18-th International Modeling School
of AMSE-UAPL
Ukraine, Alushta, 5–10 September 2013

Кінетична ко-енерґія електромаґнетного поля

Чабан В., д.т.н., проф.
Національний університет «Львівська політехніка»

Abstract: In the paper is given integral expression of energy of electromagnetic field in non-linear media. If to take as argument the generalized coordinate, then we receive the potential energy. If to take as argument the generalized velocity, then we receive the kinetic co-energy. On this base is shown nature kinetic co-energy end its force action.

Key words: integral expression of energy, electromagnetic field, kinetic co-energy, force action.

1. Вступ. У теорії електромаґнетного поля важливе місце посідають варіаційні методи. Варіаційні принципи – то самий економний принцип одержання рівнянь руху. Але відомо, що варіаційні методи в застосуванні до нелінійних систем використовують поняття кінетичної кооперативної енергії, так званої ко-енерґії [1], і власне потенціальної енерґії. Ці поняття часто є відносні й залежать від вибору тих чи инших узагальнених координат і узагальнених швидкостей [2,3]. Тому ми робимо спробу на підставі запропонованого в [4] універсального виразу енергії надати кінетичній ко-енерґії реального змісту.

2. Вираз енергії. З позиції теорії поля густини енергій постулюються, бо їхніх виразів можна одержати багато, а який з них правильний встановити поки що неможливо, тому за основу прийняті найпростіші. Ми, виходячи з принципу симетрії, пропонуємо такий вираз [4]

$$w_i = \int_0^{\eta} \chi(\eta)\eta\, d\eta. \tag{1}$$

Змінна $\chi(\eta)$ завше має зміст статичних матриць, що характеризують середовище, або зосереджений елемент. Якщо змінній надати змісту узагальнених координат, то вираз (1) відтворює густину потенціальної енергії. Якщо ж їй надати змісту узагальнених швидкостей, то вираз (1) відтворює густину кінетичної ко-енергії. Вираз (1) зарекомендував себе успішно в теорії електромаґнетного поля, електромаґнетних кіл і в динаміці, у тому числі релятивістській.

3. Енергія електромагнетного поля. Тут прийнято виражати питомі енерґії через вектори поля. Але ці вектори, як показано в електродинаміці потенціалів, є похідними від вектор-потенціалу **A** електромаґнетного поля

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{2}$$

відтак

$$\mathbf{D} = \mathrm{E}(\mathbf{E})\mathbf{E}; \quad \mathbf{H} = \mathrm{N}(\mathbf{B})\mathbf{B}, \tag{3}$$

де **E**, **B**, **D**, **H** – вектори електромаґнетного поля; E, N – матриці статичних електричних проникностей і статичних релуктивностей середовища.

Як бачимо, вектор **B** можна трактувати як узагальнену координату, а вектор **E** – як узагальнену швидкість. Підставляючи (2) (3) в (1), одержимо вирази густин потенціальної енергії і кінетичної ко-енергії

$$w_p == \int_0^{\mathbf{B}} \mathrm{N}(\mathbf{B})\mathbf{B}\, d\mathbf{B}; \quad w_{kc} = \int_0^{\mathbf{E}} \mathrm{E}(\mathbf{E})\mathbf{E}\, d\mathbf{E}, \tag{4}$$

Таким чином маґнетне поле ґенерує потенціальну енерґію, а електричне – кінетичну ко-енерґію, вирази яких цілком збігаються з загальноприйнятими в електродинаміці [2].

Вираз питомої кінетичної енерґії електромаґнетного поля в принцип симетрії не вписується, і його за виразом (1) одержати не вдається. Цей вираз можна одержати класичним методом, виходячи з рівнянь електромаґнетного поля в нерухомому безвтратному середовищі, записаних у векторах,

$$w_k = \int_0^{\mathbf{D}} \Xi(\mathbf{D})\mathbf{D}\, d\mathbf{D}, \tag{5}$$

де $\Xi(\mathbf{D})$ – обернена матриця статичних електричних проникностей ($\Xi = \mathrm{E}^{-1}$).

Легко переконатися, що в лінійному середовищі вирази (4), (5) спрощуються

$$w_k = w_{kc} = \frac{\varepsilon E^2}{2}; \quad w_p = \frac{\nu B^2}{2}, \tag{6}$$

де ε, ν – сталі, діелектрична проникність і релуктивність.

Оскільки зацікавленням даного дослідження є енерґія руху, то до потенціальної далі не звертатимемося.

Постає резонне питання [4]: кінетична ко-енергія розрахункова величина, чи за нею криється глибокий фізичний зміст? – Перша відповідь напрошується сама по собі: уже те, що такі універсальні закони фізики як закон збереження енергії й принцип найменшої дії, за якими стоять варіаційні принципи, не можуть провадити до фізичних законів, виходячи з енерґетичних перетворень нефізичної величини. Тому треба признати, що кінетична ко-енерґія – реальна характеристика. Але тоді напрошується инша думка: може відмовитися від кінетичної енерґії на користь ко-енерґії? Адже кінетична енерґія не спрацьовує у варіаційних принципах, не вписується у вираз (1). Але перш ніж виносити вирок кінетичній енерґії у [3] було доведено, що до неї можна прийти, виходячи з чисто експериментального закону Кулона. Тож її статус непохитнтй! З приводу обох енерґій ми скажемо свою думку, але сперш перейдемо до їхніх силових проявів.

4. Силові характеристики. Вимірною величиною енерґії є сила. Густину сили обох кінетичних енерґій шукатимемо за їхніми ґрадієнтами

$$\mathbf{f}_{kc} = -\nabla w_{kc}; \quad \mathbf{f}_k = -\nabla w_k. \tag{7}$$

Підставляючи сюди (4), (5), одержимо

$$\mathbf{f}_{kc} = -\nabla \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D}d\mathbf{E}, \quad \mathbf{f}_k = -\nabla \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E}d\mathbf{D}. \tag{8}$$

Оскільки ґрадієнт добутку векторів є надто складним виразом, то дальший аналіз робитимемо за окремими компонентами сили

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{x_0} f_{ix} + \mathbf{y_0} f_{iy} + \mathbf{z_0} f_{iz}, \quad i = k, kc, \tag{9}$$

а саме

$$f_{kc\xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D}d\mathbf{E}, \quad f_{k\xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E}d\mathbf{D}, \quad \xi = x, y, z. \tag{10}$$

Як буде сказано пізніше, найважливішим є другий вираз

$$f_{k\xi} = -\int_0^{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} d\mathbf{D} - \int_0^{\partial \mathbf{D}/\partial \xi} \mathbf{E} d\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi}, \quad \xi = x, y, z. \tag{11}$$

Здійснимо заміну диференціала в другому доданку

$$\int_0^{\partial \mathbf{D}/\partial \xi} \mathbf{E} d\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi} = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi} - \int_0^{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} d\mathbf{D}, \quad \xi = x, y, z. \tag{12}$$

Підставляючи (12) у (11), одержимо

$$f_{k\xi} = -\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi}, \quad \xi = x, y, z. \tag{13}$$

Додаючи один до одного доданки (10) і беручи до уваги теорему інтегрування по частинах, одержимо

$$f_{k\xi} + f_{kc\xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbf{ED}) = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi}\mathbf{D} - \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi}, \quad \xi = x, y, z. \tag{14}$$

Зіставляючи (12) і (13), одержуємо

$$f_{kc\xi} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi}\mathbf{D}, \quad \xi = x, y, z. \tag{15}$$

Щоб порівняти силові дії кінетичних енерґії і ко-енерґії, надамо їхнім виразам дещо иншого вигляду

$$f_{kc\xi} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi}(\mathrm{E}'\mathbf{E}); \quad f_{k\xi} = -\mathbf{E}\left(\mathrm{E}''\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi}\right), \quad \xi = x, y, z, \tag{16}$$

де $\mathrm{E}'(E)$, $\mathrm{E}''(E)$ – матриці статичних і диференціальних електричних проникностей. Їх знаходимо за характеристиками середовища в головних осях ортотропії [3]:

Як показують вирази (16), силова характеристика кінетичної енерґії проявляється через диференціальні проникності середовища (E''), а силова характеристика кінетичної ко-енерґі – через статичні (E'). У всьому решта ці вирази збігаються. У лінійному середовищі сили теж збігаються $f_{k\xi} = f_{kc\xi}$, бо тоді $\mathrm{E}' = \mathrm{E}''$.

Одержані результати спростовують допущену в [3] помилку про те, що в нелінійних системах $f_{kc} = f_k$. Це сталося із-за опущених доданків варіації диференціалів $d(dE)/d\xi$ і $d(dD)/\xi$, помилково прийнятих за величини другого порядку малості: а насправді це зовсім не так, про що свідчать вирази (16).

Щоб глибше проникнути в суть ко-енерґії, надамо виразу енерґії (13) иншого вигляду. Для цього скористаємося постулатом Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \xi} v_\xi = \boldsymbol{\delta}_b, \quad \xi = x, y, z, \tag{17}$$

де $\boldsymbol{\delta}_b$ – густина струмів зміщення; $v_\xi = \partial\xi / dt$ – миттєва швидкість руху, то одержимо, що

$$f_{k\xi} = -\frac{\mathbf{E}\boldsymbol{\delta}_b}{v_\xi}, \quad \xi = x, y, z. \tag{18}$$

Звернемося до важливих механічних аналогій: $\mathbf{A} \to \mathbf{r}, \mathbf{E} \to \mathbf{v}, \mathbf{D} \to \mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}_b \to \mathbf{f}\ \varepsilon \to m$, де відповідно відстань, швидкість, імпульс, сила, маса. Під цим кутом зору в пустолаті Максвелла (17) проглядається в аналогії відомий вираз $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt = m''d\mathbf{v}/dt$, де m'' – диференціальна маса. Тож поява у (16) матриці диференціальних проникностей є цілком природним. Тому істинною силовою характеристикою електромагнетного поля треба признати силову дію таки кінетичної енерґії, а не ко-енерґії.

5. Висновок. Варіаційні методи як посередники закону збереження енерґії в електромагнетному полі оперують поняттям лише кінетичної ко-енерґії як більшою $w_{kc} > w_k$, бо саме вона є первинна. Частина коенерґії тратиться на "супротив його нелінійности". Тож явище енерґії, що супроводжує рух, постає кінетичною ко-енерґією, а проявляється кінетичною енерґією і відповідною їй силовою дією (див. (13), (18)).

[1]. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии (пер. з англ.). – М.-Л.: Энергия, 1964, 528 с.

[2]. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2007, 310 с.

[3]. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010, 508 с.

[4]. Tchaban V. Symmetry of energy. – Computational Problems of Electrical Engineering, vol. 2, No 1, 2013 pp. 129-132.