

# Визначення взаємної інформації для трійкового симетричного каналу з трьома градаціями вірності

к.т.н., доц. К. Обельовська, к.т.н., ст. викл. О. Ліскевич

Національний університет "Львівська політехніка", 12/806 вул. Бандери, Львів-13, 79013, Україна  
E-mail: [obelyovska@gmail.com](mailto:obelyovska@gmail.com)

**Abstract.** The formula to define the mutual information of three symbol symmetric memoryless channel having three levels of likelihood is proposed.

**Key words:** three symbol symmetric memoryless channel, mutual information, likelihood.

## Вступ.

Протягом усього часу існування комп'ютерних мереж існує тенденція постійного зростання вимог до каналів зв'язку, зокрема, до швидкості передачі інформації, яку можна в них досягнути. Очевидно, що така постановка задачі актуальна і для сучасних мереж.

З метою підвищення швидкості передачі інформації на практиці, серед інших рішень, все частіше застосовують збільшення алфавіту вхідних символів каналів зв'язку. Якщо у двійкових ідеальних каналах одна послідовність переносить один біт інформації, то у недвійкових ідеальних каналах максимальна кількість інформації, що переноситься в одній послідовності, збільшується та дорівнює  $\log_2 N$  біт, де  $N$  – основа алфавіту вхідних символів каналу.

Крім того, сучасні мережі повинні надавати інтегровані послуги, тобто передавати інформацію різних видів, наприклад, дані, мову, відео по одній лінії зв'язку. Оскільки до якості передачі кожного з цих видів інформації ставляться різні вимоги, то одним з шляхів забезпечення цих вимог може бути застосування при прийомі різних видів інформації прийому з різними градаціями вірності. Модель каналу та його аналіз при цьому суттєво ускладнюються. Швидкість передачі інформації з врахуванням втрат, що мали місце при передачі по каналу зв'язку, може бути визначена через взаємну інформацію (mutual information). Метою даної роботи є отримання формули для визначення взаємної інформації одного з таких каналів.

Нами обрано трійковий симетричний канал без пам'яті з трьома градаціями вірності. Трійковий код і, відповідно, трійковий канал, використовується, наприклад, в Європі для організації цифрових потоків зі швидкістю 2,048 Мбіт/с у відповідності з рекомендацією G.703 МККТТ (код HDB3) та в мережах Fast Ethernet специфікації 100Base-T4 (код 8B/6T) [1]. Прийом з трьома градаціями може бути застосований для забезпечення передачі з різною якістю, наприклад, мови, відео та даних.

## Взаємна інформація.

Швидкість передачі інформації в ідеальному каналі зв'язку:

$$V_{ik} = I(X)/t = I(Y)/t, \quad (1)$$

де  $I(X)$  – кількість інформації, що передається джерелом в ідеальний канал за час  $t$ ;  $I(Y)$  – кількість інформації, що приймається приймачем за час  $t$ .

В реальних каналах зв'язку швидкість передачі інформації (не сигналів) зменшується за рахунок спотворень, що мають місце при передачі. Щоб спростити аналіз різних каналів, особливо при їх порівнянні, скористаємось нормалізованою швидкістю передачі інформації  $V'$ , яка буде визначати кількість переданої інформації не за одиницю часу, а в одній послідовності. Така величина введена з метою оцінки втрат в каналах зв'язку.

Для ідеального каналу:

$$V'_{ik} = H(X) = H(Y), \quad (2)$$

де  $H(X), H(Y)$  – відповідно ентропія джерела та приймача.

Для реального каналу [2,3]:

$$V' = H(Y) - H(Y/X) = I(Y \leftrightarrow X), \quad (3)$$

де  $H(Y/X)$  – умовна ентропія, що характеризує втрати в каналі зв'язку, а  $I(Y \leftrightarrow X)$  – взаємна інформація.

**Модель трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності.**

Позначимо через  $X$  множину вхідних символів каналу, що використовує трійковий код:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (4)$$

де:  $x_1, x_2, x_3$  – вхідні символи трійкового каналу, ймовірність появи яких відповідно дорівнює  $p(x_1), p(x_2), p(x_3)$ .

Множину вихідних символів трійкового каналу, при прийомі з трьома градаціями вірності позначимо через  $Y$

$$Y = \{y_1^B, y_1^C, y_1^H, y_2^B, y_2^C, y_2^H, y_3^B, y_3^C, y_3^H\}, \quad (5)$$

де  $y_1^B, y_2^B, y_3^B$  – вихідні символи цього каналу, прийняті з високою градацією вірності;  $y_1^C, y_2^C, y_3^C$  – вихідні символи каналу, прийняті з середньою градацією вірності;  $y_1^H, y_2^H, y_3^H$  – вихідні символи каналу, прийняті з низькою градацією вірності.

Перший – третій стовпці матриці умовних ймовірностей  $P(Y/X)$ , що описує такий канал, будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} p(y_1^B/x_1) & p(y_2^B/x_1) & p(y_3^B/x_1) \\ p(y_1^B/x_2) & p(y_2^B/x_2) & p(y_3^B/x_2), \\ p(y_1^B/x_3) & p(y_2^B/x_3) & p(y_3^B/x_3) \end{aligned} \quad (6)$$

четвертий – шостий стовпці:

$$\begin{aligned} p(y_1^C/x_1) & p(y_2^C/x_1) & p(y_3^C/x_1) \\ p(y_1^C/x_2) & p(y_2^C/x_2) & p(y_3^C/x_2), \\ p(y_1^C/x_3) & p(y_2^C/x_3) & p(y_3^C/x_3) \end{aligned} \quad (7)$$

а сьомий – дев'ятий:

$$\begin{aligned} p(y_1^H/x_1) & p(y_2^H/x_1) & p(y_3^H/x_1) \\ p(y_1^H/x_2) & p(y_2^H/x_2) & p(y_3^H/x_2), \\ p(y_1^H/x_3) & p(y_2^H/x_3) & p(y_3^H/x_3) \end{aligned} \quad (8)$$

де  $p(y_i^B/x_i)$ ,  $p(y_i^C/x_i)$ ,  $p(y_i^H/x_i)$  – ймовірності правильного прийому  $i$ -тих символів вхідного алфавіту каналу з присвоєнням їм при прийомі, відповідно, високої, середньої та низької градацій вірності;  $p(y_j^B/x_i)$ ,  $p(y_j^C/x_i)$ ,  $p(y_j^H/x_i)$  – ймовірності помилкового прийому  $i$ -тих символів вхідного алфавіту каналу з присвоєнням їм, відповідно, високої, середньої та низької градацій вірності.

**Взаємна інформація трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності.**

Нехай ймовірності правильного прийому всіх символів трійкового каналу без пам'яті з присвоєнням їм високої градації вірності однакові і дорівнюють  $P_{PP}^B$ :

$$p(y_i^B/x_i) = P_{PP}^B, \quad i = \overline{1,3}; \quad (9)$$

ймовірності правильного прийому всіх символів трійкового каналу без пам'яті з присвоєнням їм середньої градації вірності однакові і дорівнюють  $P_{PP}^C$ :

$$p(y_i^C/x_i) = P_{PP}^C, \quad i = \overline{1,3}; \quad (10)$$

ймовірності правильного прийому всіх символів трійкового каналу без пам'яті з присвоєнням їм низької градації вірності також однакові і дорівнюють  $P_{PP}^H$ :

$$p(y_i^H/x_i) = P_{PP}^H, \quad i = \overline{1,3}; \quad (11)$$

ймовірності помилкового прийому всіх символів даного каналу з присвоєнням їм високої градації вірності однакові і дорівнюють  $P_{\Pi}^B$ :

$$p(y_j^B/x_i) = P_{\Pi}^B, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (12)$$

ймовірності помилкового прийому всіх символів трійкового каналу без пам'яті з присвоєнням їм середньої градації вірності однакові і дорівнюють  $P_{\Pi}^C$ :

$$p(y_j^C/x_i) = P_{\Pi}^C, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (13)$$

а ймовірності помилкового прийому всіх символів трійкового каналу без пам'яті з присвоєнням їм низької градації вірності також однакові і дорівнюють

$P_{\Pi}^H$ :

$$p(y_j^H/x_i) = P_{\Pi}^H, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \quad (14)$$

З врахуванням умов (7–12) матриця (6) умовних ймовірностей  $P_k$  набуде вигляду:

$$P = \begin{bmatrix} P_{PP}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{PP}^C & P_{\Pi}^C & \dots & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^B & P_{PP}^B & P_{\Pi}^B & P_{PP}^C & P_{\Pi}^C & \dots & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{PP}^B & P_{PP}^C & P_{\Pi}^C & \dots & P_{PP}^H \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Розіб'ємо множину  $Y$  вихідних символів каналу на три підмножини  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$ , що не перетинаються:

$$Y_1 = \{y_1^B, y_2^B, y_3^B\}, \quad (16)$$

$$Y_2 = \{y_1^C, y_2^C, y_3^C\}, \quad (17)$$

$$Y_3 = \{y_1^H, y_2^H, y_3^H\}. \quad (18)$$

Позначимо через  $P_1(Y/X)$ ,  $P_2(Y/X)$  та  $P_3(Y/X)$  матриці перехідних ймовірностей, що відповідають цим множинам:

$$P_1(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{PP}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B \\ P_{\Pi}^B & P_{PP}^B & P_{\Pi}^B \\ P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{PP}^B \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$P_2(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{PP}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^C \\ P_{\Pi}^C & P_{PP}^C & P_{\Pi}^C \\ P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{PP}^C \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$P_3(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{PP}^H & P_{\Pi}^H & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^H & P_{PP}^H & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^H & P_{\Pi}^H & P_{PP}^H \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В матрицях (19–21) кожен рядок є перестановкою елементів будь-якого іншого рядка, а кожен стовпець є перестановкою будь-якого іншого стовпця, що є ознакою симетричності каналу.

Для симетричного каналу умовна ентропія  $H(Y/X)$  дорівнює ентропії рядка матриці умовних ймовірностей каналу. В нашому випадку це матриця (15), а отже умовну ентропію  $H(Y/X)$  можна записати:

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -P_{PP}^B \log_a P_{PP}^B - 2P_{\Pi}^B \log_a P_{\Pi}^B - \\ &- P_{PP}^C \log_a P_{PP}^C - 2P_{\Pi}^C \log_a P_{\Pi}^C - P_{PP}^H \log_a P_{PP}^H - \\ &- 2P_{\Pi}^H \log_a P_{\Pi}^H. \end{aligned} \quad (22)$$

Ввівши позначення

$$a = P_{PP}^B / P_{\Pi}^B, \quad (23)$$

$$b = P_{PP}^C / P_{\Pi}^C, \quad (24)$$

$$c = P_{PP}^H / P_{\Pi}^H, \quad (25)$$

формулу умовної ентропії (22) можна представити у вигляді:

$$H(Y/X) = -P_{\Pi}^B \log_a a^a - (a+2)P_{\Pi}^B \log_a P_{\Pi}^B - P_{\Pi}^C \log_a b^b - (b+2)P_{\Pi}^C \log_a P_{\Pi}^C - P_{\Pi}^H \log_a c^c - (c+2)P_{\Pi}^H \log_a P_{\Pi}^H. \quad (26)$$

Ентропія приймача на виході трійкового каналу при застосуванні ним прийому з трьома градаціями вірності:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^3 \left[ \begin{array}{l} p(y_j^B) \log_a p(y_j^B) + \\ + p(y_j^C) \log_a p(y_j^C) + \\ + p(y_j^H) \log_a p(y_j^H) \end{array} \right], \quad (27)$$

де  $p(y_j^B)$ ,  $p(y_j^C)$ ,  $p(y_j^H)$  ймовірності прийому  $j$ -ого символу вихідного алфавіту каналу відповідно з високою, середньою та низькою градаціями вірності.

Ймовірність прийому  $j$ -ого символу вихідного алфавіту каналу з високою градацією вірності

$$p(y_j^B) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) p(y_j^B / x_i), \quad (28)$$

ймовірність прийому  $j$ -ого символу вихідного алфавіту каналу з середньою градацією вірності,

$$p(y_j^C) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) p(y_j^C / x_i), \quad (29)$$

А ймовірність прийому  $j$ -ого символу вихідного алфавіту каналу з низькою градацією вірності

$$p(y_j^H) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) p(y_j^H / x_i). \quad (30)$$

З врахуванням умов (9–14) та позначень (23–25) формули (26–28) можна представити у вигляді:

$$p(y_j^B) = P_{\Pi}^B \left[ a p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i) \right], \quad (31)$$

$$p(y_j^C) = P_{\Pi}^C \left[ b p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i) \right], \quad (32)$$

$$p(y_j^H) = P_{\Pi}^H \left[ c p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i) \right]. \quad (33)$$

Після певних математичних перетворень ентропію приймача  $H(Y)$  на виході трійкового каналу з трьома градаціями вірності можна представити у вигляді:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^3 P_{\Pi}^B k_j \log_a (P_{\Pi}^B k_j) - \sum_{j=1}^3 P_{\Pi}^C l_j \log_a (P_{\Pi}^C l_j) - \sum_{j=1}^3 P_{\Pi}^H m_j \log_a (P_{\Pi}^H m_j), \quad (34)$$

де:

$$k_j = a \cdot p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i), \quad (35)$$

$$l_j = b \cdot p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i), \quad (36)$$

$$m_j = c \cdot p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i). \quad (37)$$

Позначимо ймовірність помилкового прийому символів з присвоєнням їм  $k$ -ої градації вірності, де  $k$  змінюється від 1 до 3, через  $P_{\Pi k}$ , а ймовірність правильного прийому символів з присвоєнням їм  $i$ -ої градації вірності через  $P_{\Pi i k}$ . Введемо позначення

$$n_k = P_{\Pi k} / P_{\Pi k}. \quad (38)$$

Тоді формулу умовної ентропії (26) можна представити у вигляді:

$$H(Y/X) = -\sum_{k=1}^3 [n_k P_{\Pi k} \log_a n_k + (n_k + 2) P_{\Pi k} \log_a P_{\Pi k}] \quad (39)$$

Ентропію приймача  $H(Y)$  на виході трійкового каналу з трьома градаціями вірності за таких умов можна записати:

$$H(Y) = -\sum_{k=1}^3 P_{\Pi k} g_k \log_a (P_{\Pi k} g_k), \quad (40)$$

де:

$$g_k = n_k \cdot p(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i), \quad (41)$$

Підставивши вираз ентропії приймача  $H(Y)$  та умовної ентропії у формулу (3), після певних математичних перетворень можна отримати наступний вираз для оцінки взаємної кількості інформації  $I(Y \leftrightarrow X)$  трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності:

$$I(Y \leftrightarrow X) = \sum_{k=1}^3 P_{\Pi k} \log_a \frac{n_k (P_{\Pi k})^{n_k+2}}{\prod_j (P_{\Pi k} g_j)^{g_k}}, \quad (42)$$

**Висновок.** Одержана формула для оцінки взаємної кількості інформації трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності, яка може бути застосована при аналізі мереж, що працюють з трійковими каналами, при застосуванні в них прийому з трьома градаціями вірності.

[1]. Олифер В.Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы : Учебник для вузов. 4-е изд. / Олифер В.Г., Олифер Н.А. – СПб : Питер, 2011. – 944 с.

[2]. Elements of Information Theory/by Thomas M. Cover, Joy A. Thomas.-2-nd Edition. Wiley, 2006. - ISBN: 978-0-471-24195-9

[3]. Тулякова Н. О. Теорія інформації. Суми: Вид-во СумДУ, 2008.- 212 с. ISBN 978-966-657-199-4Р.