Обчислення періодичних розв'язків автономних систем

Д.т.н., проф., Білий Л.

Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи НБУ

Abstract. The possibility of analysis of autonomous systems in which time isn't in the right part of the equation, based on the sensitivity model to initial conditions. To determine the stationary solutions of nonlinear systems using an iterative Newton method.

Key words: autonomous system, stationary solutions, sensitivity model, matrix Jacobi.

Вступ

Використовуючи математику для опису фізичних явищ, ми вимушені задовольнятися лише деякими наближеннями до дійсності – моделюванням. Тут ми обмежимось розглядом таких фізичних процесів, які можуть бути адекватно описані за допомогою скінченного числа взаємопов'язаних алгебраїчних або звичайних диференціальних рівнянь. Очевидно, що до цієї категорії об'єктів відносяться електричні схеми з зосередженими параметрами та механічні системи. У цьому випадку для опису поведінки системи в любий момент часу природно використовувати єдину математичну характеристику – змінну стану. Використання загальної теорії диференціальних рівнянь пояснюється, по-перше, наявністю добре розвинутого математичного апарату і чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь; по-друге, наявністю загальнодоступних якісних методів дослідження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, зокрема методів оцінки стійкості, аналізу поведінки розв'язків в околицях особливих точок та їх асимптотичної поведінки і, по-третє, прозорістю і природністю звичайних диференціальних рівнянь як математичної моделі для опису процесів переходу реальних об'єктів з одного стану в інший під дією зовнішніх і внутрішніх причин.

За останні 50 років розроблено цілий ряд методів розв'язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь і на цей час відповідні програми є частиною математичного забезпечення комп'ютерів. Проте лише процес установлення дає змогу проводити аналіз у неперервному часі, тобто знаходити розв'язки, адекватні фізичному змісту [1]. Методи визначення періодичних розв'язків у дискретному часі (сітковий, тригонометричної колокації, гармонічного балансу та інші) не мають критеріїв точності, громіздкі і не придатні для аналізу складних фізичних систем.

Найбільш ефективним підходом, який використовують для обчислення періодичних розв'язків, є перехід від крайової задачі до задачі Коші, або модель чутливості до початкових умов [2, 3]. Але для постановки крайової задачі необхідно знати період повторюваності процесу, що є проблематично у випадку автономних систем.

Автономною називаємо систему, що описується диференціальними рівняннями, права частина яких позбавлена незалежної змінної t:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X). \tag{1}$$

Такими рівняннями описуються фізичні системи, які самі по собі можуть знаходитися в коливному стані без зовнішньої вхідної дії, що є функцією часу. Відомі алгоритми знаходження розв'язку є непридатні, оскільки період T тут належить до невідомих і визначається винятково параметрами самої системи, її коефіцієнтами. Проте цю перешкоду можна подолати.

Запишемо колонку невідомих системи (1) у вигляді:

$$X = \left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n\right)_t . \tag{2}$$

Оскільки період T тепер також належить до числа невідомих, то всього маємо $n+1$ невідомі змінні системи рівнянь n-го порядку. Щоб отримати однозначний розв'язок, треба одну з невідомих зафіксувати (це не може бути T, так як періодичний розв'язок існує лише при заздалегідь невідомих значеннях T). Проте для того, щоб такий підхід був успішним, це фіксоване значення невідомої повинно відповідати існуючому періодичному розв'язку. Цілком зрозуміло, що вибір значення вказаної змінної пов'язаний з ризиком: при невдачі ми не знаємо, чи вона є наслідком розходження ітераційного процесу, або ж результатом невдалого вибору цієї змінної. Можна спробувати побудувати ще одне незалежне рівняння, яке пов'язувало б усі змінні.

Автономна система рівнянь допускає безмежну кількість періодичних розв'язків, які відрізняються один від одного зсувом у часі, оскільки така система не містить аргументу t. Отже, можна довільно задати один із n початкових станів, скажімо i-тий елемент вектора (2):

$$x_i = a \tag{3}$$

і визначити решту початкових значень, які відповідають даному часові $t = t_0$, коли насправді задовольняється умова (3). Це еквівалентно вибору нового початкового часу для періодичного розв'язку. Зрозуміло, що a повинне приймати реально можливе значення i-го елемента на періоді T. Якщо наперед відомо, що в розв'язку відсутня постійна складова, то доцільно прийняти $a = 0$, якщо ж вона присутня, то a необхідно якомога наблизити до її значення. Тоді вектор початкових умов набуде вигляду:

$$X_a(0) = (x_1(0), ..., x_{i-1}(0), ..., x_n(0))_t . \tag{4}$$

Тепер число невідомих дорівнює n, і можна утворити новий вектор:

$$X\;\;(0) = (x_1(0), ..., x_{i-1}(0), T, x_{i+1}(0), ..., x_n(0))_t . \tag{5}$$

Запишемо цільову функцію $F(X(0))$ для аргументу (5):

$$F(X(0)) = X_a(0) - X(X_a(0), T) = 0 . \tag{6}$$

Рівняння (6) є система n нелінійних трансцендентних рівнянь з n невідомими (5) і може бути розв'язана за допомогою ітераційної формули Ньютона [1]. Матрицю Якобі одержимо диференціюванням (6) по $X(0)$:

$$F'(X(0)) = E^* - \frac{\partial X(X_a(0),T)}{\partial X(0)}, \tag{7}$$

де E^* - діагональна матриця з одиницями на діагоналі, за винятком і-го елемента, котрий дорівнює нулю, а від'ємником правої частини є матриця чутливості до початкових умов, стовпчик i-го елемента якої дорівнює:

$$\frac{\partial X(X_a(0),T)}{\partial T} = \frac{\partial X(X_a(0),t)}{\partial t}. \tag{8}$$

Права частина (8) є значення похідної dX/dt при $t = T$, яка тотожна правим частинам рівнянь (1) у той же час.

Визначення елементів матриці чутливості до початкових умов є складною задачею аналізу. Ці елементи можна обчислити за допомогою різницевих формул, коли ми розв'язуємо задачу Коші, тобто обчислюємо $F(X(0))$ для однієї ітерації в цілому $n+1$ разів, або за допомогою відповідних варіаційних змінних і системи диференціальних рівнянь у варіаціях. Покажемо, як це можна зробити в останньому випадку.

Так як більшість пристроїв різних галузей промисловості основані на використанні фізичної природи електромагнетизму, то логічно розкрити спосіб обчислення матриці чутливості до початкових умов саме для таких пристроїв.

Функціональний зв'язок між електричними і магнітними компонентами представимо функцією:

$$i = i(\psi), \tag{9}$$

де і- електрична, а ψ - магнітна компоненти.

Для загальності викладу абстрагуємося від фізичних величин і подамо функціональну залежність (9) у вигляді:

$$X = X(Y). \tag{10}$$

Продиференціюємо вираз (10) по початкових умовах $X(0)$:

$$\frac{\partial X}{\partial X(0)} = \frac{\partial X}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X(0)}. \tag{11}$$

Ліва частина формули (11) є матриця чутливості до початкових, яку у відповідності з правою частиною цієї формули можна представити добутком, перший із співмножників якого є матриця параметрів пристрою, а другий – матриця чутливості до початкових умов магнітної складової системи, яка описується диференціальними рівняннями:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = f_1(Y). \tag{12}$$

Порівнювати системи диференціальних рівнянь (1) і (12) можна після диференціювання по часу t виразу (10):

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial Y} \cdot \frac{dY}{dt}. \tag{13}$$

Очевидно, що система диференціальних рівнянь (12) є значно простіша порівняно з (1).

Диференціюючи рівняння (12) по $X(0)$, отримуємо однорідну систему варіаційних рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Y}{\partial X(0)} = \frac{\partial f_1}{\partial Y}\frac{dY}{dX(0)}, \tag{14}$$

аналітичний розв`язок якої легко знайти.

Алгоритм розрахунку періодичних розв`язків автономних систем аналогічний алгоритму неавтономних систем. Відмінність полягає лише в тому, що в матриці чутливості до початкових умов i-й стовпчик замінюється вектором правих частин рівняння (1) при $t = T$, а процес інтегрування системи рівнянь (1) на k-ій ітерації формули Ньютона здійснюється з власним періодом T^K.

Алгоритм розрахунку:

1. Маючи на k-й ітерації поточні значення вектора $X(0)^k$ (на першому кроці початкові наближення $X(0)^k$), інтегруємо систему (1) на інтервалі часу $[0,T^K]$. Запам'ятовуємо вектори $X^k_{\max}, X^k_{\min}, X(T)^k$.

2. В матриці чутливості до початкових умов i-й стовпчик замінюється вектором правих частин рівняння (1) при $t=T$, а процес інтегрування системи рівнянь (1) на k-ій ітерації формули Ньютона здійснюється з власним періодом T^K.

3. Використовуємо ітераційну формулу Ньютона і знаходимо уточнене значення $X(0)^{k+1}$.

4. Процес розрахунку повторюємо з п. 1, поки не задовольниться задана точність розрахунку.

Висновок

1. Найбільш ефективний спосіб знаходження періодичних розв'язків автономних систем полягає у зведенні крайової задачі для звичайної системи диференціальних рівнянь до задачі Коші.

2. Матриця чутливості до початкових умов автономних систем аналогічна цій матриці неавтономних систем, крім i-го стовпчика, який замінюється вектором початкових умов вихідної системи рівнянь при $t = T$, а процес інтегрування цієї системи на k-ій ітерації формули Ньютона здійснюється за власним періодом T^K.

3. Алгоритми пошуку періодичних розв'язків автономних і неавтономних систем є спільні.

[1] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Редактор Дж. Холл и Дж.Уатт. Изд. Мир, М. 1979, 312 с.

[2] Эйприлл Т., Трик Т. Анализ стационарного режима нелинейных целей с периодическими входными сигналами.- В кн.: Автоматизация в проектировании.-М.: Мир, 1972,- С. 148-156.

[3] Білий Л.А. Моделювання і дослідження нелінійних систем на основі загальної теорії диференціальних рівнянь/ Л. А. Білий/ Технічні вісті, 2010/1(31), 2(31).-С.83-85.