

Interpolacyjne metody rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych na podstawie zbioru równań różniczkowych zwyczajnych

T. Kwater, P. Krutys, B. Twaróg, J. Bartman

Uniwersytet Rzeszowski, Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Komputerowego, 35-959 Rzeszów, ul. Pignonia 1

Abstract. This paper presents the issues related to the mathematical modeling of organic pollutants present in the river. The models have varying degrees of complexity, ranging from the description of ordinary differential equations, to partial differential equations of hyperbolic type. It also provides an interpretation of their solutions, using the natural specificity of the river, allowing an accurate description of the river a set of ordinary differential equations. Discusses the problems of river pollution control, taking into account various factors gain control of extortion and various pollutants and their location. The issues raised were used to the idea of solving partial differential equations on the basis of a set of ordinary differential equations. Furthermore, polynomial interpolation was used to create an approximate model biochemically polluted river in the calculations are based on only selected characteristics.

Wprowadzenie

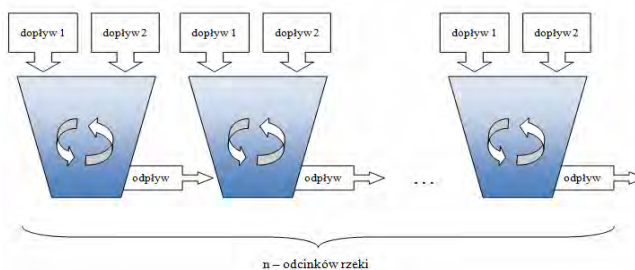
W artykule zaprezentowano ideę rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych na podstawie zbioru równań różniczkowych zwyczajnych. Przedstawiono także rozwiązanie problemu jak z danej liczby charakterystyk uzyskać obraz prezentujący wskaźniki jakości wody na całej przestrzeni czasu i długości badanego odcinka rzeki. Niniejszy artykuł powinna przybliżyć i uprościć czytelnikowi zrozumienie idei rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych opisujących stan obiektu na przykładzie zanieczyszczonej rzeki. Przedstawione podejście do zagadnienia modelowania matematycznego oraz możliwości jego wykorzystania w systemach monitorujących oraz sterujących stanem jakości rzeki.

Modelowanie matematyczne zanieczyszczenia rzek

Celem przeprowadzenia symulacji rzeczywistej rzeki należy stworzyć jej matematyczny model, przez który rozumiemy pewną abstrakcję matematyczną dowolnego obiektu fizycznego wiążącą z sobą zmienne charakteryzujące stan obiektu, oddziaływanie zewnętrzne na obiekt i jego reakcję na to oddziaływanie. W przypadku modelu w postaci równania lub układu równań różniczkowych stan obiektu charakteryzowany jest przez warunki graniczne. W naszym przypadku warunki początkowe, czyli charakterystyka na całej długości badanego odcinka rzeki w chwili t_0 , w której rozpoczynamy badania oraz warunki brzegowe, czyli charakterystyka w całej dziedzinie czasu w miejscu z_0 , od którego rozpoczynamy odcinek badanej rzeki. Modele w postaci równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych nazywa się modelami o parametrach rozłożonych. Większość modeli opisujących

przepływy w kanałach to właśnie modele tego typu. Z kolei zasady zachowania stosowane w skali makro prowadzą do równań różniczkowych o pochodnych zwyczajnych, przy czym są to zawsze równania I rzędu [2]. Niezbędnymi elementami tych równań są tylko pierwsze pochodne względem czasu. Nie występuje w nich zmienność przestrzenna, co oznacza, że wszystkie właściwości obiektu sprowadzono do punktu. Modele matematyczne w postaci tego typu równań nazywa się modelami o parametrach skupionych.

W celu uproszczenia modelu zanieczyszczonej rzeki przyjęto model reaktora z ciągłym mieszaniem.



Rys.1. Zbiór reaktorów z ciągłym mieszaniem.

Przy modelowaniu zanieczyszczeń w wodzie punktem wyjściowym jest bilans tlenowy, który opisany został przez dwa wskaźniki: **BZT** – **biochemiczne zapotrzebowanie na tlen** i **RT** – **tlen rozpuszczony**, które warunkują rozpatrywany model matematyczny opisany zgodnie z równaniem kinetyki reakcji fizyczno-chemicznej Streetera-Phelpsa.

Dokonując analizy wektora stanu, który zależy od czasu i długości rzeki, równania Streetera-Phelpsa przy ujęciu bilansu masowego przekształcają się na równania różniczkowe cząstkowe hiperboliczne pierwszego rzędu. Model matematyczny BZT - RT dla i -tego odcinka rzeki przyjmuje postać [3]:

$$\frac{d}{dt} x_i + \frac{d}{dz} (Vx_i) = Ax_i + Bw \quad (1)$$

z warunkami granicznymi: $x(0, t)$, $x(z, t_0)$,
gdzie: $x(z, t) = \text{col}[x_1 \ x_2]$ wektor reprezentujący odpowiednio BZT oraz RT, $w_i(z, t)$ wektor reprezentujący zakłócenia o charakterze rozłożonym, $V = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ – macierz diagonalna z prędkościami przepływu wody
 $A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$ – macierz stanu, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – macierz oddziaływań zakłóceń, $w = \text{col}[w_1 \ w_2]$ – wektor

wymuszeń wynikających z lokalnych źródeł tlenu. Warunki graniczne uwzględnione w modelu opisane są warunkami początkowymi oraz brzegowymi.

Warunek początkowy (WP) – dotyczy całej długości odcinka w chwili $t = t_0$:

$$x_i(z, t_0) = x_{i0}(z) \quad (2)$$

Warunek brzegowy (WB) dotyczy początku rozważanego odcinka w dziedzinie czasu:

$$x_i(0, t) = M_i x_{i-1}(1, t) + w_{bi}(t) + R_{bi} u_{bi}(t) \quad (3)$$

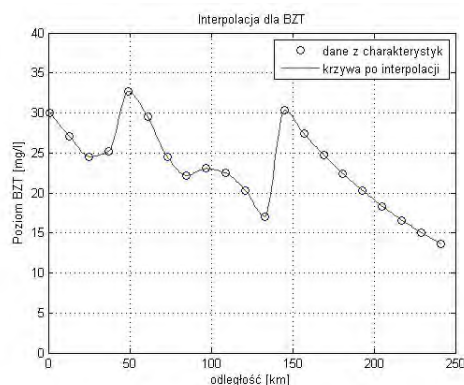
Macierz M_i stanowi powiązania brzegowe między pojedynczymi odcinkami, wektor w_{bi} dotyczy zakłóceń brzegowych. Sterowanie u_{bi} oddziałuje tylko na współrzędną wektora stanu x_2 i zlokalizowane jest na początku odcinka rzeki [1].

Model matematyczny opisany równaniem różniczkowym cząstkowym hiperbolicznym pierwszego rzędu przedstawia ogólne podejście, w przeciwieństwie do modelu rzeki opisanego równaniami Streetera–Phelps. Posiadając macierz prędkości, której wartości powiązane są z długością rzeki pozwalają na uwzględnienie naturalnych zmian parametru prędkości.

Idea przybliżenia rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych

Idea rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych polega na rozwiązaniu równań różniczkowych zwyczajnych wzdłuż linii określających prędkość przemieszczania się wody. Rozważania prowadzono na przykładzie rzeki zanieczyszczonej biochemicznie. Wektor stanu reprezentuje wskaźnik BZT i deficyt RT zależny od długości rzeki i czasu. Zatem równania różniczkowe cząstkowe stają się zwyczajnymi równaniami różniczkowymi wzdłuż tych linii zwanych charakterystykami [5]. Problem rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych sprowadza się do zbioru rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Dziedzinę rozważań w tym przypadku stanowi długość rzeki oraz czas, w którym poszukujemy rozwiązań. Przyjmując odpowiednią dyskretyzację w dziedzinie czasu i długości otrzymuje się rozwiązania tylko w dyskretnych punktach. Gęstość tych punktów wpływa na precyzję rozwiązania jednak prowadzi do konieczności wykonania znacznie większej liczby obliczeń. Obszar dyskretnych rozwiązań pokrywa całą przestrzeń czasu i długości badanej rzeki. Dysponując rozwiązaniami co kilka kroków będą poszukiwane rozwiązania dla współrzędnych długości między znanymi rozwiązaniami.

Można wygenerować przybliżenie rozwiązania w narzuconych punktach przedstawiające wartości wskaźników jakości wody na całej przestrzeni. W tym celu zastosowano ideę interpolacji wielomianowej. Na rysunku (2) przedstawiono przebieg procesu interpolacji wielomianowej trzeciego stopnia. Przebiegi te reprezentują rozkład BZT wzdłuż długości rzeki dla $t = 144 \cdot dt$, jest to początek szóstej doby obserwacji.

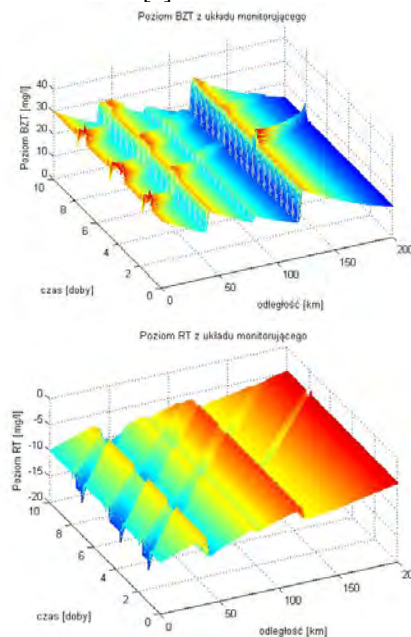


Rys. 2. Interpolacja wielomianem 3 stopnia w chwili $t=144 \cdot dt$.

Całkowite rozwiązanie przy tym podejściu polega na dokonaniu interpolacji wielomianowej dla każdego kroku dt , a następnie „złożenie” wartości interpolowanych, które stanowi przybliżoną hiperpowierzchnię rozwiązania szczegółowego. Zatem dysponuje się rozwiązaniem dyskretnym z krokiem dt i dz .

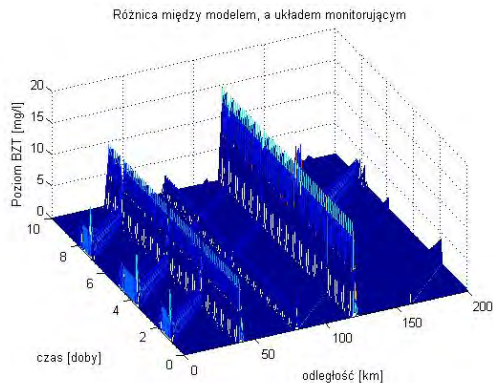
Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych na charakterystykach

Mając do dyspozycji rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych na charakterystykach należy rozwiązać problem utworzenia rozkładu wskaźników jakości wody w całej przestrzeni. W rozważaniach zastosowano proces interpolacji, aby „wypełnić” hiperpowierzchnię pomiędzy rozwiązaniami z wybranych charakterystyk. Stosując takie rozwiązanie wybrano hiperpowierzchnie posiadając tylko rozwiązania wybranych charakterystyk z przyjętej wielokrotności dz [4].



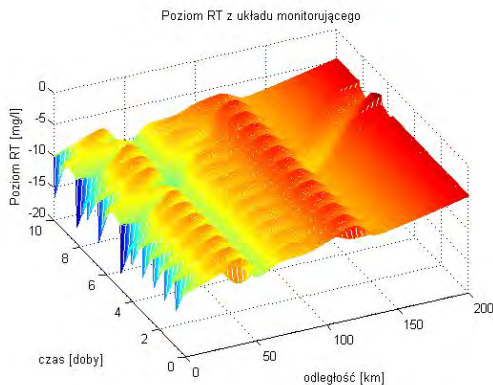
Rys.3. Rozkład BZT oraz deficytu RT uzyskany z rozwiązań charakterystyk co $4dt$.

Powyżej przedstawiono efekty symulacji wykorzystujące interpolację wielomianową trzeciego stopnia.

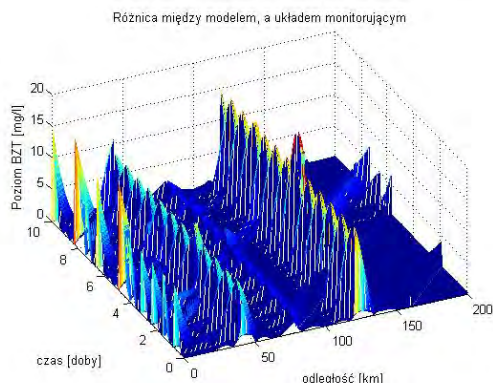


Rys.4. Różnica pomiędzy modelowym rozkładem wskaźników, a wygenerowanymi hiperpowierzchniami z rozwiązań charakterystyk co 4dt.

Porównując powyższe rysunki zauważyć można, iż dokonywanie pomiarów co 4 godziny zupełnie wystarcza, aby uzyskać obraz wskaźników jakości wody umiarkowanie odbiegający od modelu uzyskanego z rozwiązań równań różniczkowych na całej przestrzeni czasu i długości rzeki.



Rys.5. Rozkład BZT oraz deficytu RT uzyskany z rozwiązań charakterystyk co 20dt.



Rys.6. Różnica pomiędzy modelowym rozkładem wskaźników, a wygenerowanymi hiperpowierzchniami z rozwiązań charakterystyk co 20dt.

Porównując wyniki dla różnych wartości dyskretyzacji łatwo zauważyć iż, dla „rzadszych” pomiarów różnica między modelem, a wygenerowanym rozkładem jest większa. Zatem dokonując mniejszej liczby pomiarów w danym czasie zapewne tracimy na dokładności uzyskanego przybliżenia.

Z wygenerowanych rysunków wnioskować można, iż uzyskano obraz wskaźników jakości wody nie wiele odbiegający od modelu uzyskanego z rozwiązań równań różniczkowych na całej przestrzeni czasu i długości rzeki. Wybór stopnia wielomianu interpolacyjnego za pewne wpływa na dokładność przybliżenia rozwiązania, co widać w „gładkości” otrzymanych hiperpowierzchni.

W wyniku licznych badań przedstawionych na w/w rysunkach zauważyć można, iż na podstawie rozwiązań określonej liczby charakterystyk możemy uzyskać przybliżony model wskaźników jakości wody. Rysunki te obrazują wartość bezwzględną z różnicy między idealnym modelem, a uzyskanym przez nas przybliżeniem dla różnych odstępów dyskretyzacji przyjmowanych w badaniach. Nie trudno zaobserwować także, iż największe błędy przybliżenia występują w momentach, gdy na rzece pojawiają się dopływy boczne, zatem następuje znaczny skok wartości wskaźników BZT i RT.

Podsumowanie

Przedstawione w pracy zagadnienia stanowią doskonały fundament do rozwijania tematyki modelowania matematycznego stanu rzek. Przyjmując określoną dyskretyzację w dziedzinie czasu i długości otrzymuje się rozwiązania tylko w dyskretnych punktach. Im większa gęstość tych punktów zwiększa się dokładność odwzorowania, co pokazano w symulacjach. Systemy monitorujące i sterujące jakością wody zapewne przyczyniają się do ochrony środowiska naturalnego i dbają o bezpieczeństwo ekologiczne.

Literatura

- [1]. Kwater T., Krutys P.: Estimation of pollution of the river by artificial neural networks, Symbiosis of Engineering and Computer Science Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2010, ISBN 978-83-7338-620-4, str.37-66.
- [2]. Palczewski A., Równania różniczkowe zwyczajne, teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [3]. Szymkiewicz R., Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach i kanałach, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
- [4]. Korbicz K., Mazurkiewicz Z., Janczak A., Wybrane zagadnienia z teorii identyfikacji i estymacji, Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej im. Jurija Gagarina w Zielonej Górze, Zielona Góra 1987.
- [5]. Krutys P., Kwater T., Symulacja modelu matematycznego rzeki opisanego równaniami różniczkowymi cząstkowymi, „Technical News” 2007, s. 142-143.