

Усунення членів, що взаємно знищуються, у визначниках правила Крамера

К.т.н., доц. Ю. Мочернюк

Львівський національний аграрний університет

Abstract. In the article is shown how to avoid of mistakes by using Cramer's rule, caused by the presence of members of determinants which are equal in magnitude and opposite in sign to that mutually destroyed.

Key words: Cramer's rule, determinant

Аналізу електромагнітних процесів в електричних колах неодмінно пов'язаний з розв'язанням системи рівнянь, яка описує електромагнітні процеси в цьому електричному колі. Використовуючи правило Крамера для визначення невідомих стикаємось з проблемою появи членів визначника (головного системи та допоміжних) рівних за величиною і протилежних за знаком, що взаємно знищуються. Відсутність таких членів забезпечує тільки топологічний метод аналізу електромагнітних процесів в лінійних електричних колах укладених із двополосних елементів.

Наявність членів визначника, що взаємно знищуються, призводить до помилок при закругленні чисел (електроннообчислювальна машина має обмежену кількість двійкових розрядів) особливо коли значення визначника (допоміжного визначника) співмірне з помилкою.

Члени визначника рівні за величиною і протилежні за знаком, що взаємно знищуються, можна усунути використовуючи теорему Біне-Коші про визначник добутку $A \cdot B$ двох прямокутних матриць розміром $(m \times n)$ і $(n \times m)$, яку можна представити так:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\epsilon} MA_{\epsilon} \cdot MB_{\epsilon}, \quad (1)$$

де сума означає, що додаємо добутки всіх можливих мінорів m -го порядку матриці A MA_{ϵ} , утворені m її стовпцями, що входять в ϵ -ту вибірку із n її стовпців, на мінори матриці B MB_{ϵ} , утворені її рядками з тими ж номерами, що входять в ϵ -ту вибірку із n рядків. Кількість таких вибірок складає C_m^n .

В методі вузлових напруг [1], коли всі елементи електричного кола описано полярними системами незалежних величин (струмів та напруг), рівняння елементів записуються в u -параметрах:

$$I = I_0 + Y \cdot U, \quad (2)$$

а кінцева система рівнянь за методом вузлових напруг записується так:

$$W \cdot Y \cdot W_t \cdot V_{\epsilon} = -W \cdot I_0 \quad (3)$$

$$I = I_0 + Y \cdot W_t \cdot V_{\epsilon} \quad (4)$$

де W – прямокутна матриця вузлів електричного кола, Y – квадратна об'єднана квазидіагональна матриця

провідностей елементів електричного кола, I_0 – об'єднана матриця стовпець струмів короткого замикання елементів електричного кола, V_{ϵ} – матриця стовпець вузлових напруг електричного кола, I – об'єднана матриця стовпець струмів полюсів елементів електричного кола, U – об'єднана матриця стовпець напруг сторін елементів електричного кола.

Рівняння (3), яке необхідно розв'язати відносно вузлових напруг електричного кола, перепишемо так:

$$W \cdot Y \cdot W_t \cdot V_{\epsilon} = I_{\epsilon}, \quad (5)$$

$$\text{де } I_{\epsilon} = -W \cdot I_0. \quad (6)$$

Для подальшої ілюстрації запропонованого запишемо окремо матриці, що входять в рівняння (3), для схеми електричного кола показаного на рис. 1.

Рівняння елементів електричного кола:

$$i_1 = y_{11} \cdot u_1 + y_{12} \cdot u_2 + y_{13} \cdot u_3 + i_{10};$$

$$i_2 = y_{21} \cdot u_1 + y_{22} \cdot u_2 + y_{23} \cdot u_3 + i_{20};$$

$$i_3 = y_{31} \cdot u_1 + y_{32} \cdot u_2 + y_{33} \cdot u_3 + i_{30};$$

$$i_4 = y_{44} \cdot u_4 + y_{45} \cdot u_5 + i_{40};$$

$$i_5 = y_{54} \cdot u_4 + y_{55} \cdot u_5 + i_{50};$$

$$i_6 = y_{66} \cdot u_6 + i_{60};$$

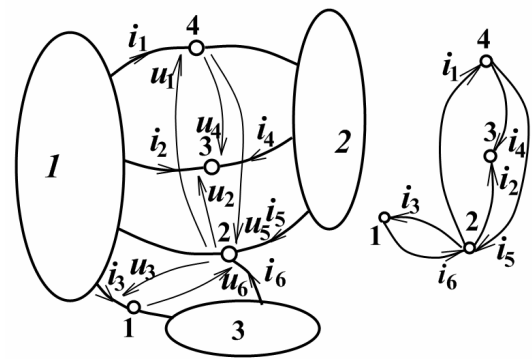


Рис. 1. Принципова схема електричного кола та схема струмів його.

Прямокутна матриця вузлів електричного кола, рядки якої підпорядковані незалежним вузлам електричного кола, а стовпці струмам незалежних полюсів елементів електричного кола (четвертий вузол електричного кола прийнято за залежний):

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Квадратна об'єднана квазидіагональна матриця провідностей елементів електричного кола, рядки якої підпорядковані струмам незалежних полюсів

елементів електричного кола, а стовбці незалежним напругам сторін елементів електричного кола:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & Y_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{54} & Y_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{66} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Добуток матриць рівняння (5) представимо матрицею (9).

$$W \cdot Y \cdot W_t = \begin{pmatrix} Y_{33} + Y_{66} & -Y_{31} - Y_{32} - Y_{33} - Y_{66} & Y_{32} \\ -Y_{13} - Y_{23} - Y_{33} - Y_{66} & Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} + Y_{12} + \\ & + Y_{22} + Y_{32} + Y_{13} + Y_{23} + & -Y_{12} - Y_{22} - Y_{32} + Y_{54} \\ & + Y_{33} + Y_{55} + Y_{66} & \\ Y_{23} & -Y_{21} - Y_{22} - Y_{23} + Y_{45} & Y_{22} + Y_{44} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Розкриття визначника матриці (9) призведе до появи членів рівних за величиною і протилежних за знаком, які взаємно знищуються.

Матрицю (9) помножимо на одиничну матрицю справа:

Для обчислення визначника матриці (9) скористаємось методикою запропонованою в [2].

$$\begin{pmatrix} Y_{33} + Y_{66} & -Y_{31} - Y_{32} - Y_{33} - Y_{66} & Y_{32} \\ -Y_{13} - Y_{23} - Y_{33} - Y_{66} & Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} + Y_{12} + \\ & + Y_{22} + Y_{32} + Y_{13} + Y_{23} + & -Y_{12} - Y_{22} - Y_{32} + Y_{54} \\ & + Y_{33} + Y_{55} + Y_{66} & \\ Y_{23} & -Y_{21} - Y_{22} - Y_{23} + Y_{45} & Y_{22} + Y_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Стовпець матриці, що знаходиться зліва, в (10) вміщає множину різних u -параметрів. Замість такого стовпця створимо множину стовпців, в кожному з яких буде знаходитись тільки один u -параметр, який розмістимо над стовпцем (отже стовпець підпорядковується однозначно певному u -параметру), а в самому стовпці залишаться в комірках 1, -1, або 1, або -1

де був розташований відповідний u -параметр та нулі в решта комірках цього стовпця (див. (11)).

Щоб не змінився добуток матриць (10) в матриці в (10), розташованій справа, відповідні рядки до стовпців лівої матриці повторимо ідентичними рядками відповідну кількість разів (див.(11)).

$$\begin{pmatrix} Y_{33} & Y_{66} & Y_{13} & Y_{23} & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{66} & Y_{11} & Y_{21} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{13} & Y_{23} & Y_{55} & Y_{45} & Y_{32} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{54} & Y_{44} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

В лівій матриці в (11) є однакові y -параметри рівні за величиною але протилежні за знаком. Наприклад, y_{33} в першому стовпці і $-y_{33}$ в сьомому стовпці. Залишимо y_{33} в першому стовпці і вилучимо його із сьомого стовпця, а в правій матриці в (11) змінимо знак на протилежний елемента (при 1 запишемо $-$) сьомого рядка і додамо його до першого рядка цієї матриці. Так поступимо з решта подібними y -пара-

метрами. Як що подібні y -параметрами мають однакові знаки то в правій матриці знак елемента не змінюємо. Так перетворений добуток матриць (11) подано в (12):

$$d = \begin{pmatrix} y_{33} & y_{66} & y_{13} & y_{23} & y_{31} & y_{32} & y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{22} & y_{55} & y_{45} & y_{54} & y_{44} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Вимноживши матриці в (12), одержимо матрицю (9).

Застосуємо теорему Біне-Коші (1) до (12), одержимо визначник $\det d$ матриці (9), в якому відсутні члени, що взаємно знищуються.

Кількість мінорів які потрібно буде обчислювати можна значно зменшити певним чином організував-

ши вибір комбінацій стовпців і рядків в матрицях (12).

Визначник для обчислення першої невідомої в системі рівнянь (5) одержимо, як цього вимагає правило Крамера, замінивши перший стовпець в (9) вільними членами рівняння (5):

$$\begin{pmatrix} i_{e1} & -y_{31} - y_{32} - y_{33} - y_{66} & y_{32} \\ & y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{12} + \\ i_{e2} & + y_{22} + y_{32} + y_{13} + y_{23} + & -y_{12} - y_{22} - y_{32} + y_{54} \\ & + y_{33} + y_{55} + y_{66} \\ i_{e3} & -y_{21} - y_{22} - y_{23} + y_{45} & y_{22} + y_{44} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В визначнику матриці (13) присутні члени рівні за величиною і протилежні за знаком, які взаємно знищуються.

Помножимо (13) на одиничну матрицю справа :

$$\begin{pmatrix} i_{e1} & -y_{31} - y_{32} - y_{33} - y_{66} & y_{32} \\ & y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{12} + \\ i_{e2} & + y_{22} + y_{32} + y_{13} + y_{23} + & -y_{12} - y_{22} - y_{32} + y_{54} \\ & + y_{33} + y_{55} + y_{66} \\ i_{e3} & -y_{21} - y_{22} - y_{23} + y_{45} & y_{22} + y_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Виконаємо над добутком матриць (14) аналогічні операції як над добутком матриць (10), одержимо:

$$\begin{matrix}
\begin{matrix}
i_{e1} & i_{e2} & i_{e3} & y_{22} & y_{11} & y_{33} & y_{55} & y_{66} & y_{21} & y_{31} & y_{12} & y_{32} & y_{13} & y_{23} & y_{45} & y_{32} & y_{12} & y_{22} & y_{54} & y_{44} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{matrix} \\
\cdot \\
\begin{matrix}
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1
\end{matrix}
\end{matrix} \quad (15)$$

Над добутком матриць (15) виконаємо аналогічні операції як над добутком матриць (11), одержимо:

$$\begin{matrix}
d1 = \begin{matrix}
i_{e1} & i_{e2} & i_{e3} & o_{22} & o_{11} & o_{33} & o_{55} & o_{66} & o_{21} & o_{31} & o_{12} & o_{32} & o_{13} & o_{23} & o_{45} & o_{54} & o_{44} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1
\end{matrix} \\
\cdot \\
\begin{matrix}
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1
\end{matrix}
\end{matrix} \quad (16)$$

Вимноживши матриці в (16), одержимо (13).

Застосувавши теорему Біне-Коші до добутку матриць (16), одержимо допоміжний детермінант $\det d1$ матриці (13), у якому відсутні члени, що взаємно знищуються, для визначення першої невідомої v_{k1} системи рівнянь (5). Ця невідома рівна частці детермінанту $\det d1$ обчисленого за добутком матриць (16) на детермінант $\det d$ обчислений за добутком матриць (12):

$$v_{e1} = \frac{\det d1}{\det d} \quad (17)$$

Для визначення решти невідомих в рівнянні (5) необхідно аналогічно обчислити допоміжні детермінанти для кожної невідомої.

На завершення варто вказати, що розкриття визначників супроводиться появою членів, що взаємно знищуються, не тільки в методі вузлових напруг.

Така методика вигідна при обчисленні визначників у символічному вигляді, бо працюємо з мінорами матриць, елементами яких є 1,-1,0, тай значення мінорів приймають значення 1,-1,0, а значення члена визначника рівне добутку у-параметрів стовпців, які увійшли до відмінного від нуля мінора, з знаком рівного добутку знаків мінорів лівої і правої матриць.

[1]. Б. І. Блажкевич Основи теорії лінійних електричних кіл (кола з зосередженими параметрами). Київ "Наукова думка" 1964. ст. 441.

[2]. Мочернюк Ю. П. Усунення членів визначника, що взаємно знищуються. Технічні вісті (Technical news) Львів 2013/1(37), 2(38) – с. 33-36.