Усунення членів визначника, що взаємно знищуються

к.т.н, доц. Ю. Мочернюк

Львівський національний аграрний університет

Abstract. The way for elimination of determinant elements that remove one another when the determinant is being calculated hove been presented in the paper.

Key words. Determinant, elimination, elements

Топологічний метод аналізу електромагнітних процесів в лінійних електричних колах укладених із багатополюсних елементів електричного кола базується на методі вузлових напруг, коли рівняння елементів електричного кола представлені в системі полюсних струмів, використовує граф провідностей електричного кола [2]. Граф провідностей електричного кола складається із графів провідностей багатополюсних елементів, які одержують на базі рівнянь його в системі полюсних струмів (полюсні струми та полюсні напруги у полярній системі підпорядковані однозначно полюсам елемента і рівні кількості полюсів елемента, а кількість параметрів, які характеризують граф провідностей елемента рівна квадрату кількості полюсів багатополюсника) і характеризується надлишковою кількістю параметрів у порівнянні з описанням електромагнітних процесів цього ж елемента в полярній системі незалежних струмів та напруг (кількість незалежних струмів рівна кількості незалежних напруг і визначається кількістю полюсів зменшеною на кількість електрично відокремлених частин цього елемента, а кількість параметрів рівна квадрату цієї величини). Вираження залежних параметрів, що характеризують граф провідностей елемента, через незалежні, приведе до появи членів визначника, що взаємно знищуються, при його обчисленні. (В електричних колах укладених із двополюсних елементів таких проблем не виникає)

Використовуючи метод вузлових напруг, коли рівняння елементів - багатополюсників описуються в полярній системі незалежних струмів та напруг, стикаємося з тією ж проблемою, при розкритті визначника з'являються члени, які взаємно знищуються.

Наявність членів визначника, що взаємно знищуються, призводить до помилок при закругленні чисел.

Покажемо що цієї проблеми можна уникнути з допомогою теореми Біне-Коші про визначник добутку $A{\cdot}B$ двох прямокутних матриць розміром $(m{\times}n)$ і $(n{\times}m)$, який можна представити так:

$$\det(A{\cdot}B) = \sum_{\hat{e}} \mathrm{M}A_{к}{\cdot}\mathrm{M}B_{к}\,, \qquad (1)$$

де сума означає, що додаємо добутки всіх можливих мінорів m-го порядку матриці A $\mathrm{M}A_к$, утворені m її стовпцями, що входять в к-ту вибірку із n стовпців, на мінори матриці B $\mathrm{M}B_к$, утворені її рядками з тими ж номерами, що входять в к-ту вибірку із n рядків. Кількість можливих вибірок складає $C_m^{\,n}$.

В методі вузлових напруг [1], коли всі елементи електричного кола описано полярними системами незалежних величин (струмів і напруг), кінцева система рівнянь записується так:

$$W{\cdot}Y{\cdot}W_t{\cdot}V_к = W{\cdot}I_0 \qquad (2)$$

$$I = I_0 + Y\,W_t{\cdot}V_к \qquad (3)$$

де W – прямокутна матриця вузлів електричного кола, Y – квадратна об'єднана квазідіагональна матриця провідностей елементів електричного кола, I_0 – об'єднана матриця стовпець струмів короткого замикання елементів електричного кола, $V_к$ – матриця стовбець вузлових напруг електричного кола, I – об'єднана матриця стовпець струмів полюсів елементів електричного кола.

Для подальшої ілюстрації запропонованого запишемо окремо матриці, що входять в рівняння (2), для схеми електричного кола показаного на рис. 1.

Рівняння елементів електричного кола:

$$i_1 = y_{11}{\cdot}u_1 + y_{12}{\cdot}u_2 + y_{13}{\cdot}u_3 + i_{10};$$
$$i_2 = y_{21}{\cdot}u_1 + y_{22}{\cdot}u_2 + y_{23}{\cdot}u_3 + i_{20};$$
$$i_3 = y_{31}{\cdot}u_1 + y_{32}{\cdot}u_2 + y_{33}{\cdot}u_3 + i_{30};$$

$$i_4 = y_{44}{\cdot}u_4 + y_{45}{\cdot}u_5 + i_{40};$$
$$i_5 = y_{54}{\cdot}u_4 + y_{54}{\cdot}u_4 + i_{50};$$

$$i_6 = y_{66}{\cdot}u_6 + i_{60};$$

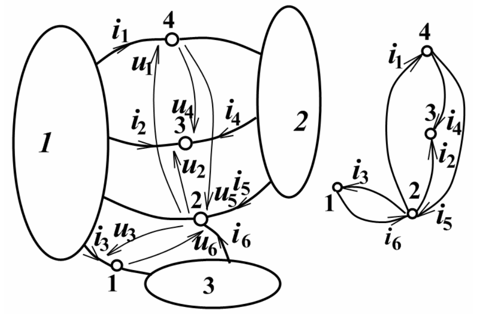

Рис1. Принципова схема електричного кола та схема струмів його.

Квадратна об'єднана квазідіагональна матриця провідностей елементів електричного кола, рядки якої підпорядковані струмам незалежних полюсів елементів електричного кола, а стовбці незалежним напругам сторін елементів електричного кола:

$$Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & 0 & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{44} & y_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{54} & y_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{66} \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

Прямокутна матриця вузлів електричного кола, рядки якої підпорядковані незалежним вузлам електричного кола, а стовбці струмам незалежних полюсів елементів електричного кола (четвертий вузол електричного кола прийнято за залежний):

$$
W = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (5)
$$

Вимноживши матриці W (5) на Y (4), представимо добуток $W{\cdot}Y{\cdot}W_t$ так:

$$
\begin{Vmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} & 0 & 0 & -y_{66} \\ -y_{11}-y_{21}-y_{31} & -y_{12}-y_{22}-y_{32} & -y_{13}-y_{23}-y_{33} & y_{54} & y_{55} & y_{66} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{44} & y_{45} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (6)
$$

Стовпець матриці, що знаходиться зліва, в (6) вміщає множину різних y-параметрів. Замість такого стовпця створимо множину стовпців, в кожному з яких буде знаходитись тільки один y-параметр, який розмістимо над стовпцем (отже стовпець підпорядковується однозначно певному y-параметру), а в самому стовпці залишаться в комірках 1, –1, або 1, або –1 де був розташований відповідний y-параметр та нулі в решта комірках цього стовпця (див. (7)).

Щоб не змінився добуток матриць (6) в матриці в (6), розташованій справа, відповідні стовпці до стовпців матриці лівої матриці повторимо ідентичними стовпцями відповідну кількість разів (див. (7)).

Так перетворені матриці добутку (6) подано добутком (7), при чому множини стовпців, що відповідають стовпцям в добутку матриць (6) розділені відрізками ліній вертикальними в лівій матриці і горизонтальними в правій матриці.

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc|cc|cc|c}
y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{12} & y_{22} & y_{32} & y_{13} & y_{23} & y_{33} & y_{44} & y_{54} & y_{45} & y_{55} & y_{66}
\end{array}
$$

$$
\left\Vert \begin{array}{ccc|ccc|ccc|cc|cc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array} \right\Vert \cdot \left\Vert \begin{array}{ccc}
0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline
0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline
1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline
0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline
-1 & 1 & 0
\end{array} \right\Vert \qquad (7)
$$

Добуток матриць виразу (6) і виразу (7) представлено матрицею (8).

$$
W \cdot Y \cdot W_t = \begin{Vmatrix} y_{33}+y_{66} & -y_{31}-y_{32}-y_{33}-y_{66} & y_{32} \\ -y_{13}-y_{23}-y_{33}-y_{66} & \begin{array}{c} y_{11}+y_{21}+y_{31}+y_{12}+ \\ +y_{22}+y_{32}+y_{13}+y_{23}+ \\ +y_{33}+y_{55}+y_{66} \end{array} & -y_{12}-y_{22}-y_{32}+y_{54} \\ y_{23} & -y_{21}-y_{22}-y_{23}+y_{45} & y_{22}+y_{44} \end{Vmatrix} \qquad (8)
$$

Розкриття детермінанта матриці (8) призведе до появи членів визначника рівних за величиною і протилежних за знаком, які взаємно знищаться.

Розкриваючи детермінант добутку матриць (7), скориставшись теоремою Біне-Коші, позбудемося членів визначника, що взаємно знищуються, бо повторення однакової комбінації y-параметрів в членах добутку визначника не можливий виходячи із формулювання цієї теореми (1).

Кількість мінорів ($MA_к$ відповідно (1)) (в загальному), які потрібно буде обчислити при m рядках (кількість вузлів зменшена на кількість електрично відокремлених частин) і n стовбцях (сумарна кількість y-параметрів всіх елементів електричного кола) лівої матриці в (7), рівно кількості комбінацій із n елементів по m. Таку саму кількість мінорів ($MB_к$ відповідно (1)) потрібно обчислити і для правої матриці в (7). Член детермінанту рівний добутку y-параметрів, що відповідають m стовбцям, що ввійшли в дану вибрану комбінацію із m стовпців, помноженому на мінори лівої і правої матриць даної вибраної комбінації. Мінори можуть приймати значення 1, –1, 0 [1,2].

Кількість мінорів m-го прядку, які потрібно буде обчисляти можна значно зменшити, якщо організувати вибір стовпців в мінор так, щоб в кожен мінор входило тільки по одному стовпцю із множин стовпців, які входять в множини стовпців між вертикальними (горизонтальними) (таких множин є стільки скільки струмів в схемі струмів електричного кола) рисками в матрицях (7) (входження двох і більше стовпців в стовпці мінору перетворюють його в нуль, бо є лінійно залежні в правій матриці). Крім того вміст комірок в стовпцях мінорів можуть приймати значення 1, –1, 0, що значно облегшує визначення величини мінора, яка може приймати значення 1, –1, 0 [1,2]. А зрештою потрібно визначити тільки знак мінора при нерівності його нулеві. Добуток знаків мінорів лівої і правої матриць в (7) є знаком члена визначника.

У випадку електричних кіл укладених із двополюсних елементів матриця Y в рівнянні (2), (3) і (4) діагональна тому добуток $W{\cdot}Y$ по своїй структурі представлятиме матрицю W, в якій замість 1 і –1, що відповідають струму двополюсного елемента буде знаходитися провідність цього елемента електричного кола. Застосувавши теорему Біне-Коші (1) до так представленого добутку $(W{\cdot}Y){\cdot}W_t$ ($A = (W{\cdot}Y)$, $B = W_t$), одержимо визначник, в якому відсутні члени рівні за величиною і протилежні за знаком, що взаємно знищуються. Очевидно мінор m-го порядку матриці $(W{\cdot}Y)$ складений із m стовпців представляє собою мінор матриці W_t m-го порядку укладений із тих же m рядків що і матриці $(W{\cdot}Y)$ тільки странспонований. Тому добуток цих мінорів буде завжди додатний. Отже всі члени визначника будуть мати один і той же знак ''+'', без врахування знаків самих y-параметрів, що входять в цей конкретний член визначника.

Кожному такому не рівному нулеві мінору буде відповідати ''дерево'' схеми струмів (як граф), що відповідає вимогам:

а) таке ''дерево'' складається m = q – 1 струмів;

б) таке ''дерево'' є зв'язним графом тобто з кожним вузлом інцедентний хоча б один струм в схемі струмів;

в) відсутні цикли.

Отже кожному члену визначника буде однозначно відповідати величина ''дерева'' схеми струмів (кожному струму двополюсного елемента електричного кола однозначно відповідає y-параметр цього елемента), яка рівна добутку y-параметрів, що увійшли в це ''дерево'' відповідно матриці $(W{\cdot}Y)$.

Ілюструємо вище сказане на прикладі.

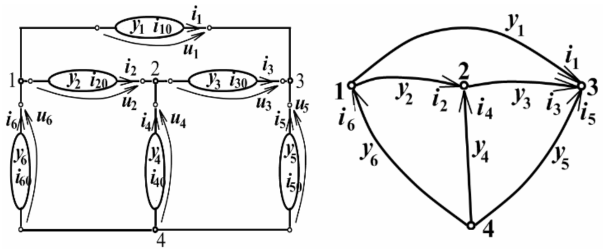

Рис. 2.Електричне коло укладене з двополюсних елементів та його схема струмів, на якій показані також y-параметри елементів.

Добуток матриць $(W{\cdot}Y){\cdot}W_t$ представляється так (y-параметри винесені в перший рядк над матрицею W, щоб зручніше було бачити W і $\cdot W_t$):

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

Для прикладу, величина одного із ''дерев'', що відповідає стовпцям 1,3,5 матриці $(W{\cdot}Y)$, рівна $y_1{\cdot}y_3{\cdot}y_5$ і представляє член визначника $\det((W{\cdot}Y){\cdot}W_t)$.

Отже ми приходимо до відомого топологічного методу.

На завершення зауважимо, що якщо є підозра появи членів, які взаємно знищуються, при обчисленні визначника, можна помножити матрицю визначника на одиничну матрицю, а далі використати поданий спосіб обчислення цього визначника.

Проілюструємо сказане на приведеному прикладі. Матрицю (8) помножимо на одиничну матрицю:

$$\begin{Vmatrix} y_{33} + y_{66} & -y_{31} - y_{32} - y_{33} - y_{66} & y_{32} \\ -y_{13} - y_{23} - y_{33} - y_{66} & \begin{matrix} y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{12} + \\ + y_{22} + y_{32} + y_{13} + y_{23} + \\ + y_{33} + y_{55} + y_{66} \end{matrix} & -y_{12} - y_{22} - y_{32} + y_{54} \\ y_{23} & -y_{21} - y_{22} - y_{23} + y_{45} & y_{22} + y_{44} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (10)$$

Перетворимо добуток матриць (10) так як це ми зробили при формуванні добутку матриць (7):

$$\begin{Vmatrix} y_{33} & y_{66} & y_{13} & y_{23} & y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{66} & y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{22} & y_{13} & y_{23} & y_{55} & y_{45} & y_{32} & y_{12} & y_{22} & y_{54} & y_{44} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & =1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (11)$$

В лівій матриці в (11) є одинакові y-параметри рівні за величиною але протилежні за знаком. Наприклад, y_{33} в першому стовпці і $-y_{33}$ в сьомому стовпці. Залишимо y_{33} в першому стовпці і вилучимо його із сьомого стовпця, а в правій матриці в (11) змінимо знак на протилежний елемента (при 1 запишемо –) сьомого рядка і додамо його до першого рядка цієї матриці. Так поступимо з решта подібними y-параметрами. Як що подібні y-параметрами мають одинакові знаки то в правій матриці знак елемента не змінюємо. Так перетворений добуток матриць (11) подано в (12):

$$\begin{Vmatrix} y_{33} & y_{66} & y_{13} & y_{23} & y_{31} & y_{32} & y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{22} & y_{55} & y_{45} & y_{54} & y_{44} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (12)$$

Вимноживши матриці в (12), одержимо (8). Застосуємо теорему Біне-Коші (1) до (12), одержимо визначник (8), в якому відсутні члени, що взаємно знищуються.

Кількість мінорів які потрібно буде обчисляти теж можна значно зменшити певним чином організувавши вибір комбінацій стовпців і рядків в матрицях (12).

[1]. Б. І. Блажкевич Основи теорії лінійних електричних кіл (кола з зосередженими параметрами). Київ ''Наукова думка'' 1964. ст. 441.

[2]. Б. І. Блажкевич Топологічні методи аналізу електричних кіл . Київ ''Наукова думка'' 1971. ст.315.