Математичне моделювання поперечних коливань пруж–ної мембрани з урахуванням нелінійних дисипативних сил

П. Пукач [*] , д.т.н., проф. А. Чабан [**]

[*] Національний університет Львівська політехніка,

[**] Львівський національний аграрний університет, Політехніка Ченстоховська (Польща)

Abstract: The correctness of the mixed problem that underlies mathematical model of oscillatory system are pro–ved by using interdisciplinary approaches to modeling of the small transverse vibrations in an elastic isotropic non–linear medium as an example of oscillations of the membrane. Numerical analysis of model is conducted.

Key words: modified Lagrange function, the Lagrange equation of the second order, Galerkin me–thod.

Вступ. Основною проблемою сучасного математичного моделювання є відповідність математичної моделі реальному об'єкту. Зазвичай стани реальних технічних об'єктів описуються нелінійними функціональними залежностями за нелінійних параметрів. Тому під час побудови адекватних математичних моделей ці залежності необхідно враховувати. Важливим питанням під час розв'язання нелінійних задач є дослідження коректності розв'язків певних крайових задач. На жаль, відомі дотепер методи не дають змоги у загальному випадку розв'язати дану проблему. Мова йде, для прикладу, про нелінійні коливання механічних систем. У загальному випадку дослідження коректності розв'язку нелінійної задачі є досить складним в математичному плані завданням. Вирішенню однієї з низки розглянутих вище задач, а саме задачі про нелінійні поперечні коливання мембрани, присвячена ця робота.

Якісні властивості розв'язку. Малі поперечні коливання плоского пружного ізотропного середовища займають важливе місце в аналізі механічних коливань при математичному моделюванні широкого кола технічних систем – коливання стінок оливних баків в потужних силових трансформаторах, коливання проводів повітряних ліній тощо. Подібного роду процеси описуються рівняннями малих поперечних коливань. Зокрема, у першому випадку мова йде про рівняння малих поперечних коливань пружної мембрани з урахуванням зовнішньої та внутрішньої дисипації [1, 2, 3]. На підставі розробленого в [1] інтердисциплінарного методу математичного моделювання запишемо модифіковану функцію густини Лагранжа [4]:

$$L = T - P + \Phi - D, \tag{1}$$

де T, P – густини кінетичної та потенціальної енергій коливальної системи відповідно, Φ – нелінійна функція зовнішньої та внутрішньої дисипації енергії, $D \equiv 0$ – енергія активних і пасивних сил непотенціального характеру, що діють на систему ззовні. Детально розписуючи вирази для T, P, Φ у формулі (1), на підставі інтегрального варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона отримаємо рівняння малих поперечних коливань мембрани під дією нелінійних дисипативних сил:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + b\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t}\right) + $$
$$+ c\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2}$$

де $a > 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ – сталі (функції), які характеризують фізико-механічні властивості коливальної системи. Розглядатимемо нелінійні коливання мембрани у випадку початкового амплітудного зміщення та нульової початкової швидкості точок мембрани. Крім того, будемо розглядати випадок жорстко закріпленої по периметру мембрани. Вказані міркування приводять до необхідності розглядати для рівняння (2) в паралелепіпеді $Q = \Pi \times [0,T]$ (Π - прямокутник у площині Oxy з периметром l) змішану задачу з початковими умовами

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u(x,y,t)\big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{4}$$

де $\partial\Pi$ – межа прямокутника Π.

Змішана задача (2), (3), (4) є задачею для нелінійного еволюційного рівняння третього порядку. Оскільки для цієї задачі не існує жодних аналітичних методів знаходження розв'язку, то для її розв'язування необхідно застосовувати чисельні методи. Наведемо методику якісного дослідження розв'язку в математичній моделі малих поперечних нелінійних коливань мембрани, яка дозволяє отримати результати існування та єдиності розв'язку задачі (2), (3), (4). Після обґрунтування коректності питання вибору того чи іншого чисельного методу є принциповим лише з точки зору ефективності самого методу. Зауважимо також, що у праці [5] аналогічні питання розглянуто для задачі, яка моделює нелінійні згинні коливання стрижня.

Нехай p' – число, спряжене до p, тобто $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Узагальненим розв'язком задачі (2), (3), (4) в області Q називаємо функцію $u \in C([0,T]; H_0^1(\Pi))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C\left([0,T]; H^{-1}(\Pi) + L^{p'}(\Pi)\right) \cap L^2\left((0,T); H_0^1(\Pi)\right) \cap L^p\left((0,T); L^p(\Pi)\right)$, яка задовольняє умови (3), (4) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdydt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+c\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}v\right]dxdydt+$$

$$+\int\limits_{\Pi}\frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial t}v(x,y,\tau)dxdy=0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau\in(0,T]$ і для довільної функції $v\in L^2((0,T);H_0^1(\Pi))\cap L^p((0,T);L^p(\Pi))$, $\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(Q)$.

Основний результат якісного дослідження розв'язку наступний: при виконанні умови $u_0\in H_0^1(\Pi)$ існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (2), (3), (4) в Q. Результат отримано на підставі використання методу Гальоркіна та загальних підходів теорії нелінійних крайових задач, (5).

Отже, тепер можна з впевненістю використо–вувати рівняння (2), яка в дискретному вигляді запи–шемо так:

$$\frac{dv_{i,j}}{dt}=a^2\left(\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right)+$$

$$+\frac{\xi}{\rho_S l}\left(\frac{v_{i-1,j}-2v_{i,j}+v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{v_{i,j-1}-2v_{i,j}+v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right)-$$

$$-\frac{\nu}{\rho_S l}\left|v_{i,j}\right|^{p-2},\qquad \frac{du_{i,j}}{dt}=v_{i,j}. \qquad (6)$$

Для математичного моделювання вільних нелінійних малих поперечних коливань використаємо металічну мембрану прямокутної форми, зафіксовану по периметру під дією сили на одиницю довжини периметра $\frac{N}{l}$. Вільні коливання описуються задачею (2), (3), (4). Зазначимо, що сталі коефіцієнти у рівнянні (2) відповідно дорівнюють: $a=\sqrt{\frac{N}{\rho l}}$, $b=\frac{\xi}{\rho l}$, $c=-\frac{\nu}{\rho l}$, де ρ – поверхнева густина матеріалу прямокутної мембрани з фіксованим периметром l, $\frac{N}{l}$ – рівномірно розподілена за всією межею мембрани сила, ν – коефіцієнт зовнішньої, а ξ – коефіцієнт внутрішньої дисипації плоского середовища. Просторову дискретизацію рівняння (6) здійснюємо за методом сіток.

Результати комп'ютерної симуляції. У якості прикладу використано стальну мембрану прямокутної форми: довжина – 1 м, ширина – 1 м, товщина – 2 мм з густиною матеріалу $\rho_V=7850$ кг/м^3. Мембрана отримала збурення прикладеною силою до її центральної точки в напрямку розтягу (перпендикулярно до площини мембрани). Початкові умови для функції зміщення в дискретизованих диференціальних рівняннях механічного стану (6) розраховувались, виходячи з геометричних побудов (в момент комутації натягнута мембрана прийняла форму правильної чотирикутної піраміди).

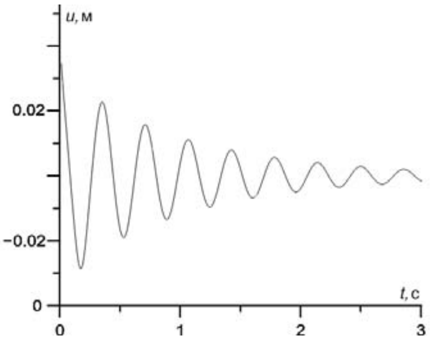

Рис. 1. Перехідне переміщення центрального вузла мембрани

На рисунку 1 показано перехідне переміщення центрального вузла мембрани на першому етапі симуляції. За таких параметрів системи частота коливань останньої сягає менше 4 Гц.

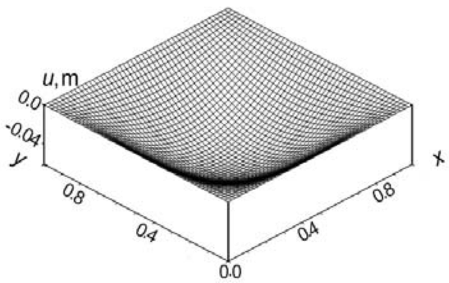

Рис. 2. Просторове положення мембрани в момент часу $t=0,2$ с

Рисунок 2 репрезентує просторове положення мембрани в момент часу $t=0,2$ с. Аналіз цього рисунку потрібно здійснювати паралельно з попереднім, з якого видно, що в досліджуваний момент часу мембрана розташована опуклістю вниз.

Висновок. Представлений у роботі метод досліджень коректності розв'язку нелінійних двовимірних просторових задач з успіхом продемонстрований під час досліджень нелінійних коливань мембрани. За результатами комп'ютерної симуляції можемо стверджувати про достатній ступінь адекватності розробленої моделі. Тут власне показано вплив нелінійного середовища на коливні процеси в механічній системі.

[1]. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах/А. Чабан.– Львів.: В-во Тараса Сороки, 2008.- 328 с.
[2]. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность/В.И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н., П. Семерикова.– Москва: Физматлит, 2002.– 208 с.
[3]. Филиппов А.А. Колебания деформируемых систем / А.А. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 730 с.
[4]. Chaban A. Non-Conservative Lagrangian / Andriy Chaban // Технічні вісті.– 2012.– № 1(35), 2(36).– С. 20–21.
[5]. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних згинальних коливань в стрижнях Фогта-Кельвіна з урахуванням опору/П. Я. Пукач//Праці Одеського політехн. ун-ту.- 2013.– № 2(41).– С. 59-64.