

Перехідна параметрична чутливість асинхронного мотора при однофазному живленні

Асп. С. Костючко

Національний університет Львівська політехніка

Abstract. The general algorithm of calculation of transitional parametric sensitivity of induction motor is offered in a monophasе feed. Differential equations of device are written in the normal Cauchy's form. The results of computation are given.

Key words: parametric sensitivity, induction motor.

Вступ. Однофазний стан насиченого трифазного асинхронного мотора – достатньо частий випадок в практиці експлуатації електричних машин. Він може бути наперед передбачуваний за відсутності трифазного джерела живлення, а може бути як аварійний у робочому стані за трифазного живлення. Математична модель такого стану роботи призначена для аналізу роботи мотора автономно, так і – як елемента складної системи. Вона узагальнює роботу [1] на випадок складнішого фізичного процесу, яким є явище насичення головного магнетного кола.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно було сперш: побудувати математичну модель пристрою, а також допоміжну модель параметричної чутливості [1]. Це й стало підставою побудови матриці монодромії, а на її підставі просимулювати перехідний процес, а заодно й – перехідну параметричну чутливість.

1. Математична модель. Математичну модель насиченого трифазного асинхронного мотора при однофазному живленні одержано, виходячи з відомої добре апробованої на практиці моделі трифазного стану мотора. Найзручнішою тут є L -модель у косо-гональних координатах [1]. За таких умов диференціальні рівняння згадуваної математичної моделі в розгорнутому вигляді приймають вигляд

$$\begin{matrix} \begin{matrix} l_s + l_A & l_{AB} & l_A & l_{AB} \\ l_{BA} & l_s + l_B & l_{BA} & l_B \\ l_A & l_{AB} & l_R + l_A & l_{AB} \\ l_{BA} & l_B & l_{BA} & l_R + l_B \end{matrix} & \frac{d}{dt} & \begin{matrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{matrix} = \\ \begin{matrix} u_{SA} - ((2r_{SA} + r_{SC})i_{SA} + (r_{SC} - r_{SB})i_{SB})/3 \\ u_{SB} - ((r_{SC} - r_{SA})i_{SA} + (2r_{SB} - r_{SC})i_{SB})/3 \\ -\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{matrix} \end{matrix} \quad (1)$$

де i_{SA}, i_{SB} – фазні струми обмотки статора за умови, що $i_{SC} = -i_{SA} - i_{SB}$; u_{SA}, u_{SB} – фазні напруги обмотки статора; i_{RA}, i_{RB} – перетворені струми обмотки ротора; Ψ_{RA}, Ψ_{RB} – перетворені повні потокозчеплення обмотки ротора; ω – кутова швидкість ротора в ел. рад./с; l_A, l_B, l_{AB}, l_{BA} – диференціальні індуктивності,

вони є функціями магнетного стану мотора; l_S, l_R – індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; r_S, r_R – резистивні опори обмотки статора й ротора, тут

$$u_{SA} = U_m \sin \omega_0 t; \quad u_{SB} = U_m \sin(\omega_0 t - 2\pi/3), \quad (2)$$

де U_m – амплітуда мережі живлення; ω_0 – її кутова частота.

Повні потокозчеплення обмотки ротора шукаємо у звиклий спосіб

$$\Psi_{Rk} (k = A, B) = (i_{Sk} + i_{Rk})/\tau + i_{Rk}/\alpha_R; \quad (3)$$

де τ – обернена основна статична індуктивність мотора; $\alpha_S = 1/l_S$; $\alpha_R = 1/l_R$ – обернені індуктивності дисипації обмотки статора й ротора.

Алгоритм обчислення диференціальних індуктивностей ми тут не подаватимемо, бо модель (1) нами не буде на завершальному етапі використовуватись. При потребі його можна знайти в [2].

Якщо тепер від першого рядка рівняння (1) відняти другий і накласти умову обриву фази С: $i_{SB} = -i_{SA} = -i_S$, то одержимо рівняння електромагнетного стану мотора [1] у вигляді

$$\begin{matrix} \begin{matrix} l_A + l_B - l_{AB} - l_{BA} + 2l_s & l_A - l_{BA} & l_{AB} - l_B \\ l_A - l_{AB} & l_A + l_R & l_{AB} \\ l_{BA} - l_B & l_{BA} & l_B + l_R \end{matrix} & \frac{d}{dt} & \begin{matrix} i_S \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{matrix} = \\ \begin{matrix} \sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})i_S \\ -\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{matrix} \end{matrix} \quad (4)$$

Рівняння електромагнетного стану мотора треба доповнити рівняннями механічного руху (штивністю і дисипацією механічних ланок, – як це прийнято в теорії електричних машин, – нехтуємо)

$$\frac{d\omega}{dt} = p_0(M_E - M)/J, \quad (5)$$

де $M = M(\omega, t)$ – механічний момент; J – момент інерції; p_0 – кількість пар магнетних полюсів машини; M_E – електромагнетний момент [1]

$$M_E = -\sqrt{3}p_0 i_S (i_{RA} + i_{RB})/\tau. \quad (6)$$

Диференціальні рівняння (4), (5) – шукана L -модель однофазного стану трифазного асинхронного мотора. Незручність її в тому, що в процесі числового інтегрування за явним принципом виникає потреба на кожному часовому кроці обертати матрицю коефі-

ціентів. Це не тільки ускладнює обчислювальний процес, але, що основне, приводить до суттєвого зменшення точності в результаті чого ми втрачаємо можливість аналізу тривалих перехідних процесів. Тому обернемо матрицю диференціальних індуктивностей аналітично. В результаті одержимо шукану А-модель

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_S \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 1 & A_{SA} & A_{SB} \\ A_{AS} & A_A & A_{AB} \\ A_{BS} & A_{BA} & A_B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})i_S \\ -\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тут А-коефіцієнти мають вигляд

$$\begin{aligned} A_{SA} &= -c_2 c_5 - c_3 c_8; & A_{SB} &= -c_2 c_6 - c_3 c_9; \\ A_{AS} &= -c_5 c_4 - c_6 c_7; & A_{BS} &= -c_8 c_4 - c_9 c_7; \\ A_A &= c_5 / q + A_{AS} A_{SA}; & A_{AB} &= c_6 / q + A_{AS} A_{SB}; \\ A_{BA} &= c_8 / q + A_{BS} A_{SA}; & A_B &= c_9 / q + A_{BS} A_{SB}; \\ q &= 1 / (c_1 + c_4 A_{SA} + c_7 A_{SB}), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= g_1 g_2; & c_1 &= c_2 - c_3 + 2 / \alpha_s; & c_2 &= b(2d_1 - d_3 - d_2) + 1 / \tau; \\ c_3 &= b(d_1 + d_3 - 2d_2) - 1 / \tau; & c_4 &= \Delta(c_6 + c_9) - 1 / \alpha_R; \\ c_5 &= b(2d_2 + d_3) / \Delta + 1 / g_1; & c_6 &= -b(d_1 + 2d_3) / \Delta; \\ c_7 &= -\Delta(c_5 + c_8) + 1 / \alpha_R; & c_8 &= -b(d_2 + 2d_3) / \Delta; \\ c_9 &= b(2d_2 + d_3) / \Delta + 1 / g_1; & d_1 &= i_A^2, & d_2 &= i_B^2, & d_3 &= i_A i_B; \\ b &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{i_m^2}; & g_1 &= \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha_R}; & g_2 &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\alpha_R}, \end{aligned} \quad (9)$$

причому τ, ρ – обернені статична й диференціальна індуктивності, їх знаходимо за характеристикою намагнечування (холостого стану) машини як:

$$\tau = \left[\frac{\Psi_m(i_m)}{i_m} \right]^{-1}; \quad \rho = \left[\frac{d\Psi_m(i_m)}{di_m} \right]^{-1}, \quad (10)$$

де i_m – модуль просторового вектора намагнечувальних струмів

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_A i_B + i_B^2) / 3}; \quad i_A = i_S + i_{RA}; \quad i_B = -i_S + i_{RB}. \quad (11)$$

Сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь електромеханічного стану (5), (7). Вхідними даними є: $r_S, r_R, \alpha_S, \alpha_R, p_0, J$, а також намагнечувальна крива $\Psi_m(i_m)$, і вхідні сигнали: $U_m, \omega_0, M(\omega, t)$.

2. Розв'язання задачі Коші. Систему звичайних диференціальних рівнянь (5), (7) запишемо в загальному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x = (i, \omega)_t. \quad (13)$$

Інтегрування диференціальних рівнянь (13) при заданих початкових умовах

$$x(t)|_{t=0} = x(0), \quad (14)$$

і становить задачу Коші для заданої системи диференціальних рівнянь, яка презентує задачу розрахунку перехідних електромеханічних процесів мотора.

3. Модель параметричної чутливості.

Позначимо вектор сталих параметрів як

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (15)$$

Елементи колонки λ – будь-які постійні параметри, які, в свою чергу, можуть бути функціями інших конструкційних постійних параметрів. Обчислення параметричної чутливості за цими параметрами здійснюється так само, але похідні по λ треба брати за правилами диференціювання складних функцій

Матриця параметричних чутливостей визначається як похідна

$$S = \frac{\partial x}{\partial \lambda}. \quad (16)$$

Аргумент x знаходимо за рівнянням (13) яке запишемо у загальнішому вигляді:

$$dx / dt = f_1(x, \lambda, t), \quad (17)$$

Диференціюючи (17) по λ отримаємо лінійне параметричне рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f_1(x, \lambda, t)}{\partial x} S + \frac{\partial f_1(x, \lambda, t)}{\partial \lambda}. \quad (18)$$

В усталеному стані $x(0) = x(T)$, тому рівняння (18) має теж $S(t)$ періодичний розв'язок.

Взяття частинних похідних по x і λ у правій частині (1), (12) – досить складна задача, а то й не здійсненна. Тому ми вводимо матрицю допоміжних параметричних чутливостей χ по відношенню до деякого іншого вектора y (14):

$$\chi = \frac{dy}{d\lambda}. \quad (19)$$

Рівняння стану досліджуваного об'єкта стосовно вектора y запишемо також у загальному вигляді:

$$dy / dt = f_2(y, \lambda, t), \quad (20)$$

f_2 – T -періодична по t .

Диференціюючи (20) за λ та враховуючи (16), (19), отримаємо

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial f_2(y, \lambda, t)}{\partial y} \chi + \frac{\partial f_2(y, \lambda, t)}{\partial \lambda}. \quad (21)$$

Рівняння (14) теж має періодичний розв'язок $\chi(t)$. Функція $\chi(t)$, крім виконуваної допоміжної

ролі, нерідко становить самостійний інтерес.

Матриця параметричних чутливостей S

$$S = (A\chi, \eta), \quad (22)$$

де

$$S = \frac{\partial(i, \omega)_t}{\partial \lambda}; \quad \chi = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}; \quad \eta = \frac{\partial \omega}{\partial \lambda}. \quad (23)$$

Диференціальні рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - \Omega \Psi - RL^{-1}\Psi, \quad (24)$$

де L^{-1} – обернена матриця статичних індуктивностей.

Щоб одержати рівняння (21) достатньо згідно з (19) продиференціювати за λ (24)

$$\frac{d\chi}{dt} = -(\Omega + RA)\chi + F. \quad (25)$$

Тут

$$F = \frac{\partial U}{\partial \lambda} + RL^{-1} \frac{\partial L}{\partial \lambda} I - \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \Psi - \frac{\partial R}{\partial \lambda} I. \quad (26)$$

Диференціюючи за λ (12), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} = \frac{p_0}{J} \left(\frac{\partial M_E}{\partial \lambda} - \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} \eta \right) + \\ + p_0 (M_E - M(\omega)) \frac{\partial(1/J)}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (27)$$

де

$$\frac{\partial M_E}{\partial \lambda} = \sqrt{3} p_0 (\chi_{SA} i_{SB} + \Psi_{SA} S_{SB} - \chi_{SB} i_{SA} - \Psi_{SB} S_{SA}) \quad (28)$$

Матрицю параметричної чутливості (22) розіб'ємо на стовпчики і запишемо як рядок

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_m), \quad (29)$$

де m – число елементів вектора постійних параметрів $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\lambda = \text{const}$. Причому

$$S_i = d(i, \omega)_t / \partial \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

є вектори параметричних чутливостей елементів вектора x до окремих сталих параметрів.

Часова дискретизація заданих диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь їх чутливостей (до початкових умов і параметричних) здійснюється за явними або неявними методами.

4. Результати симуляції. На рис. 1 – рис. 3 показані результати комп'ютерної симуляції модельного асинхронного мотора в однофазному стані.

Параметри мотора: $r_S = 1.01 \text{ Ом}; r_R = 1.80 \text{ Ом};$
 $\alpha_S = 65 \text{ Гн}^{-1}; \alpha_R = 70 \text{ Гн}^{-1}; \alpha_m = 4.65 \text{ Гн}^{-1};$
 $J = 0.025 \text{ кгм}^2; p_0 = 2.$

Вхідні сигнали: $U_m = 310.5 \text{ В}, \omega_0 = 314 \text{ с}^{-1},$
 $M(\omega, t) = 0 \text{ Нм}.$

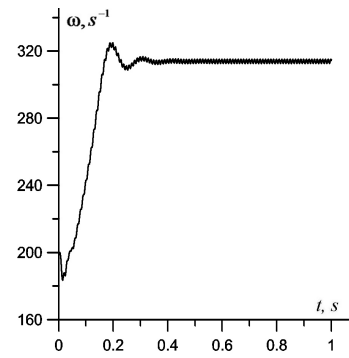


Рис. 1. Пуск ненавантаженого мотора при $\omega(0) = 200 \text{ с}^{-1}$.

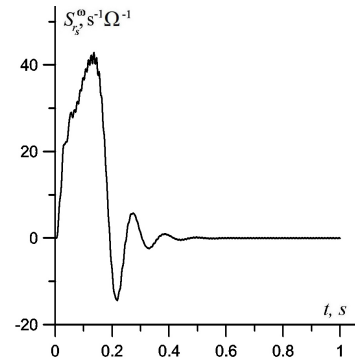


Рис. 2. Перехідна параметрична чутливість кутової швидкості до опору обмотки статора, що відповідає рис. 2.

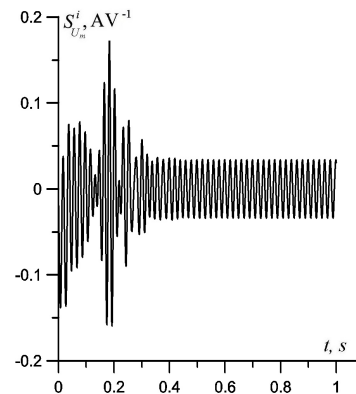


Рис. 3. Перехідна параметрична чутливість статорного струму до амплітуди джерела живлення, що відповідає рис. 2.

5. Висновок. Математична модель параметричної чутливості досліджуваного пристрою побудована на підставі загальної теорії звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Її диференціальні рівняння записані в нормальній формі Коші, а це вперше дає реальні можливості аналізу тривалих перехідних процесів.

[1]. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010, 508 с.