19-th International Modeling School of AMSE-UAPL

Ukraine, Lviv, 30–31 October 2014

Похідні матриць параметрів за арґументом

Чабан В., д. т. н., проф., Чабан О., к.т.н., доц.

Національний університет "Львівська політехніка"

Abstract. In the paper is proposed the method of differentiation over argument of direct and inverse matrixes of static and differential parameters through derivative of static parameters as the simplest. The result may be used in the theory of parametric sensitivities of higher degrees. .

Key words: derivatives of matrixes over argument, static and differential parameters.

У задачах аналізу будь-якої фізичної системи, часто виникає потреба диференціювати як прямі, так і обернені матриці статичних або диференціальних параметрів за арґументом. У більшості випадків нам пощастило обійти таке диференціювання за рахунок побудови так званих допоміжних варіаційних рівнянь [1]. Але є задачі, де такої потреби не уникнути, наприклад, при побудові варіаційних рівнянь вищого порядку в теорії параметричної чутливості та ин. Як спростити цю складну задачу буде показано нижче.

Розглянемо векторну функцію y з арґументом x

$$y = y(x) \tag{1}$$

Можливі зв'язки між обома векторами

$$\begin{aligned} y = S(x)x;\quad x = S(x)^{-1}y;\\ dy = D(x)dx;\quad dx = D(x)^{-1}dy, \end{aligned} \tag{2}$$

де $S(x), D(x)$ – матриці статичних і диференціальних параметрів, відповідно.

У загальному випадку ці матриці достатньо складні для диференціювання, особливо обернені з них. Єдину практичну можливість нам може надати матриця статичних параметрів як найпростіша з них. Тож будемо вважати, що ми нею успішно скористалися, і похідну $dS(x)/dx$ зачислимо до відомих. У такому разі постає питання як виразити решту похідних через одержану похідну. Щодо похідної оберненої матриці $dS(x)^{-1}/dx$, то її знайдемо за формулою [2]

$$\frac{dS(x)^{-1}}{dx} = -S(x)^{-1}\frac{dS(x)}{dx}S(x)^{-1}. \tag{3}$$

Щоб продиференціювати матриці диференціальних параметрів, виразимо пряму з них через матрицю статичних параметрів за формулою[1]

$$D(x) = \frac{dS(x)}{dx}x + S(x). \tag{4}$$

Продиференціювавши (4) за x, одержимо потрібну нам похідну матриці диференційних параметрів

$$\frac{dD(x)}{dx} = \frac{d^2S(x)}{dx^2}x + 2\frac{dS(x)}{dx}, \tag{5}$$

що й треба було показати.

Для того щоб знайти відповідну похідну оберненої матриці диференціальних параметрів, скористаємося все тим же виразом (3) з заміною S на D. Тоді згідно з (5), одержимо остаточний результат

$$\frac{dD(x)^{-1}}{dx} = -D(x)^{-1}\left(\frac{d^2S(x)}{dx^2}x + 2\frac{dS(x)}{dx}\right)D(x)^{-1}. \tag{6}$$

Таким чином за відомою найпростішою похідною $dS(x)/dx$ за виразами (3), (5), (6) можемо на підставі формальних матричних операцій знайти решту три похідні непорівняльно складніші.

Те, що формули (3), (5), (6) дають у руки реальний математичний шанс, можемо проілюструвати на достатньо складному багатополюсному елементі яким є насичена асинхронна машина. Матриця статичних індуктивностей її приведених рівнянь стану в області лінійних координатних перетворень має порівняно простий вигляд [1]

$$S(i) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l_S + l & & l & \\ \hline & l_S + l & & l \\ \hline l & & l_R + l & \\ \hline & l & & l_R + l \\ \hline \end{array}, \tag{7}$$

де l_S, l_R – сталі індуктивності дисипації; $l = l(i)$ – основна індуктивність, яку знаходимо за кривою маґнетопровода $\psi_m(i_m)$:

$$\begin{aligned} l(i) = \psi_m(i_m)/i_m;\ i = (i_{SA}, i_{SB}, i_{RA}, i_{RB})_t;\\ i_m = 2\sqrt{\left(i_A^2 + i_A i_B + i_B^2\right)/3};\ i_A = i_{SA} + i_{RA};\ i_B = i_{SB} + i_{RB}, \end{aligned} \tag{8}$$

i – колонка двох фазних статорних і роторних струмів.

Щодо решти матриць $S(x)^{-1}, D(x), D(x)^{-1}$, то вони набагато складніші, так що про їх безпосереднє диференціювання не може навіть іти мова.

[1]. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Т. Сороки, 2010, 508 с.

[2]. Чабан В. Про похідну оберненої матриці. – Метода математики. – 2009. – № 8. – С. 7.