Математичне моделювання динамічних процесів у сильно нелінійних неавтономних механічних системах

П. Пукач

Національний університет "Львівська політехніка"

Abstract. A general methodology to study some classes of nonlinear non-autonomous systems with strong nonlinea-rity is described. The methods of studying of reso–nance phenomena is designed. Research methods are based on the idea of using special Ateb-periodic functions.

Keywords: strongly nonlinear system, resonance, special functions, amplitude-frequency response.

Актуальність теми. Постановка проблеми. Розроблення ефективних аналітичних методів, які дозволяють оптимальні інженерні рішення за рахунок вибору параметрів коливальної системи, тісно зв'я–зане з проблемою побудови і дослідження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, що описують рухи механічних систем. Цей факт випливає з аналізу публікацій, які стосуються аналітичних досліджень коливальних процесів систем із зосередженими маса–ми [1-4] та ін. У статті розглядаються системи із од–ним ступенем вільності. Вони піддаються дії збурен-ня. Збурення вважається таким, що його максимальне значення є малим порівняно з максимумом від–новлюючої сили.

Динамічні явища у сильно нелінійних сис–темах дискретної структури з одним ступенем ві–льності. Розроблено методику дослідження резо–нансних коливань систем із одним ступенем вільно–сті, відновлююча сила яких апроксимується близьким до степеневого законом. У такому випадку диферен–ціальне рівняння, яке описує вказані коливання, пред–ставляється у вигляді

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right), \qquad (1)$$

де m – маса матеріальної точки; x – її кордината у довільний момент часу; $F(x)=cx^{\nu+1}$ – функція, яка описує головну частину відновлюючої сили; c,ν – деякі сталі; $\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right)$ – аналітична 2π -періо-дична за $\theta=\mu t$ функція, μ -частота зовнішнього пері–одичного збурення, яке діє на систему; ε – малий параметр, який вказує на малу величину зов-нішнього періодичного збурення та незначне відхи-лення віднов–люючої сили від степеневого закону.

Зауваження. Щодо обмежень, які стосуються значення параметру ν, то вони пов'язані із симет–ричністю відносно початку координат функції $F=cx^{\nu+1}$, яка описує відновлюючу силу. Більш за-гальне представлення цієї сили у вигляді $F=c|x|^p x$ завжди із необхідним степенем точності вдається апроксимувати наведеною вище залежністю, тому всі результати, отримані нижче, можна перенести і на системи з такою відновлюючою силою.

Функція $\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right)$ може описувати також і нелінійні сили опору, максимальне значення яких є малою величиною у порівняння із максимальним зна–ченням відновлюючої сили $F(x)=cx^{\nu+1}$, тобто $F(x)>>\max\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right)$. Остання нерівність дозво-ляє використання загальних ідей методів збурень для побудови розв'яку нелінійного рівняння (1). Від-повідно до методів збурень, перш за все, необхідно описати динамічний процес незбуреної ($\varepsilon=0$) або породжуючої системи, яка відповідає (1). Її аналогом є нелінійне рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=0\,. \qquad (2)$$

Як показано в [5], розв'язок рівняння (2) виражається за допомогою періодичних Ateb-функцій у вигляді $x=aca(\nu+1,1,\omega(a)t+\psi)$, де a - амплітуда, $\omega(a)t+\psi$ – фаза коливань незбуреного руху, $\omega(a)$ – "частота" коливань, яка дорівнює $\omega(a)=\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m}}a^{\frac{\nu}{2}}$. На рис. 1 представлено залеж-ність частоти $\omega(a)$ від параметрів, які визначають динамічний процес незбуреного руху, а на рис. 2 – відношення періодів власних нелінійних до лінійних $\nu=0$ коливань від амплітуди та параметру ν, тобто

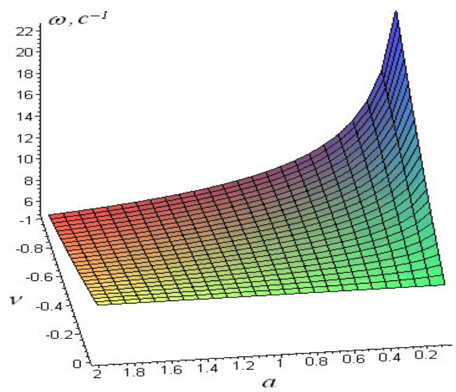

Рис. 1. Залежність частоти власних коливань від амплітуди та параметру нелінійності ν

$$\eta = \frac{\Pi(1,\nu+1)}{\omega(a)} / \pi\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)}\sqrt{\frac{\nu+2}{2}}a^{\frac{\nu}{2}}$$

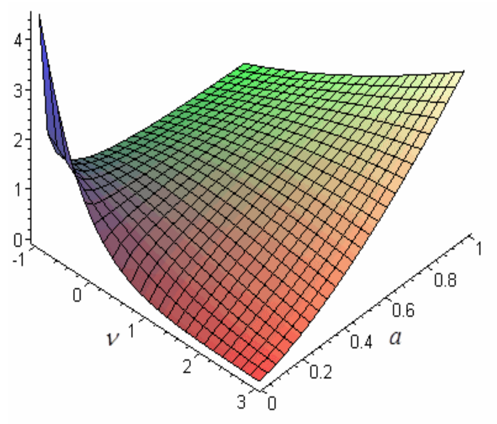

Рис. 2. Відношення періоду коливань сильно нелінійної моделі до періоду коливань лінійної моделі

Резонансні явища у сильно нелінійних системах дискретної структури. Зупинимось тепер на умовах резонансу у сильно нелінійних систем, взявши за модель рівняння (2). Власна частота коливань системи визначається не тільки фізико-механічними її характеристиками (параметрами m, c, ν), але й амплітудою a. Періодичний процес незбуреного руху описується періодичними Ateb-функціями. Період 2Π останніх за аргументом $\psi = \omega(a)t$ залежить від параметру нелінійності ν, причому

$$\Pi = \Pi(1,\nu+1) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right).$$

Умова резонансу трансформується до вигляду $\frac{\pi}{\mu} = \frac{\Pi(1,\nu+1)}{\omega(a)}$. Під значенням параметру μ розуміємо частоту зовнішнього періодичного збурення.

Таким чином, явище резонансу у розглядуваних системах має місце при виконанні такої умови $\mu = \frac{\pi}{\Pi(1,\nu+1)}\omega(a)$. Беручи до уваги вигляд функції, яка описує власну частоту, отримуємо значення пара–метру a^*, за якого має місце резонансне явище:

$$a^* = \left(\frac{\Pi(1,\nu+1)}{\pi}\frac{\mu}{k}\left(\frac{2}{\nu+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{\nu}},$$

де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Резонансне явище у досліджуваного класу динамічних системах буде мати місце за умови, коли амплітуда коливань є близькою до a^*. Якщо остання є більшою за a^*, то наявні в реальних системах сили опору призводять до того, що з часом амплітуда коливань буде зменшуватись до величини a^*, а в подальшому наступає явище резонансу. На рис. 3 представлена залежність резонансної амплітуди від параметрів, які характеризують фізико-механічні властивості системи та частоту вимушуючого збу–рення.

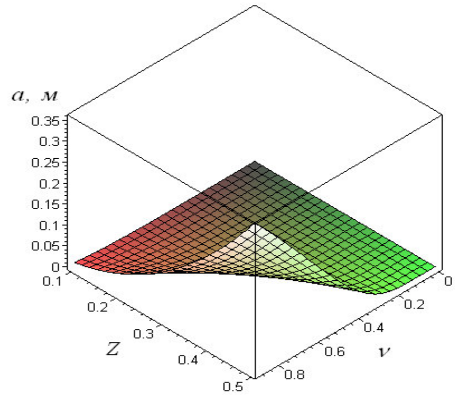

Рис. 3. Залежність амплітуди резонансу від параметрів ν та $z = \mu / k$ для випадку $\mu > 0$

Висновки. Із поданих та інших отриманих графічних залежностей випливає, що для «м'яких» систем ($-1 < \nu < 0$): резонансне явище можливе у випадку, коли частота власних коливань лінійного аналогу системи є меншою за частоту вимушуючої сили; із наближенням параметру ν до -1 амплітуда резонансу a^* стрімко зростає. Що стосується «жорстких» систем ($\nu > 0$), то: резонансне явище можливе у випадку, коли частота лінійного аналогу системи є більшою за частоту вимушуючої сили; для більших значень параметру нелінійності системи та частоти вимушуючої сили амплітуда резонансу є більшою. Одночасно отримані результати дозволяють стверджувати: якщо у консервативній системі відбуваються коливання з амплітудою, меншою за a^*, то обмеженої величини періодичні сили довільної частоти не зможуть викликати у ній резонансних коливань.

[1]. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний: / В. Л. Бидерман.– М.: Высшая школа, 1980.– 408 с.

[2]. Кузмак Г. Е. Асимптотические решения нелиней–ных дифференциальных уравнений второго порядка с пе–ременными коефициентами / Г. Е. Кузмак // ПММ. – 1959.– 23. – № 3. – С. 515–526.

[3]. Савин Г. Н. Динамика нити переменной длины / Г. Н. Савин, О. А. Горошко. – К.: Изд-во Академии наук Укра–инской ССР, 1962. – 319 с.

[4]. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перес–тюк. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1980. – 80 с.

[5]. Сеник П. М. Асимптотический метод и периоди–ческие Ateb – функции в теории существенно нелинейных колебаний/П. М. Сеник, И. П. Смерека, Б. И. Сокил // Асим–птотические и качественные методы в теории дифференци–альных уравнений: сборн. научн. трудов. – Киев: Изд-во Ин-та математ.,1977.– С.143–156.