Виробничі функції з взаємозамінними ресурсами. Показники використаних ресурсів

Д. т. н., проф. Л. Білий, студ. В. Федюк

Університет банківської справи НБУ, 04070 м. Київ, вул. Андріївська, 1

Abstract. In order to address the problems of using production functions for modelling the dynamic processes associated with the requirements for the existence of derivatives is proposed method for determining the boundary of productivity and production through the middle of the boundary rates of substitution of resources through the middle and boundary indicators of productivity.

Key words: mathematical modeling, production functions, elasticity of production.

Постановка проблеми.

Економічна система, що моделюється, подається у вигляді сукупності певного числа елементарних економічних одиниць, кожна з яких має в економічній системі певну функцію, поєднану з виробництвом, споживанням, розподілом або збереженням матеріальних благ [1-4].

Економіко-математична модель виробничо-технологічного рівня економічної системи полягає в описуванні:

- потоків матеріальних благ і трудових ресурсів між елементарними економічними одиницями;
- закономірностей перетворення ресурсів і продуктів у цих елементарних одиницях.

Після описування потоків між елементарними одиницями моделі потрібно сформулювати в математичній формі закономірності перетворення ресурсів і продуктів в цих одиницях.

Співвідношення, які описують закономірності випуску нових продуктів у виробничих елементарних одиницях моделей, прийнято називати виробничими функціями. Виробнича функція – це функція, незалежна змінна якої приймає значення об'ємів затрачуваного або використовуваного ресурсу (фактора виробництва), а залежна змінна – значення об'ємів продукції випуску [1]

$$y = f(x), \tag{1}$$

де $x(x \geq 0)$ і $y(y \geq 0)$ – числові величини. Функцію (1) однієї змінної називають одноресурсною або однофакторною. Вираз (1) означає, що якщо ресурс затрачається або використовується в кількості x одиниць, то продукція випускається в кількості $y = f(x)$ одиниць. Символ f – знак функції, є характеристикою виробничої системи, яка перетворює ресурс у випуск.

Якщо для виготовлення продукції використовують декілька ресурсів або факторів виробництва, то такий процес моделюється функціями декількох змінних або багатофакторними функціями.

Виробнича функція декількох змінних - це функція, незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ якої приймають значення об'ємів затрачуваних або використовуваних ресурсів (число змінних n рівне числу ресурсів, а значення функції має зміст величини об'ємів випуску):

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2}$$

де $y(y \geq 0)$ – скалярна, а x – векторна величина, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координати вектора x.

Щодо виробничих функцій (1), (2) приймають припущення про неперервну зміну аргументів і достатньо плавну зміну випуску за зміни затрат ресурсів. Математичний зміст цього припущення такий: фун–кції (1), (2) задані за всіх невід'ємних значень аргу–ментів і є неперервні або необхідне число разів дифе–ренційованими. Це означає, що дослідник мусить мати в своєму розпорядженні алгоритм, який дасть змогу обчислювати значення функції у будь-якій точці, де вона визначена.

У практичних задачах економіко-математичного моделювання динамічних виробничих процесів виконання таких жорстких вимог до виробничих функцій не завжди можливе. Зокрема, статистичні дані, по яких оцінюються виробничі функції, завжди дискретні; зазвичай це дані по роках. Із приведених міркувань випливає необхідність розв'язання цієї проблеми.

Аналіз останніх досліджень.

Нехай $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ – виробнича функція. Ефективність використання ресурсів характеризують за допомогою двох основних показників:

1. Середня продуктивність i-го ресурсу (фактора виробництва) або середній випуск по i-му ресурсу

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i} \quad (i = 1,2). \tag{3}$$

2. Гранична(маржинальна) продуктивність і-го ресурсу (фактора виробництва) або граничний випуск по i-му ресурсу

$$M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1,2). \tag{4}$$

Позначимо символами Δx_i і $\Delta_i(f(x_i))$, відповідно, приріст змінної x_i і відповідний їй частинний приріст виробничої функції. Тоді матимемо

$$\Delta_1(f(x_1, x_2)) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2);$$

$$\Delta_2(f(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2).$$

При малих Δx_i маємо наближену рівність

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} \quad (i = 1,2).$$

Отже, гранична продуктивність наближено показує, на скільки одиниць зросте об'єм випуску y, якщо об'єм затрат x_i першого ресурсу зросте на одну (достатньо малу) одиницю при незмінних затратах другого ресурсу. Граничну величину виробничої функції доцільно інтерпретувати, використовуючи близьке до неї відношення малих кінцевих величин, тобто $\Delta f(x)$ і Δx_i. Ця обставина є ключовою для розуміння економічного змісту граничної продуктивності.

Крім середньої і граничної ефективності виробничих факторів широке застосування в економічному аналізі мають норми еквівалентної замінюваності факторів.

Для виробничої функції

$$y = f(x) = f(x_1, x_2) \tag{5}$$

граничною нормою заміни *i*-го ресурсу *j*-м називається вираз

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \quad (i,j = 1,2) \tag{6}$$

при сталому *y*. У виразі (6) *i* – номер ресурсу, що замінюється, *j* – номер ресурсу, яким замінюється *i*-й. Найчастіше вживаний термін, що розкриває зміст виразу (6) – гранична норма заміни ресурсів.

Знайдемо вираз (6), використовуючи підхід, викладений в [1]. Нехай випуск *y* є сталим, тобто всі набори затрачуваних ресурсів розміщені на одній ізокванті. Тоді перший повний диференціал *dy* виробничої функції $y = f(x)$ тотожньо дорівнює нулю:

$$dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

або в загальному випуску

$$dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i,j = 1,2),$$

звідки dx_j буде дорівнювати

$$dx_j = -\frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} dx_i \quad (i,j = 1,2). \tag{7}$$

Поділивши обидві частини (7) на dx_i, отримаємо

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} \quad (i,j = 1,2). \tag{8}$$

Порівнюючи (7) з (6), маємо

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} > 0 \quad (i,j = 1,2). \tag{9}$$

Викладене вище свідчить про те, що для глибокого аналізу виробничих процесів необхідне широке використання методів диференціального числення – знаходження похідної у випадку однієї змінної і частинних похідних, якщо функція залежить від декількох аргументів.

Мета дослідження полягає в усуненні проблеми знаходження похідних виробничої функції при обчисленні граничної норми заміщення ресурсів виробництва.

Обгрунтування отриманих наукових результатів.

Показники середньої продуктивності або середнього продукту і граничної продуктивності або граничного продукту економісти запозичили з технічних систем з відповідними назвами статичних і динамічних параметрів. Математики встановили взаємозв'язок між цими показниками або параметрами [1,5]. Покажемо цей взаємозв'язок на прикладі функції (5)

Відносні показники для кожного ресурсу будуть

$$A_1 = \frac{f(x)}{x_1}; \qquad A_2 = \frac{f(x)}{x_2}. \tag{10}$$

З виразів (10) функцію можна записати у вигляді

$$f(x) = A_1 \cdot x_1; \quad f(x) = A_2 \cdot x_2. \tag{11}$$

Таке представлення функції є більш загальним, бо поширюється й на матричний аргумент.

Продиференціюємо вираз (11), відповідно, по x_1 і x_2. Отримаємо граничні продуктивності по кожному з ресурсів

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} x_1 + A_1;$$

$$M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_2} x_2 + A_2. \tag{12}$$

Рівності (12) виражають взаємозв'язок між граничними і відносними показниками економічної системи або з іншими позначенням показників між статичними і динамічними параметрами технічної системи. Показниками A_i і M_i є визначеними й однозначними, а вирази (12) однозначно описують взаємозв'язок між ними.

Розглянемо питання заміни виробничих ресурсів і покажемо доцільність використання взаємозв'язків між показниками A_i і M_i для визначення граничної норми заміщення ресурсів. Характеристика такої заміни виражає співвідношення між зміною об'єму випуску, викликаною заміною на одиницю *i*-ого ресурсу, і такою ж заміною, обумовленою варіацією на одиницю *j*-го ресурсу.

У відповідності з (9) для виробничої функції (5) гранична норма заміщення представлена відношенням граничних показників

$$R_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial f(x)/\partial x_1}{\partial f(x)/\partial x_2} = \frac{M_1}{M_2}. \tag{13}$$

Після підстановки (12) в (13) отримаємо

$$R_{21} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} x_1 + A_1\right) \Big/ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_2} x_2 + A_2\right). \tag{14}$$

Права частина виразу граничної норми заміщення ресурсів (14), як і праві частини виразів граничної продуктивності (12) оперують лише з середніми показниками та їх похідними. В них відсутні повні або частинні похідні виробничих функцій.

Відносною характеристикою зміни випуску при збільшенні затрат є показник еластичності випуску щодо затрат *i*-го ресурсу

$$E_i = \frac{x_i}{y} = \frac{dy}{dx_i} \qquad (i = 1, 2). \qquad (15)$$

Еластичність випуску щодо затрат ресурсу показує, на скільки процентів виросте обсяг продукції при збільшенні затрат ресурсів на 1%.

Неважко зауважити, що права частина виразу (15) є добуток оберненої середньої продуктивності на граничну, тобто

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} \qquad (i = 1, 2). \qquad (16)$$

Підстановкою (12) в (16) отримаємо

$$E_i = \frac{\partial A_i}{A_i} \frac{x_i}{\partial x_i} + 1 \qquad (i = 1, 2). \qquad (17)$$

Права частина виразу еластичності випуску щодо затрат i-го ресурсу містить лише середнє значення i-го ресурсу і сам i-ий ресурс.

Еквівалентним формулі (17) буде вираз

$$E_i = \frac{\ln A_i}{\ln x_i} + 1 \qquad (i = 1, 2). \qquad (17)$$

Отже, для знаходження показника еластичності за формулами (17) і (18) достатньо знати лише показник середньої продуктивності i-го ресурсу.

Разом з поняттям коефіцієнта еластичності випуску продукції від витрат ресурсів у теорії виробничих функцій використовують коефіцієнт еластичності взаємозаміни ресурсів або еластичність заміни факторів.

Для більш предметного розуміння цього поняття замість виробничої функції, представленої в загальному вигляді (5), візьмемо $x_1 = K$ рівне об'єму використовуваного основного капіталу, $x_2 = L$ – затратам живої праці. Тоді виробнича функція набуде вигляду

$$y = a_0 K^{a_1} L^{a_2} , \qquad (18)$$

тут a_0, a_1, a_2 – параметри виробничої функції. Якщо $a_1 + a_2 = 1$, то вираз (18) називається виробничою функцією Кобба-Дугласа.

Економічний аналіз виробничих процесів із взаємозамінними ресурсами найчастіше використовує виробничу функцію Кобба-Дугласа з постійною еластичністю заміщення. Еластичність заміщення σ - це міра "кривизни" ізоквант (ліній рівня виробничих функцій), а точніше "кривизну" вимірює величина $1/\sigma$. Еластичність заміщення праці капіталом

$$\sigma_{LK} = \frac{d \ln \frac{K}{L}}{d \ln \frac{y'_L}{y'_K}} \qquad (19)$$

показує, на скільки процентів зміниться капіталоозброєність K/L при зміні граничної норми заміни праці капіталом

$$MRS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{y'_L}{y'_K} \qquad (20)$$

на 1 %.

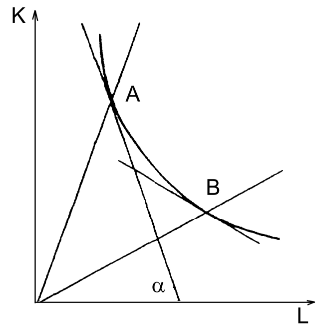

Рис. 1. Ізокванта виробничої функції

На рис. 1 зображена одна з ізоквант (ліній рівня, тобто y = const) виробничої функції (18) на площині KL. Гранична норма заміщення в точці А – це тангенс кута нахилу цієї ізокванти, тобто tg α.

При переміщенні з точки А в точку В по ізокванті нахил дотичної змінюється, змінюєтьсяі співвідношення K/L. Величина $1/\sigma$ показує відносну зміну тангенса кута нахилу лінії рівнів в розрахунку на одиницю зміни відношення K/L.

Взаємозв'язок між середніми і граничними показниками продуктивності суттєво спрощує дослідження економічних систем.

ВИСНОВОК

1. Використання виробничих функцій для моделювання динамічних економічних процесів ускладнюється вимогами щодо існування і області визначеності таких функцій. У той же час математичне моделювання на їх основі означає перехід від дискретних емпіричних значень показників економічного процесу до неперервної множини їх варіантів. З практичної точки зору використання диференційованих функцій оправдано наявністю добре розвинутого математичного апарату.

2. З метою усунення знаходження похідних виробничих функцій запропоновано метод визначення граничних показників продуктивності виробництва через середні показники, а граничну норму заміщення ресурсів – через середні і граничні показники.

3. Взаємозв'язок між середніми і граничними показниками продуктивності легко поширити на еластичність випуску, щодо затрат i-го або j-го ресурсів.

3. Запропонований підхід до знаходження основних характеристик виробничих функцій є загальний і може застосовуватись для багатофакторних функцій .

[1]. Замков О. О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике.Учебник .М.: МГУ, Издательство "ДИС", 2007. – 365 с.

[2]. Клейнер Г.Б. Производственные фукнкции: Теория, методы, применение.М.: Финансы и статистика,1996.-238 с.

[3]. Лотов А.В. Введение в экономико- математическое моделирование. М.: Наука, 1984. – 275 с.

[4]. Уолтерс А.А. Производственные функции и функции затрат: эконометрический обзор/ Теория фирмы .СПб.: Экономическая школа, 1995. – 327 с.

[5]. Білий Л.А., Дутка Г.Я. Моделювання економічних процесів статичними виробничими функціями/ Білий Л.А. //Технічні вісті. – №1(33),2(34).2011. – с. 17-19.