

Метод дослідження статичної стійкості виконавчих елементів комп'ютерної системи

Д.т.н. П. Скоропад, к.т.н. О. Чабан, асп. З. Чабан

Національний університет «Львівська політехніка»

Abstract. The algorithm of calculation of steady-state processes and determination of them is offered static stability of three-phase asynchronous motor at an one-phase feed. The method of analysis is built on the base model of sensitivity to the initial conditions and calculating of matrix of monodromy. The results of computation are given.

Key words: asynchronous motor, one-phase feed, steady-state process, static stability.

1. Вступ.

Виконавчі елементи замкнутої цифрової комп'ютерної система управління є зазвичай ті чи інші електромезанічні пристрої. З точки зору дослідження статичної стійкості найцікавішим з них є трифазний асинхронний мотор в однофазному стані живлення. Такий стан – достатньо частий випадок в практиці експлуатації. Він може бути наперед передбачуваний за відсутності трифазного джерела живлення, а може бути як аварійний у робочому стані за трифазного живлення.

2. Задача Коші.

Систему диференціальних рівнянь виконавчого елемента запишемо в загальному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x = (i, \omega)_t, \quad (1)$$

i, ω – колонка струмів і кутова швидкість виконавчого елемента.

Інтегрування диференціальних рівнянь (1) при заданих початкових умовах $x(t)|_{t=0} = x(0)$ становить задачу Коші для заданої системи диференціальних рівнянь, яка презентує задачу розрахунку перехідних електромеханічних процесів мотора.

3. Доточкова крайова задача.

Доточкова крайова задача – значно складніша за задачу Коші, бо тут на диференціальні рівняння (1) накладається додаткова умова періодичності

$$x(0) - x(x(0), T) = 0, \quad (2)$$

тобто рівності значень функції на початку і кінці часового періоду T .

Існують такі початкові умови $x(0)$, які при інтегруванні (1) на інтервалі часу від 0 до T дають змогу ввійти безпосередньо в періодичний розв'язок, обминаючи перехідну реакцію. Такі початкові умови розглядатимемо як аргумент рівняння періодичності

$$f(x(0)) = x(0) - x(x(0), T) = 0. \quad (3)$$

Розв'язання нелінійного трансцендентного рівняння (3) здійснюватимемо ітераційним методом Ньютона

$$x(0)^{(s+1)} = x(0)^{(s)} - f'(x(0)^{(s)})^{-1} f(x(0)^{(s)}) \quad (4)$$

Матрицю Якобі отримуємо диференціюванням по $x(0)$ цільової функції (3)

$$f'(x(0)) = 1 - \Phi(T), \quad (5)$$

де

$$\Phi(T) = \left. \frac{\partial x(x(0), t)}{\partial x(0)} \right|_{t=T}. \quad (6)$$

Матриця (6) називається матрицею монодромії в момент часу $t = T$.

4. Визначення статичної стійкості. Нехай початковим умовам $t = t_0, x = x_0$ відповідає розв'язок диференціального рівняння $x = x(t)$ ($0 \leq t \leq \infty$), який називатимемо незбуреним. Розв'язок рівняння (1) за інших початкових умов $t = t_0, \tilde{x} = \tilde{x}_0$ називатимемо збуреним. За Ляпуновим, незбурений розв'язок $x(t)$ називається стійким, якщо протягом усього часу $\max(\tilde{x}(t) - x(t))|_{t_0 \leq t \leq \infty} \rightarrow 0$, якщо $|\tilde{x}_0 - x_0| \rightarrow 0$. Якщо ця умова не виконується, то незбурений розв'язок називається нестійким за Ляпуновим. Розв'язок $x(t)$ називається асимптотично стійким, якщо, крім попередньої умови, при достатньо малих $|\tilde{x}_0 - x_0|$ виконується $|\tilde{x}(t) - x(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

Асимптотичну стійкість періодичного розв'язку визначатимемо за матрицею монодромії Φ системи (6). Початкові умови для (6) $\Phi|_{t=0} = 1$.

Виявляється, що матрицю монодромії можна представити через деяку сталу матрицю M

$$\Phi(T) = e^{TM}. \quad (7)$$

Після логарифмування одержуємо

$$M = \frac{1}{T} \ln(\Phi(T, 0)). \quad (8)$$

Щоб стан був стійким при $t \rightarrow \infty$, необхідно й достатньо, щоб усі власні числа матриці M (8) мали від'ємну дійсну частину, тобто, щоб усі мультиплікатори матриці монодромії $\Phi(T)$ були за модулем меншими за одиницю

5. Математична модель.

Диференціальні рівняння (1) стану мотора запишемо у вигляді [1].

$$\frac{di}{dt} = AY; \quad Y = (u - \Omega\Psi - Ri), \quad (9)$$

де

$$u = \begin{bmatrix} \sqrt{3}U_m \sin \omega t \\ \\ \end{bmatrix}; \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_S \\ \Psi_{RA} \\ \Psi_{RB} \end{bmatrix}; \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} & & \\ & \omega & 2\omega \\ & -2\omega & -\omega \end{bmatrix},$$

$$A = q \begin{bmatrix} 1 & A_{SA} & A_{SB} \\ A_{AS} & A_A & A_{AB} \\ A_{BS} & A_{BA} & A_B \end{bmatrix}; \quad i = \begin{bmatrix} i_S \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r_{SA} + r_{SB} & & \\ & r_R & \\ & & r_R \end{bmatrix}.$$

Тут i_{SA}, i_{SB} – фазні струми обмотки статора за умови, що $i_{SC} = -i_{SA} - i_{SB}$; i_{RA}, i_{RB} – перетворені струми обмотки ротора; U_m, ω_0 – амплітуда й циклічна частота синусоїдальної напруги обмотки статора; ω – кутова швидкість ротора в ел. рад./с; r_S, r_R – резистивні опори обмотки статора й ротора; Ψ_{RA}, Ψ_{RB} – перетворені повні потокозчеплення обмотки ротора

$$\Psi_{rk} (k = A, B) = (i_{sk} + i_{rk}) / \tau + i_{rk} / \alpha_R; \quad (10)$$

де $a_S = 1/l_S$; $\alpha_R = 1/l_R$ – обернені індуктивності дисипації обмотки статора й ротора. А-коефіцієнти мають вигляд

$$\begin{aligned} A_{SA} &= -c_2 c_5 - c_3 c_8; & A_{SB} &= -c_2 c_6 - c_3 c_9; \\ A_{AS} &= -c_5 c_4 - c_6 c_7; & A_{BS} &= -c_8 c_4 - c_9 c_7; \\ A_A &= c_5 / q + A_{AS} A_{SA}; & A_{AB} &= c_6 / q + A_{AS} A_{SB}; \\ A_{BA} &= c_8 / q + A_{BS} A_{SA}; & A_B &= c_9 / q + A_{BS} A_{SB}; \\ q &= 1 / (c_1 + c_4 A_{SA} + c_7 A_{SB}), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= g_1 g_2; \quad c_1 = c_2 - c_3 + 2 / \alpha_S; \quad c_2 = b(2d_1 - d_3 - d_2) + 1 / \tau; \\ c_3 &= b(d_1 + d_3 - 2d_2) - 1 / \tau; \quad c_4 = \Delta(c_6 + c_9) - 1 / \alpha_R; \\ c_5 &= b(2d_2 + d_3) / \Delta + 1 / g_1; \quad c_6 = -b(d_1 + 2d_3) / \Delta; \\ c_7 &= -\Delta(c_5 + c_8) + 1 / \alpha_R; \quad c_8 = -b(d_2 + 2d_3) / \Delta; \\ c_9 &= b(2d_2 + d_3) / \Delta + 1 / g_1; \quad d_1 = i_A^2, \quad d_2 = i_B^2, \quad d_3 = i_A i_B; \\ b &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{i_m^2}; \quad g_1 = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha_R}; \quad g_2 = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\alpha_R}, \end{aligned}$$

причому, τ, ρ – обернені статична й диференціальна індуктивності, їх знаходимо за характеристикою намагнечування (холостого стану) машини як:

$$\tau = \left[\frac{\Psi_m(i_m)}{i_m} \right]^{-1}; \quad \rho = \left[\frac{d\Psi_m(i_m)}{di_m} \right]^{-1}, \quad (11)$$

де i_m – модуль просторового вектора намагнечувальних струмів

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_A i_B + i_B^2) / 3}; \quad i_A = i_S + i_{RA}; \quad i_B = -i_S + i_{RB}. \quad (12)$$

Рівняння електромагнетного стану мотора (9) треба доповнити рівняннями механічного руху

$$\frac{d\omega}{dt} = -p_0(-\sqrt{3}p_0 i_S(i_{RA} + i_{RB}) / \tau + M) / J, \quad (13)$$

де $M = M(\omega, t)$ – механічний момент; J – момент інерції; p_0 – кількість пар магнетних полюсів машини.

Сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь електромеханічного стану (9), (13). Вхідними даними є: $r_S, r_R, \alpha_S, \alpha_R, p_0, J$, а також крива намагнечування $\Psi_m(i_m)$, і вхідні сигнали: $U_m, \omega_0, M(\omega, t)$.

6. Побудова матриці монодромії.

Скористаємося все тією ж колонкою невідомих x (1). Але для побудови допоміжної моделі чутливості утворимо колонку невідомих y

$$y = (\Psi, \omega)_t, \quad (14)$$

де Ψ – матриця-стовпець повних потокозчеплень $\Psi = (\Psi_{SA}, \Psi_{SB}, \Psi_{RA}, \Psi_{RB})_t$.

Відповідне (14) диференціальне рівняння (7) має вигляд

$$\frac{d\Psi}{dt} = Y, \quad (15)$$

Матрицю монодромії (6) запишемо у вигляді [1]

$$\Phi = (Az, w)_t, \quad (16)$$

де

$$z = \frac{\partial \Psi}{\partial x(0)}; \quad w = \frac{\partial \omega}{\partial x(0)}. \quad (17)$$

Варіаційні рівняння для обчислення субматриць (17) одержуємо диференціюванням по $x(0)$ рівнянь електромеханічного стану (13), (15).

Диференціюючи (15), згідно з (17), одержуємо

$$\frac{dz}{dt} = -(\Omega + RA)z - \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} w \Psi. \quad (18)$$

Диференціюючи по $x(0)$ (13), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{p_0}{J} \left(\sqrt{3} p_0 \left(\frac{\partial \Psi_{SA}}{\partial x(0)} i_{SB} + \Psi_{SA} \frac{\partial i_{SB}}{\partial x(0)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \Psi_{SB}}{\partial x(0)} i_{SA} - \Psi_{SB} \frac{\partial i_{SA}}{\partial x(0)} \right) - \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} w \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Похідні

$\partial \Psi_{SA} / \partial x(0), \partial \Psi_{SB} / \partial x(0), \partial i_{SA} / \partial x(0), \partial i_{SB} / \partial x(0)$ є елементами матриць z, Az , тому вони відомі.

Таким чином, побудова матриці монодромії розглядуваного мотора вимагає інтегрування рівнянь першої варіації (18), (19).

На s -й ітерації формули Ньютона (4) лінійні варіаційні рівняння (18), (19) підлягають сумісному інтегруванню з нелінійними (9), (13) на часовому інтервалі $[0, T]$. У результаті знаходимо цільову функцію (3) й потрібну матрицю Якобі (5), (6), що цілком визначає праву частину ітераційної формули (4), а

відтак – і її шукану ліву частину $x(0)^{(s+1)}$. Процес ітерації закінчується при досягненні заданої точності входження в періодичний розв'язок $|f(x(0)^{(s)})| \leq \varepsilon$, де ε – вектор заданих точностей.

Матриця монодромії Φ (16) є, по суті, матрицею чутливостей до початкових умов. Кожний її рядок можна розглядати як градієнт певної змінної у просторі початкових умов, а кожен її стовпчик характеризує чутливість усієї множини змінних до однієї і тієї ж початкової умови. Тому диференціальні рівняння (18), (19) можна розглядати як допоміжну модель чутливості до початкових умов [1,3].

7. Алгоритм обчислень

1. Маючи на s -й ітерації значення вектора $x(t)^{(s)}$ і матриці Φ (на першому кроці початкові наближення), інтегруємо рівняння (9), (13), (18), (19) на часовому інтервалі $[0, T]$.

Значення $x(0)^{(0)}$ як нульове наближення формули Ньютона і початкова умова задаються довільними. У тих випадках, коли у розв'язку можливе існування декількох періодичних станів, значення $x(0)^{(0)}$ визначає вхід процесу в зону притягання одного з них.

Виходячи з (24), значення $\Phi(0)^{(s)}$, у тому числі й $\Phi(0)^{(0)}$, дорівнює одиничній матриці $\Phi(0)^{(s)} = 1$.

2. Маючи тепер значення $x(T)^{(s)}$ і $\Phi(T)^{(s)}$, згідно з (2) обчислюємо $f(x(0)^{(s)})$, а згідно з (5) – $f'(x(0)^{(s)})$.

3. На підставі ітераційної формули (4) знаходимо уточнення значення вектора $x(0)^{(s+1)}$.

4. Знаходимо мультиплікатори матриці $\Phi(T)$ в усталеному стані. За їхніми значеннями й судимо про стійкість системи.

Якщо задати умову, що $T \rightarrow \infty$, то даний алгоритм відтворює розрахунок перехідних процесів!

6. Результати симуляції

Запропонований метод аналізу отримав всебічну перевірку в складних задачах електромеханіки, і виявився дуже ефективним. Результати симуляції перехідного (рис. 1) і усталеного (рис. 2) процесів модельного мотора показано нижче.

Параметри мотора:

$r_S = 1.01 \text{ Ом}; r_R = 1.80 \text{ Ом}; \alpha_S = 65 \text{ Гн}^{-1}; \alpha_R = 70 \text{ Гн}^{-1}; \alpha_m = 4.73 \text{ Гн}^{-1}; J = 0.025 \text{ кгм}^2; p_0 = 2$. Крива намагнетчування апроксимована залежністю

$$\Psi_m(i_m) = \begin{cases} 0.215i_m, & \text{if } 0 \leq i_m \leq 2; \\ 0.2213i_m - 0.0026i_m^3 + 0.00002i_m^5, & \text{if } 2 < i_m < 7; \\ 0.043i_m + 0.7, & \text{if } 7 \leq i_m. \end{cases}$$

Вхідні електричні сигнали:

$u_m = 310.5 \text{ В}, \omega_0 = 314 \text{ с}^{-1}$, механічні $M(\omega, t) = 0$ і 5

Нм.

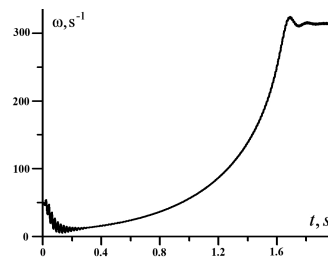


Рис. 1. Пуск ненавантаженого мотора. Залежність $\omega = \omega(t)$ при $\omega(0) = 50$.

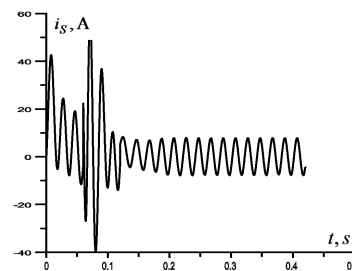


Рис. 2. Крива струму статора $i_s = i_s(t)$ на інтервалі $[0, 0.3T]$ на п'яти ітераціях, що привели до стійкого усталеного процесу.

Звертаємо увагу, що із-за появи третьої субгармоніки інтервал періодичності тут становить $[0, 3T]$.

Значення матриці монодромії в усталеному стані, показаному на рис. 2, такі

$$\Phi(T) =$$

1,238724	2,208169	0,997888	0,062731
-1,32039	-2,46199	-1,15844	-0,07195
1,036032	2,022933	1,021675	0,058673
2,206206	3,034865	0,918113	-0,26766

Модулі відповідних їй мультиплікаторів Флоке звідомо менші одиниці:

-0.339488215449038 + 0.148135878277776i
-0.339488215449038 - 0.148135878277776i
0.102913409312265
0.106817894062979

Тож маємо асимптотично стійкий стан!

Висновок. Запропонований алгоритм гарантує успішний аналіз усталених електромеханічних періодичних процесів і визначення їхньої стійкості.

[1]. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010, 508 с.

[2]. Чабан В., Гоголь З. Математична модель трифазного асинхронного мотора в однофазному стані. – Електротехніка й електромеханіка, 2011, № 3, с. 43–45.

[3]. Чабан В., Гоголь З., Косточко С. Алгоритм розрахунку перехідних і усталених процесів асинхронного мотора. – Електротехніка й електромеханіка, 2011, № 3, с. 46–48.