPS.

Propoziţia 2.3. *Dacă* $(X_i)_{i\geq 1}$ *este un şir de v.a.i. Erlang distribuite, nenegative, de tip absolut continuu, cu f.r.* F_{Erl} *şi* $Z \in PSD$ *cu* $P(Z=z)=\dfrac{a_z\theta^z}{A(\theta)}$, $z=1,2,...;\theta\in(0,\tau);\tau>0$, $(a_z)_{z\geq 1}$ *un şir de numere reale nenegative,* $A(\theta)=\sum_{z\geq 1} a_z\theta^z, \forall\theta\in(0,\tau)$, *atunci:*

$$\lim_{\theta\to 0^+} U_{Erl}(x)=(F_{Erl}(x))^m, x>0,$$

unde $m=\min\{n\in N^*, a_n>0\}$

Propoziţia 2.4. *Sub incidenţa condiţiilor din Propoziţia 2.3, v.a.* $V_{Erl}=\min\{X_1,X_2,...,X_Z\}$

$$\lim_{\theta\to 0^+} V_{Erl}(x)=1-(1-F_{Erl}(x))^l, x>0,$$

unde $l=\min\{n\in N^*, a_n>0\}$

3. Teorema limită Poisson pentru distribuţiile Max-Min Erlang de tip PSD

În această secţiune se prezintă caracteristicile şi proprietăţile a patru distribuţii particulare: distribuţia Max Erlang Binomială (MaxErlB), distribuţia Min Erlang Binomială (MinErlB), distribuţia Max Erlang Poisson (MaxErlP) şi distribuţia Min Erlang Poisson (MinErlP).

Distribuţiile MaxErlB şi MinErlB sunt definite de f.r. (2.1) şi (2.2) cu $A(\theta)=(\theta+1)^n-1$, $\theta=\dfrac{p}{1-p}$, $p\in(0,1)$, şi anume:

$$U_{ErlB}(x)=\frac{\left(1+\theta-\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)^n-1}{(1+\theta)^n-1}, x>0 \tag{3.1}$$

$$V_{ErlB}(x)=\frac{(1+\theta)^n-\left(1+\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)^n}{(1+\theta)^n-1}, x>0, \tag{3.2}$$

unde n este un întreg pozitiv.

Cu ajutorul relaţiilor (2.3) şi (2.4), d.p. sunt date de:

$$u_{ErlB}(x)=\frac{n\theta\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}\left(1+\theta-\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)^{n-1}}{(1+\theta)^n-1}, x>0, \tag{3.3}$$

$$v_{ErlB}(x)=\frac{n\theta\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}\left(1+\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)^{n-1}}{(1+\theta)^n-1}, x>0\ . \tag{3.4}$$

Distribuţiile MaxErlP şi MinErlP sunt definite de f.r. (2.1) şi (2.2) cu $A(\theta^*)=e^{\theta^*}-1$, $\theta^*=\alpha>0$, adică:

$$U_{ErlP}(x)=\frac{e^{-\theta^* e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}}-e^{-\theta^*}}{1-e^{-\theta^*}}, x>0 \tag{3.5}$$

$$V_{ErlP}(x)=\frac{1-e^{-\theta^*\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\right)}}{1-e^{-\theta^*}}, x>0. \tag{3.6}$$

Cu formulele (2.3) şi (2.4), d.p. sunt date de:

$$u_{ErlP}(x)=\frac{\theta^{*}\lambda^{k}x^{k-1}e^{-\lambda x-\theta^{*}e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}}}{1-e^{-\theta^{*}}},\ x>0 \tag{3.7}$$

$$v_{ErlP}(x)=\frac{\theta^{*}\lambda^{k}x^{k-1}e^{-\lambda x-\theta^{*}+\theta^{*}e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}}}{1-e^{-\theta^{*}}},\ x>0. \tag{3.8}$$

Teorema următoare reprezintă rezultatul central al lucrării şi arată în ce condiţii distribuţiile MaxErlP şi MinErlP sunt aproximate de distribuţiile MaxErlB şi MinErlB.

Teorema 3.1. (***Teorema limită Poisson***) *Distribuţiile de puteri MaxErlP şi MinErlP pot fi obţinute ca limita distribuţiilor serie de puteri MaxErlB şi MinErlB cu f.r. caracterizate de relaţiile (3.1) şi (3.2) dacă* $n\theta\to\theta^{*}>0$ *când* $n\to\infty$ *şi* $\theta\to 0^{+}$.

Demonstraţie. Studiem convergenţa în distribuţie, luând în calcul cele patru funcţii de repartiţie: $U_{ErlB}(x)$, $V_{ErlB}(x), U_{ErlP}(x)$ şi $V_{ErlP}(x),\ x>0$ ale maximului şi minimului.

Având la bază următoarele limite elementare:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}(1+\theta)^{n}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}\left[(1+\theta)^{1/\theta}\right]^{n\theta}=e^{\theta^{*}},$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}(1+\theta\Delta(k,\lambda,\theta))^{n}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}\left[(1+\theta\Delta(k,\lambda,\theta))^{1/\theta\Delta(k,\lambda,\theta)}\right]^{n\theta\Delta(k,\lambda,\theta)}=e^{\theta^{*}\Delta(k,\lambda,\theta)}$$

şi

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}\left[1+\theta(1-\Delta(k,\lambda,\theta))\right]^{n}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}\left[\left[1+\theta(1-\Delta(k,\lambda,\theta))\right]^{1/[\theta(1-\Delta(k,\lambda,\theta))]}\right]^{n\theta(1-\Delta(k,\lambda,\theta))}=e^{\theta^{*}(1-\Delta(k,\lambda,\theta))},$$

unde $\Delta(k,\lambda,\theta)=e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}$.

Aşadar, obţinem:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}U_{ErlB}(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}\frac{\left(1+\theta-\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}\right)^{n}-1}{(1+\theta)^{n}-1}=\frac{e^{\theta^{*}\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}\right)}-1}{e^{\theta^{*}}-1}=U_{ErlP}(x)$$

şi

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}V_{ErlB}(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0^{+}}}\frac{(1+\theta)^{n}-\left(1+\theta e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}\right)^{n}}{(1+\theta)^{n}-1}=\frac{e^{\theta^{*}}-e^{\theta^{*}e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{i}}{i!}}}{e^{\theta^{*}}-1}=V_{ErlP}(x).$$ □

Remarca 3.1. Justificarea Teoremei 3.1. este reflectată şi în reprezentările grafice din Figurile 3.1 şi 3.2 pentru diferite valori ale parametrilor: $k=2$, $\lambda=4$, $\alpha=4.8$, $n=24$ şi $p=\frac{1}{6}$ pentru repartiţia maximului, precum şi $k=2$, $\lambda=0.5$, $\alpha=6$, $n=30$ şi $p=\frac{1}{6}$ pentru repartiţia minimului.

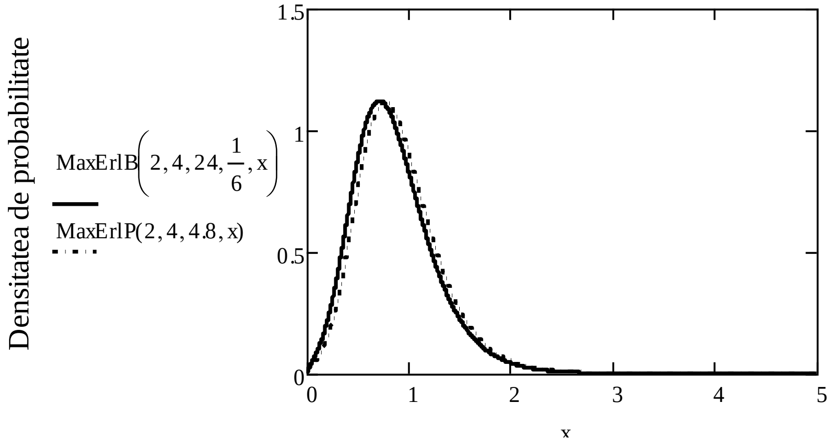

Fig.3.1. Densităţile de probabilitate ale distribuţiilor Max-Erlang-Binomială şi Max-Erlang-Poisson.

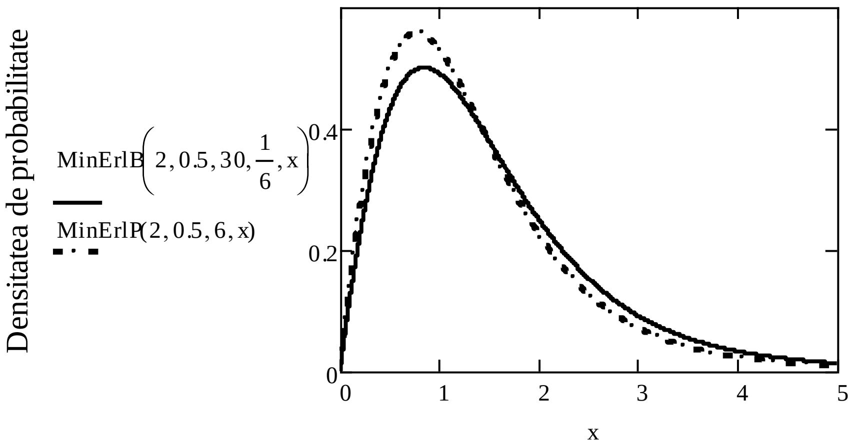

Fig.3.2. Densităţile de probabilitate ale distribuţiilor Min-Erlang-Binomială şi Min-Erlang-Poisson.

Bibliografie:

1. ADAMIDIS, K., LOUKAS, S. A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate. In: *Statistics and Probability Letters*, 39(1998), no.1, p.35-42.
2. BARRETO-SOUZA, W., CRIBARI-NETO, F. A generalization of the exponential-poisson distribution. In: *Statistics and Probability Letters*, 79(2009), p.2493-2500.
3. CHAHKANDI, M., GANJALI, M. On some lifetime distributions with decreasing failure rate. In: *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(2009), no.12, p.4433-4440.
4. JOHNSON, N.L., KEMP, A.W., KOTZ, S. *Univariate Discrete Distribution*. New Jersey, 2005.
5. LEAHU, A., MUNTEANU, B.Gh., CATARANCIUC, S. On the lifetime as the maximum or minimum of the sample with power series distributed size. In: *Romai* Journal, 9(2013), no.2, p.119-128 .
6. LEAHU, A., MUNTEANU, B.Gh., CATARANCIUC, S. Max Erlang and Min Erlang power series distributions as two new families of lifetime distribution. In: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova*. *Seria „Matematica"*, 2014 (submitted).

Prezentat la 10.03.2014