

МОДЕЛЬ ОХРАНЯЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ КОНКУРЕНЦИИ
НА БИЛОКАЛЬНОМ АРЕАЛЕ

М. Д. Васильев, Ю. И. Трофимцев

THE MODEL OF PROTECTED POPULATION WITH COMPETITION AT A BILOCAL AREAL

M. D. Vasilyev, Yu. I. Trofimtsev

В работе с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы вопросы развития охраняемых популяций, обитающих на билोकальном ареале. В охраняемой и неохраняемой частях существует конкуренция между членами популяции, а также обмен между этими частями ареала. Для описания эволюционных процессов в пространстве популяций использована система из двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно плотностей популяции в охраняемых и неохраняемых зонах. Проведено качественное исследование поведения фазовых траекторий этой системы в малой окрестности особых точек, как состояний равновесия рассматриваемой системы, выявлены бифуркационные параметры. Отдельно рассмотрен случай непрерывно пополняемой популяции. Содержательная интерпретация полученных результатов позволяет формировать эффективные меры стабильного и устойчивого существования популяций в охраняемых и неохраняемых зонах.

The authors use the apparatus of ordinary differential equations to study the issue of population dynamics of the protected species inhabiting a bilocal areal where there is a competition between the protected and unprotected parts of the population. In the protected and unprotected parts there is a competition between the members of the population, as well as the exchange between them. For the simulation of the evolutionary processes in the areal of protected populations, the authors used a system of two differential equations of the first order with respect to the population density in the protected and unprotected areas. The paper presents a qualitative study of the behaviour of the phase trajectories of the system of equations in a small neighbourhood around the singular points as equilibrium states of the system; the bifurcation parameters are identified. A case of continuously renewed population was analyzed in detail. The obtained results allows to create effective measures for the stable and sustainable existence of populations in protected and unprotected areas.

Ключевые слова: математическая модель, охраняемая популяция, конкуренция, билोकальный ареал, особые точки.

Keywords: mathematical model, protected population, competition, bilocal area, singular points.

Одним из методов сохранения природной среды является создание охраняемых территорий, на которых запрещена любая хозяйственная деятельность, в том числе и промысел различных животных и птиц. При этом ареал обитания популяции может быть разбит на две части – охраняемую и неохраняемую. А. Д. Базыкин [2] рассматривал на билोकальном ареале модель взаимодействия хищника и жертвы. Его результаты использовались в работе [8, с. 59], в которой предложено использовать убежища для жертвы, преследуемой хищником. Модели охраняемых популяций исследованы в работах [5; 11; 13 – 15; 17; 18]. В [2; 8; 14] в качестве моделей эволюционных процессов применялись системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Эколого-экономические модели оптимизации промысла на неохраняемой части ареала обитания популяции изучались в работах [3 – 4; 7; 16; 19].

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений, описывающих развитие популяции при наличии охраняемой территории:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = gx + d_1(y - x) - kx^2 - f(x), \\ \frac{dy}{dt} = ay + d_2(x - y) - cy^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ – плотности популяции вне охраняемой территории и внутри ее; $f(x)$ – функция, описывающая добычу популяции на неохраняемой территории; a и g – коэффициенты прироста популяции вне охраняемой территории и внутри ее; c , k – коэффициенты конкуренции внутри популяции на охраняемой территории и вне ее; d_1 и d_2 – коэффициенты обмена особями между охраняемой территорией и остальной частью ареала популяции. Коэффициенты a , g – любые действительные числа, все остальные коэффициенты неотрицательны.

Функция добычи рассматривается в виде

$$f(x) = hx + b,$$

где слагаемое $hx(t)$ интерпретируется как величина плановой добычи популяции, а слагаемое b – как величина браконьерской добычи. Как показано в [1], выбранный вид плановой добычи не приводит к возникновению бифуркаций в системе уравнений (1). Данное представление функции добычи использовалось в эколого-экономических моделях работ [3; 7].

Целью данной работы является выявление степени влияния эндогенных и экзогенных параметров популяции (прироста, уровня конкуренции, миграции, добычи и др.) на динамику ее плотности и оценка влияния конкуренции на обеих частях популяции.

Для выявления особенностей эволюционных процессов, описываемых системой (1), мы будем использовать понятие устойчивости по первому приближению в системе (1) (см. [17; 19]).

Перейдем к качественному анализу решений системы (1).

Достаточно просто показывается, что в системе (1) нет особых точек типа фокус и центр, поскольку дискриминант характеристического уравнения линеаризованной системы для (1) в любой особой точке (x_0, y_0) можно привести к знакоположительной квадратичной форме:

$$(g - d_1 - h - 2kx_0 - (a - d_2 - 2cy_0))^2 + 4d_1d_2.$$

В зависимости от значений параметров c и b в системе (1) выделим четыре случая:

случай 1: $c = 0, b = 0$;

случай 2: $c = 0, b \neq 0$;

случай 3: $c \neq 0, b = 0$;

случай 4: $c \neq 0, b \neq 0$.

Здесь мы считаем, что параметр k всегда принимает ненулевое значение. Случаи, когда $k = 0$, здесь не рассматриваются, поскольку они были изучены в работе [3].

Исследуем случаи 1 и 2, когда система дифференциальных уравнений описывает развитие популяции на ареале, разделенном на две части, в отсутствие внутривидовой конкуренции на охраняемой территории. В этих случаях система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = gx + d_1(y - x) - kx^2 - f(x), \\ \frac{dy}{dt} = ay + d_2(x - y). \end{cases} \quad (2)$$

Особые точки данной системы находятся как точки пересечения параболы и прямой (рис. 1, 2)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - d_1 - h)x + b], \\ y = -\frac{d_2x}{a - d_2}, \end{cases} \quad (3)$$

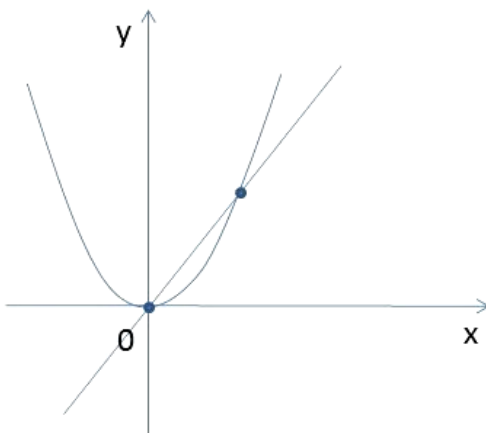


Рис. 1. Случай $a - d_2 < 0$

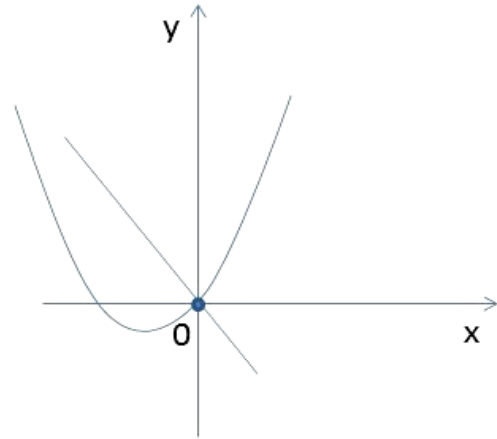


Рис. 2. Случай $a - d_2 > 0$

и определяются как решения уравнения относительно x :

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2] \pm}{2k(a - d_2)} \pm \frac{\sqrt{[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2]^2 - 4kb(a - d_2)^2}}{2k(a - d_2)}, \\ y_{1,2} &= -\frac{d_2x_{1,2}}{a - d_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае 1 имеем особые точки:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0;$$

$$x_2 = \frac{[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2]}{k(a - d_2)};$$

$$y_2 = -\frac{d_2[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2]}{k(a - d_2)^2}.$$

Поскольку по смыслу задачи особые точки должны находиться в первой четверти фазовой плоскости, то вторая особая точка существует при следующих ограничениях на коэффициенты системы:

$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2 < 0, \quad a - d_2 < 0$,
причем она совпадает с началом координат при $(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2 = 0$.

Типы особых точек системы определяются по виду корней характеристического уравнения линеаризованной системы (2). Тогда:

– одна особая точка $(0,0)$ существует при выполнении одного из набора условий:

$$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2 > 0,$$

$$a - d_2 < 0 \text{ (устойчивый узел);}$$

$$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2 < 0,$$

$$a - d_2 > 0 \text{ или } a - d_2 = 0 \text{ (седло);}$$

$$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1d_2 > 0,$$

$$a - d_2 > 0 \text{ (неустойчивый узел);}$$

$$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2 = 0 \text{ (седло-узел);}$$

– две особые точки существуют при следующих условиях:

$$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2 > 0,$$

$a - d_2 < 0$ (седло в точке $(0, 0)$ и устойчивый узел в точке (x_2, y_2)).

Характеристическое уравнение в точке (x_2, y_2) для системы (2) имеет вид:

$$\lambda^2 - (-g + d_1 + h) + \frac{2d_1 d_2}{a - d_2} + a - d_2 \lambda + (-g + d_1 + h)(a - d_2) - d_1 d_2 = 0.$$

Исследуя знаки корней уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(-g + d_1 + h) + a - d_2 + \frac{2d_1 d_2}{a - d_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left[(-g + d_1 + h) + a - d_2 + \frac{2d_1 d_2}{a - d_2}\right]^2 - 4[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2]}}{2},$$

определяем вид второй особой точки. Выражение

$$(-g + d_1 + h) + a - d_2 + \frac{2d_1 d_2}{a - d_2}$$

меньше нуля, поскольку приводится к дроби:

$$\frac{-[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2] + (a - d_2)^2 + d_1 d_2}{a - d_2},$$

$$(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2 < 0, a - d_2 < 0,$$

у которой, в силу условий числитель больше нуля, а знаменатель – меньше. Корень же из дискриминанта меньше рассмотренного выражения, поэтому оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны. Следовательно, вторая особая точка представляет собой устойчивый узел.

Характерные фазовые портреты расположения траекторий системы (2) в случае 1 приведены на рис. 3 – 7. На рисунках видно, что при наличии устойчивого узла в начале координат обе части популяции вымирают, в случаях седла, седла-узла и неустойчивого узла имеет место неограниченный рост плотностей субпопуляций, причем плотность охраняемой части популяции может вначале несколько уменьшаться. При существовании одновременно седла и устойчивого узла происходит стабилизация плотностей обеих субпопуляций за счет уменьшения плотности неохраняемой части популяции и роста плотности охраняемой части. Таким образом, во из-

бежание вымирания всей популяции при ведении плановой ее добычи необходимо добиться, чтобы коэффициент прироста плотности в охраняемой части популяции, даже с учетом обмена с неохраняемой территорией, был положительным. Стабилизация плотностей субпопуляций будет происходить на тем более высоком уровне, чем будет меньше плановая добыча неохраняемой части популяции.

Рассмотрим теперь случай 2, т. е. систему (2) при $b \neq 0$.

Это означает, что в охраняемой субпопуляции по-прежнему нет конкуренции за ресурсы и территорию, а в неохраняемой части популяции, кроме планового промысла, ведется и браконьерский. Особые точки системы являются точками пересечения параболы и прямой (3). Определим точки касания параболы и прямой, приравнивая производные от функций, задающих геометрические объекты:

$$\frac{2k}{d_1} x = \frac{(g - d_1 - h)}{d_1} - \frac{d_2}{a - d_2},$$

и получаем координату X точки касания:

$$x = \frac{[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2]}{2k(a - d_2)}.$$

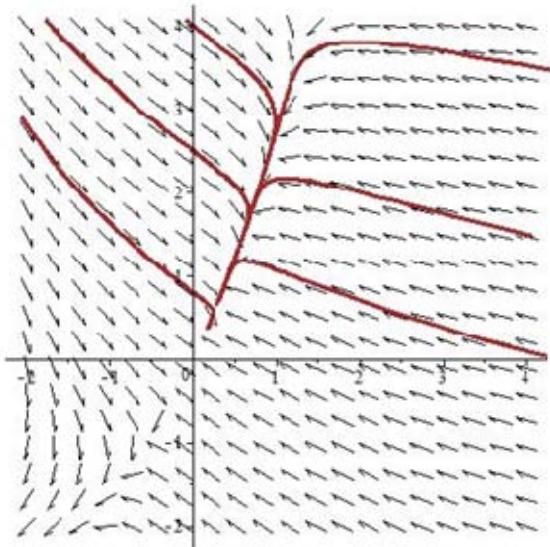


Рис. 3. $g = 1.2, a = 1.5, d1 = 2.1, d2 = 3.1, k = 1.8, h = 3.4, b = 0, O(0,0)$ – устойчивый узел

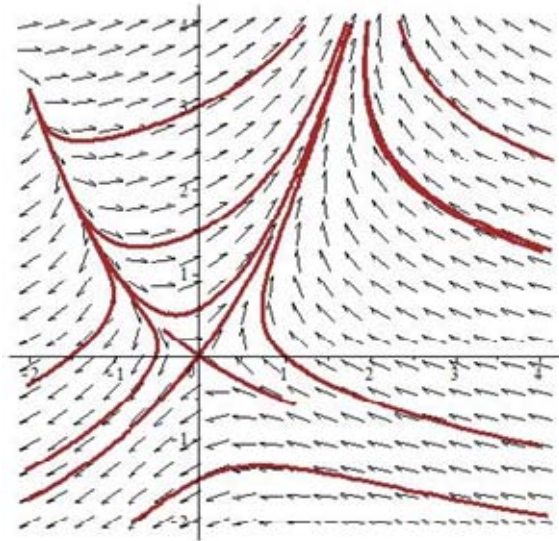


Рис. 4. $g = 2.2, a = 2, d1 = 1.4, d2 = 1.3, k = 1.2, h = 1, b = 0, O(0,0)$ – седло

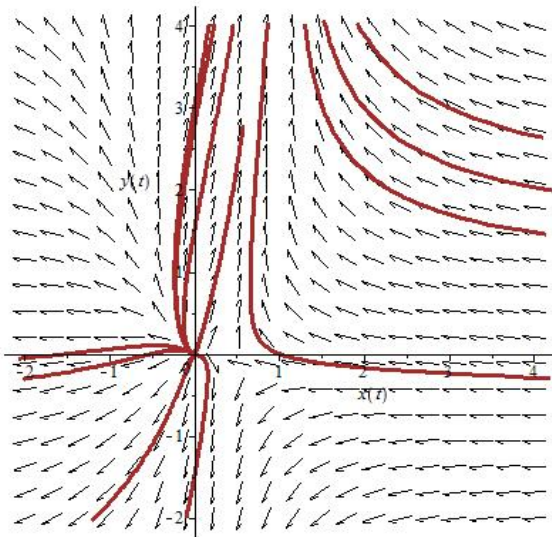


Рис. 5. $g = 2.3, a = 2.1, d1 = 0.3, d2 = 0.4, k = 1.8, h = 1.2, b = 0, O(0,0)$ – неустойчивый узел

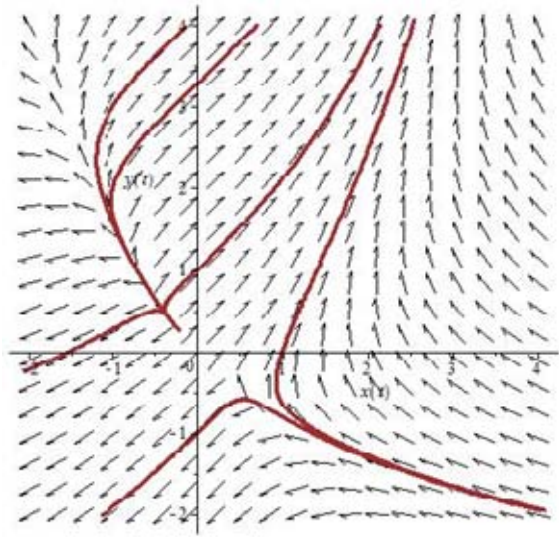


Рис. 6. $g = 3.1, a = 2.9, d1 = 1.4, d2 = 1.5, k = 1, h = 0.2, b = 0, O(0,0)$ – седло-узел

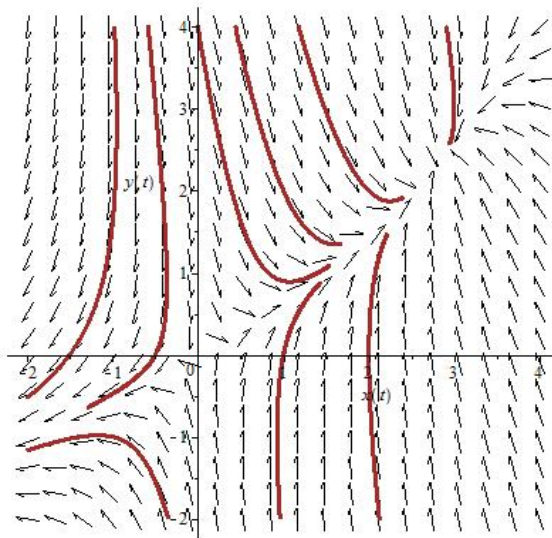


Рис. 7. $g = 0.5, a = -0.1, d1 = 0.1, d2 = 0.5, k = 0.1, h = 0.2, b = 0, O(0; 0)$ – седло, $M(2.8; 2.4)$ – устойчивый узел

Подставляем полученную координату в функции (3) и приравниваем полученные выражения:

$$\frac{1}{d_1} \left[\frac{[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2]^2}{4k(a-d_2)^2} - \frac{(g-d_1-h)[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2] + b}{2k(a-d_2)} \right] = -\frac{d_2[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2]}{2k(a-d_2)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2]^2}{4k(a-d_2)^2} - \frac{[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2]^2}{2k(a-d_2)^2} = -b,$$

и получаем условия существования одной особой точки – седла-узла:

$$b = \frac{[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2]^2}{4k(a-d_2)^2},$$

$$(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2 < 0, a-d_2 < 0.$$

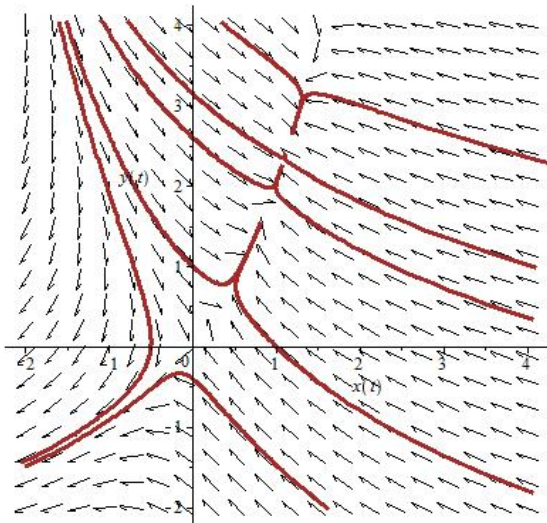
Также одна особая точка $\left(0, \frac{b}{d_2}\right)$ – седло – возникает при $a-d_2 = 0$.

Две особые точки (4) – седло и устойчивый узел существуют при выполнении условий:

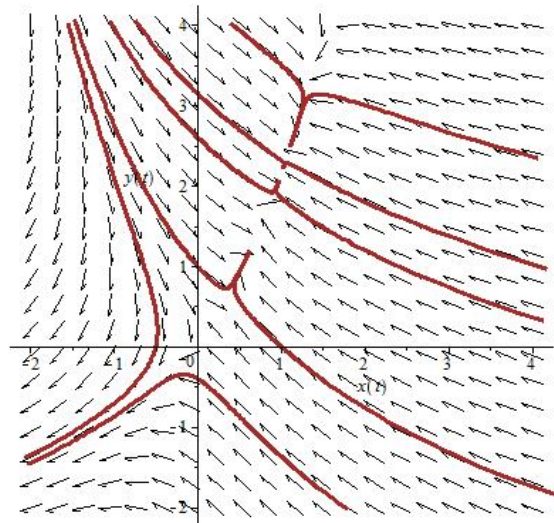
$$b < \frac{[(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2]^2}{4k(a-d_2)^2},$$

$$(g-d_1-h)(a-d_2)-d_1d_2 < 0, a-d_2 < 0.$$

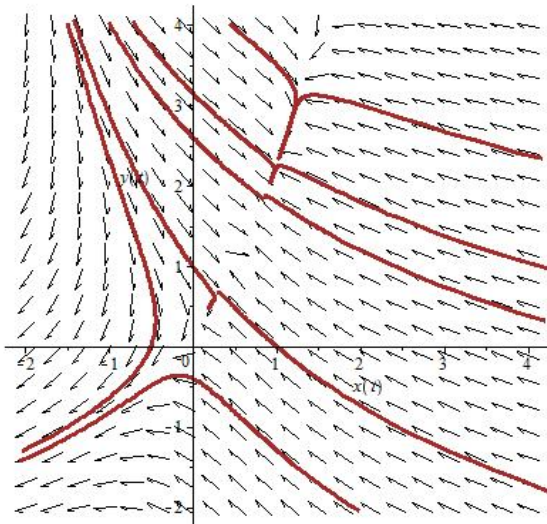
Если величина b стремится к значению (5), то две особые точки – седло и устойчивый узел – переходят в одну особую точку – седло-узел (рис. 8). Таким образом, величина (5) является бифуркационным параметром. Данный переход означает стабилизацию плотностей субпопуляций на более низком уровне при росте параметра b , описывающего влияние браконьерской добычи на популяцию.



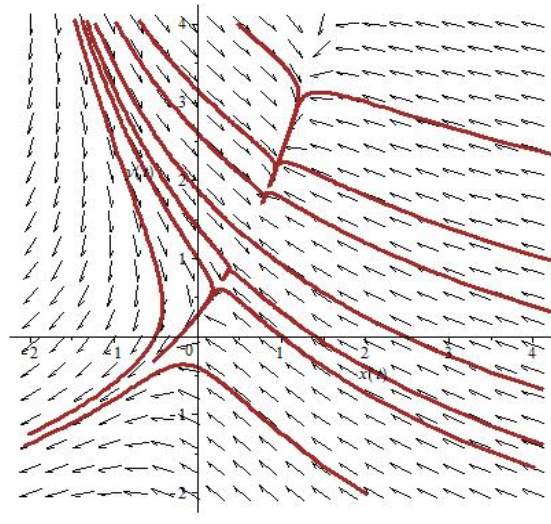
a) $b = 0.1$, $M1 (0.05; 0.10)$ – седло, $M2 (1.13; 2.43)$ – устойчивый узел



б) $b = 0.3$, $M1 (0.17; 0.36)$ – седло, $M2 (1.01; 2.18)$ – устойчивый узел



а) $b = 0.5$, $M1 (0.33; 0.71)$ – седло, $M2 (0.85; 1.83)$ – устойчивый узел



б) $b = 0.6215$, $M (0.59; 1.27)$ – седло-узел

Рис. 8. Переход двух особых точек – седла и устойчивого узла в одну особую точку седло-узел при $g = 1.5$, $a = 1.5$, $d1 = 1.4$, $d2 = 2.8$, $k = 1.8$, $h = 1$

Наконец, система (2) не имеет особых точек при:

$$b > \frac{[(g - d_1 - h)(a - d_2) - d_1 d_2]^2}{4k(a - d_2)^2}$$

(рис. 9). Следовательно, при значениях параметра b , превышающего величину (5), охраняемая субпопуляция вымирает, что в конце концов приводит и к вымиранию неохраваемой субпопуляции.

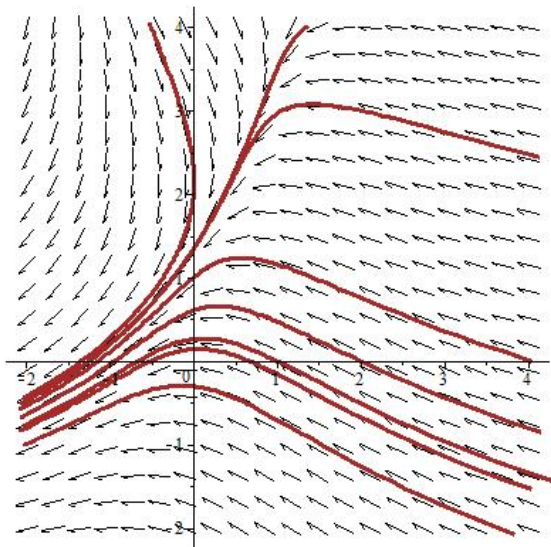


Рис. 9. $g = 1.5$, $a = 1.5$, $d1 = 1.4$, $d2 = 2.8$, $k = 1.8$, $h = 1$, $b = 1.8$, нет особых точек

Можно сделать вывод, что браконьерская добыча негативно действует на динамику всей популяции. Характер особых точек – седло и седло-узел – позволяет утверждать, что появляются области таких значений параметров модели, при которых обе части популяции вымирают. При существовании двух особых точек – седла и устойчивого узла одновременно при увеличении параметра, описывающего браконьер-

скую добычу, особые точки стягиваются в седло-узел, и при этом стабилизация плотностей популяции происходит на более низких уровнях, а также появляется возможность вымирания популяции.

Перейдем теперь к изучению случая 3, когда нет браконьерской добычи популяции и существует конкуренция внутри охраняемой субпопуляции. Особые точки системы получаются при пересечении парабол

$$y = \frac{1}{d_1} [kx^2 - (g - h - d_1)x] = \frac{k}{d_1} \left(x - \frac{g - h - d_1}{2k} \right)^2 - \frac{(g - h - d_1)^2}{4kd_1},$$

$$x = \frac{1}{d_2} [cy^2 - (a - d_2)y] = \frac{c}{d_2} \left(y - \frac{a - d_2}{2c} \right)^2 - \frac{(a - d_2)^2}{4cd_2},$$

проходящих через начало координат (рис. 10, 11).

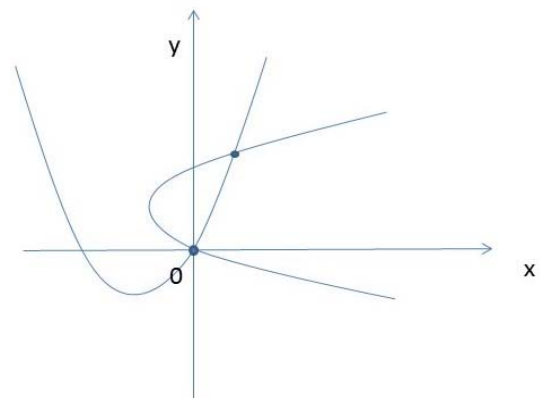


Рис. 10. Случай $a - d_2 > 0$

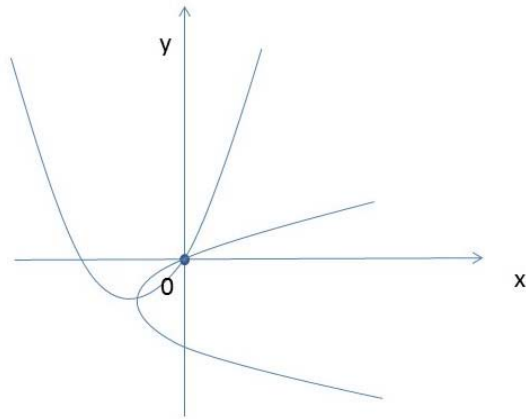


Рис. 11. Случай $a - d_2 < 0$

Характеристическое уравнение для линеаризованной системы (1) имеет вид:

$$\lambda^2 - (g - h - d_1 - 2kx_0 + a - d_2 - 2cy_0)\lambda + (g - h - d_1 - 2kx_0)(a - d_2 - 2cy_0) - d_1d_2 = 0,$$

где x_0, y_0 – координаты некоторой особой точки системы (1). Знаки корней характеристического уравнения, имеющих вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{g - h - d_1 - 2kx_0 + a - d_2 - 2cy_0}{2} \pm \frac{\sqrt{(g - h - d_1 - 2kx_0 + a - d_2 - 2cy_0)^2 - 4[(g - h - d_1 - 2kx_0)(a - d_2 - 2cy_0) - d_1d_2]}}{2},$$

определяют виды особых точек линеаризованной системы (2). Как показано ранее, в линеаризованной системе нет особых точек типа фокус и центр, поэтому типы особых точек линеаризованной системы и системы (1) совпадают.

Количество особых точек и расположение траекторий в их окрестностях зависят от знаков разностей $g - h - d_1 - 2kx_0$ и $a - d_2 - 2cy_0$.

$$1. \quad g - h - d_1 - 2kx_0 > 0, \quad a - d_2 - 2cy_0 > 0.$$

В особой точке (0,0) имеем неустойчивый узел, если $(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 > 0$; седло-узел, если $(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 = 0$; седло, если $(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 < 0$.

2. Выражения $g - h - d_1 - 2kx_0$ и $a - d_2 - 2cy_0$ разных знаков. В этих случаях начало координат является седлом, т. к.

$$g - h - d_1 + a - d_2 < g - h - d_1 - (a - d_2)$$

и

$$\sqrt{(g - h - d_1 - (a - d_2))^2 + 4d_1d_2} > g - h - d_1 + a - d_2.$$

Такой же фазовый портрет траекторий будет в случае, когда хотя бы один из коэффициентов $g - h - d_1 - 2kx_0$ и $a - d_2 - 2cy_0$ будет равен нулю.

$$3. \quad g - h - d_1 - 2kx_0 < 0, \quad a - d_2 - 2cy_0 < 0.$$

Здесь всего одна особая точка – начало координат. Это седло, если $(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 > 0$, седло-узел, если $(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 = 0$, устойчивый узел, если

$$(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2 < 0.$$

Из вышеизложенного следует, что величина $(g - h - d_1)(a - d_2) - d_1d_2$ является бифуркационным параметром.

4. В случае двух особых точек в начале координат всегда находится седло. Для второй особой точки сумма $g - h - d_1 - 2kx_0 + a - d_2 - 2cy_0$ будет отрицательной, поскольку, как видно из рисунков 10, 11,

$$x_0 > \frac{g - h - d_1}{2k}, \quad y_0 > \frac{a - d_2}{2c},$$

где $\frac{g - h - d_1}{2k}, \frac{a - d_2}{2c}$ – координаты вершин пара-

бол. Тогда во второй точке существуют либо устойчивый узел, либо седло. Однако, результаты, изложенные выше для случая $k \neq 0$, и результаты, полученные в работе [3], показывают, что для существования устойчивого узла достаточно введения члена, описывающего конкуренцию, только в одно из уравнений системы (1). Демпфирующий эффект конкуренции показывает и рассмотрение частного случая системы (1) при $g - d_1 - h = 0$ и $a - d_2 = 0$. При этих условиях в системе существуют две особые точки – начало координат и точка

$$\left(\sqrt[3]{\frac{d_1^2 d_2}{k^2 c}}, \sqrt[3]{\frac{d_1 d_2^2}{k c^2}} \right).$$

Достаточно просто установить, что в начале координат – седло, во второй особой точке – устойчивый узел. Таким образом, при существовании в (1) двух особых точек одна из них – седло, а другая – устойчивый узел (рис. 12).

Можно сделать вывод, что в случае 3, в зависимости от значений всех параметров в уравнениях системы, имеются возможности как неограниченного роста всей популяции, так и ее вымирания. Наличие конкуренции в охраняемой части популяции замедляет рост плотностей субпопуляций и ускоряет при определенных условиях их вымирание.

Рассмотрим наиболее общий случай 4 для системы (1). В этом случае присутствует конкуренция в обеих частях популяции, в функцию, описывающую добычу неохраняемой части популяции, входит и браконьерский промысел.

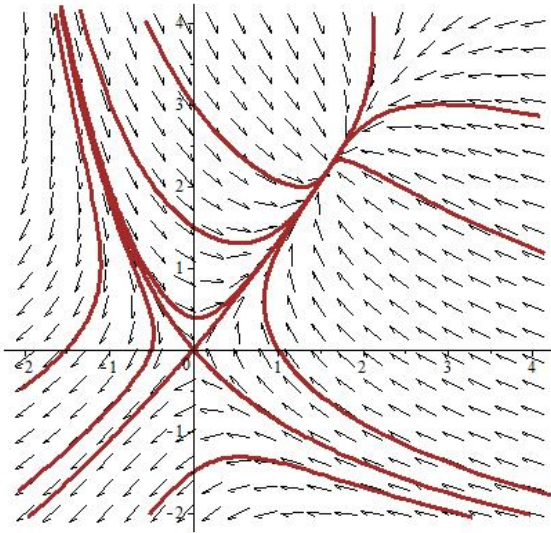


Рис. 12. $g = 3.2, a = 3.1, d_1 = 2.1, d_2 = 3.1, k = 1.8,$
 $c = 1, h = 1.1, b = 0, O(0,0)$ – седло,
 $M(1.6; 2.2)$ – устойчивый узел

Найдем условия касания параболы

$$y = \frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x]$$

и ветви параболы:

$$y = \frac{d_2(a - d_2)}{2c} + \sqrt{\frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} + \frac{d_2}{c}}x,$$

уравнения которых получены из условия равенства нулю правых частей системы (1).

Приравняв производные двух последних функций, получим координаты x точек на параболах, в которых касательные одинаково направлены. Они находятся как корень уравнения:

$$t^3 - \left(\frac{d_2(g - h - d_1)}{2kc} + \frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} \right)t - \frac{d_1 d_2^2}{4kc^2} = 0,$$

где $t = \sqrt{\frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} + \frac{d_2}{c}}x$. Решая уравнение [12],

имеем:

$$x^* = \frac{c}{d_2} \left[(A + B)^2 - \frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} \right].$$

Здесь

$$A = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{d_2}{kc^2} (d_1 d_2 + \sqrt{Q})}, \quad B = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{d_2}{kc^2} (d_1 d_2 - \sqrt{Q})},$$

$$\sqrt{Q} = \frac{d_2}{8kc^2} \sqrt{d_2 \left[d_1^2 d_2^2 - \frac{1}{27kc^2} \left(2c(g - h - d_1) + d_2(a - d_2)^2 \right)^3 \right]}$$

при условии

$$d_1^2 d_2 > \frac{1}{27kc^2} \left(2c(g - h - d_1) + d_2(a - d_2)^2 \right)^3.$$

При этом выбираем $x^* \geq 0$.

Условие касания парабол:

$$\frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x^*] = \frac{d_2(a - d_2)}{2c} + \sqrt{\frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} + \frac{d_2}{c}}x^*. \quad (6)$$

При $0 \leq \frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x^*] < \frac{a - d_2}{c}$, выполнении

нии (6) и $a - d_2 \leq 0$, выполнении (6) в системе (1) – одна особая точка. Две особые точки существуют в двух случаях:

$$a - d_2 > 0,$$

$$\frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x^*] \geq \frac{a - d_2}{c},$$

$$\frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x^*] < \frac{d_2(a - d_2)}{2c} +$$

$$+ \sqrt{\frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} + \frac{d_2}{c}}x^*;$$

$$a - d_2 \leq 0,$$

$$\frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x^*] < \frac{d_2(a - d_2)}{2c} +$$

$$+ \sqrt{\frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} + \frac{d_2}{c}}x^*.$$

Если

$$\frac{1}{d_1}[kx^2 - (g - h - d_1)x^*] > \frac{d_2(a - d_2)}{2c} +$$

$$+ \sqrt{\frac{d_2^2(a - d_2)^2}{4c^2} + \frac{d_2}{c}}x^*,$$

то в системе (1) нет особых точек.

В случае 4 динамика субпопуляций аналогична случаю 3, лишь рост популяции будет более медленным, а вырождение – более быстрым за счет имеющейся конкуренции за ресурсы и территорию в обеих частях популяции.

В заключение изучим один частный случай в системе (1), когда члены уравнений системы $d_1(y - x)$ и $d_2(x - y)$ имеют виды $d_1 y$ и $-d_2 y$, соответственно. Это означает, что происходит непрерывное пополнение неохранных субпопуляции за счет субпопуляции на охраняемой территории. Плотность популяции y изменяется по логистическому закону. Система (1) приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (g - h)x + d_1 y - kx^2 - b, \\ \frac{dy}{dt} = (a - d_2)y - cy^2. \end{cases} \quad (7)$$

Исследование дискриминанта характеристического уравнения линеаризованной системы (7) показывает, что в системе (7) нет особых точек типа фокуса и центра. Количество же особых точек может изменять-

ся, при разных значениях коэффициентов системы, от 0 до 4 (рис. 13) в отличие от системы (1), у которой не более 2 особых точек.

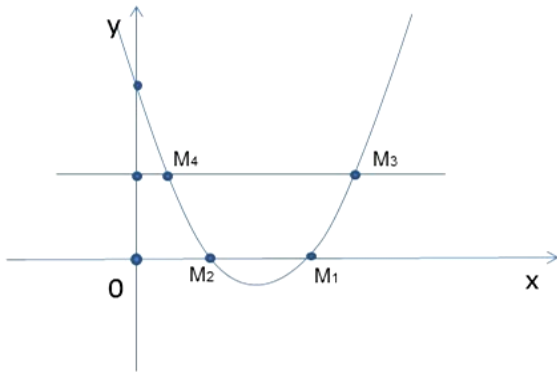


Рис. 13. Особые точки системы (7)

В системе (7) не будет особых точек при условии:

$$b > \frac{(g-h)^2}{4k} + \frac{d_1(a-d_2)}{c},$$

либо $g-h < 0, b > \frac{d_1(a-d_2)}{c}$.

Предположим, что $a-d_2 > 0$. Условия

$g-h \geq 0, b = \frac{d_1(a-d_2)}{c}$ задают одну особую точку

ку $\left(\frac{g-h}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ – седло-узел.

Введем обозначение:

$$D = \sqrt{(g-h)^2 - 4k \frac{d_1(a-d_2)}{c}}.$$

Устойчивый узел будет при

$$\frac{(g-h)^2}{4k} < b \leq \frac{d_1(a-d_2)}{c}, \frac{(g-h)^2}{4k} < \frac{d_1(a-d_2)}{c}$$

в точке $\left(\frac{g-h+D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$. Частный случай – ус-

тойчивый узел при $g < 0, b = \frac{d_1(a-d_2)}{c}$ в точке

$$\left(0, \frac{a-d_2}{c}\right).$$

Две особые точки – устойчивый узел

$$\left(\frac{g-h+D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$$

и седло $\left(\frac{g-h-D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ существуют в системе

(7), если выполняются условия

$$g-h > 0, b \geq \frac{d_1(a-d_2)}{c}, b > \frac{(g-h)^2}{4k}.$$

Устойчивый узел $\left(\frac{g-h+D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ и сед-

ло-узел $\left(\frac{g-h}{2k}, 0\right)$ – две особые точки при

$$g-h \geq 0, b = \frac{(g-h)^2}{4k}, b \leq \frac{d_1(a-d_2)}{c}.$$

Три особые точки существуют при выполнении двух наборов условий:

$$а) g-h > 0, b = \frac{(g-h)^2}{4k}, b \geq \frac{d_1(a-d_2)}{c}.$$

Тогда $\left(\frac{g-h+D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ – устойчивый узел,

$\left(\frac{g-h-D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ – седло, $\left(\frac{g-h}{2k}, 0\right)$ – седло-

узел.

$$б) g-h > 0, b < \frac{(g-h)^2}{4k}, b < \frac{d_1(a-d_2)}{c}.$$

Точки $\left(\frac{g-h+D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ – устойчивый узел,

$\left(\frac{g-h+\sqrt{g^2-4kb}}{2k}, 0\right)$ – седло,

$\left(\frac{g-h-\sqrt{g^2-4kb}}{2k}, 0\right)$ – неустойчивый узел.

Наконец, четыре особые точки имеются в первой четверти при:

$$g-h > 0, b < \frac{(g-h)^2}{4k}, b \geq \frac{d_1(a-d_2)}{c}.$$

Это точки $\left(\frac{g-h+\sqrt{g^2-4kb}}{2k}, 0\right)$ – седло,

$\left(\frac{g-h-\sqrt{g^2-4kb}}{2k}, 0\right)$ – неустойчивый узел,

$\left(\frac{g-h+D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ – устойчивый узел,

$\left(\frac{g-h-D}{2k}, \frac{a-d_2}{c}\right)$ – седло.

Следовательно, в системе (7) могут быть особые точки четырех типов: устойчивый и неустойчивый узлы, седло и седло-узел. Пронумеруем особые точки следующим образом (рис. 14).

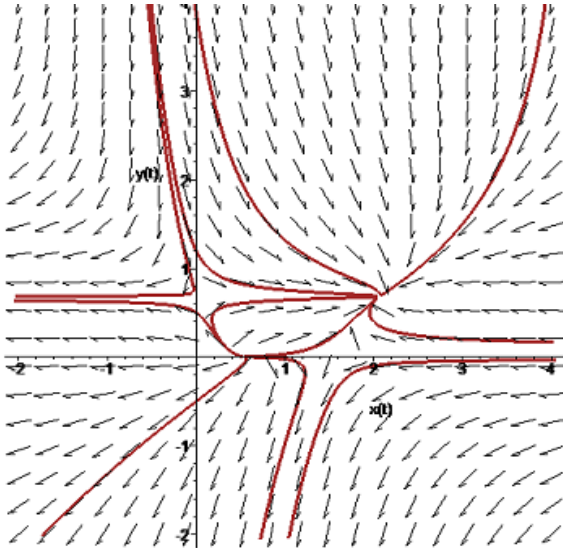


Рис. 14. $g-h = 2.5, a = 3, d_1 = 1.4, d_2 = 1.5, k = 1.2, c = 2.2, b = 1, M_1 (1.54; 0)$ – седло, $M_2 (0.54; 0)$ – неустойчивый узел, $M_3 (2,07; 0,68)$ – устойчивый узел, $M_4 (0.02; 0,68)$ – неустойчивый узел

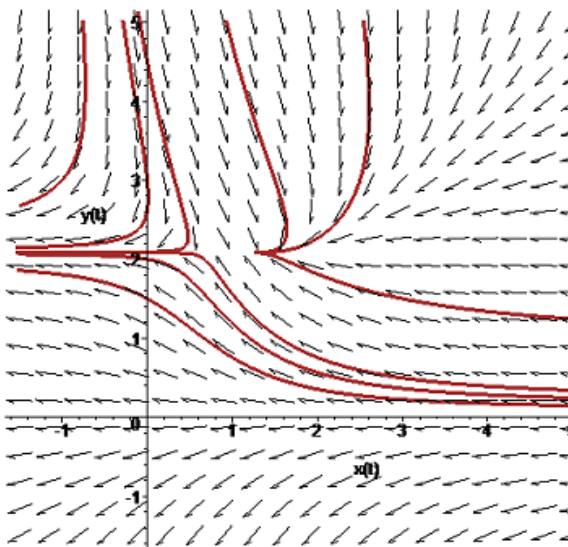


Рис. 15. $g-h = 2, a = 4, d_1 = 1.4, d_2 = 1.5, k = 1, c = 1.2, b = 3.92, L (1; 2.08)$ – седло-узел

$$M_1 \left(\frac{g-h + \sqrt{g^2 - 4kb}}{2k}, 0 \right), M_2 \left(\frac{g-h - \sqrt{g^2 - 4kb}}{2k}, 0 \right),$$

$$M_3 \left(\frac{g-h + D}{2k}, \frac{a-d_2}{c} \right),$$

$$M_4 \left(\frac{g-h - D}{2k}, \frac{a-d_2}{c} \right). \text{ Точка } M_1 \text{ – седло, точка}$$

M_2 – неустойчивый узел, точка M_3 – устойчивый узел, точка M_4 – седло.

Точки $K \left(\frac{g-h}{2k}, 0 \right), L \left(\frac{g-h}{2k}, \frac{a-d_2}{c} \right)$ получаются

в предельных случаях (рис. 15), когда точки M_1, M_2

, M_3, M_4 стягиваются в одну точку – седло-узел, причем сохраняются свойства устойчивости или неустойчивости узлов.

Таким образом, в системе имеются два бифуркационных параметра

$$b = \frac{(g-h)^2}{4k}, b = \frac{(g-h)^2}{4k} + \frac{d_1(a-d_2)}{c},$$

изменения знаков которых приводят к изменению фазовых портретов траекторий. Другие условия на параметры системы налагаются из-за условия нахождения особых точек в первой четверти фазовой плоскости.

При $g-h < 0$ может существовать только одна особая точка – устойчивый узел, или особых точек вообще не будет. Бифуркационный параметр также будет только один. Таким образом, при пополнении вырождающейся популяции имеется только два варианта её развития во времени.

Если же $a-d_2 < 0$, то в системе (7) могут существовать две особые точки устойчивый узел и седло

при $b < \frac{(g-h)^2}{4k}$. Если $b = \frac{(g-h)^2}{4k}$, то в точке K – седло-узел при выполнении условия $a-d_2 = 0$.

По результатам приведенных выше исследований можно сделать следующие **выводы**.

1. В системах (1) и (2) имеется не более двух особых точек, в системе (7) – до четырех. Следовательно, динамика системы (7) более непредсказуема по сравнению с динамикой системы (1) в случаях 1 – 4.

2. Во всех системах отсутствуют особые точки типа фокус и центр. Это позволяет сделать вывод, что наличие внешнего вмешательства в развитие популяций приводит к исчезновению периодических колебаний плотности, присущих природным системам.

3. В системе (2) при $b = 0$ в начале координат существуют четыре вида особых точек, а при $b \neq 0$ – только два. Из этого следует, что наличие браконьерского промысла уменьшает количество возможностей развития популяции и увеличивает вероятность ее вырождения.

4. В обеих системах (1) и (2) существует демпфирующий эффект введения конкуренции. В случае существования двух особых точек в обеих системах седло и устойчивый узел стягиваются в седло-узел при стремлении параметра b к значению (5), т. е. имеет место бифуркация. Следовательно, наличие конкуренции в неохраняемой части популяции приводит к большей неопределенности в динамике систем. При этом стабилизация плотностей происходит на более низких уровнях. Ту же картину мы видели в системе (1) при $k = 0$ [3]. При дальнейшем возрастании b особые точки на фазовых портретах вообще исчезают, что означает вырождение обеих частей популяции.

5. При пополнении вырождающейся популяции, описываемой моделью (7) при отрицательном коэффициенте ее прироста, число вариантов динамики субпопуляций снижается до двух.

Литература

1. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.
3. Васильев М. Д., Григорьев М. П., Трофимцев Ю. И. Создание охраняемой территории: моделирование динамики популяции и оценка затрат // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20. Вып. 2. С. 222 – 236.
4. Васильев М. Д., Григорьев М. П., Трофимцев Ю. И., Халтанова М. М. Оптимизация добычи популяции при наличии охраняемой территории // Мат. моделир. развития север. территорий РФ: тез. докл. Всеросс. конф. Якутск: Сфера, 2012. С. 96 – 99.
5. Васильев М. Д., Трофимцев Ю. И. Моделирование непрерывно пополняемой популяции // Тез. докладов VII Межд. конф. по мат. моделир. Якутск: Дани-Алмас, 2014. С. 128 – 129.
6. Васильев М. Д., Трофимцев Ю. И. Устойчивость модели динамики охраняемой популяции при оптимизации функции добычи // Тез. VI Межд. конф. по мат. моделир. Якутск: Медиа-холдинг Якутия, 2011. С. 26 – 27.
7. Васильев М. Д., Трофимцев Ю. И. Эколого-экономическая модель охраняемой популяции со случайной величиной добычи // Тр. Межд. науч. чтений «Приморские зори – 2012». Вып. 1. Владивосток: Изд-во ТАНЭБ, 2012. С. 75 – 78.
8. Васильченко В. В., Мермельштейн И. Г. О влиянии недоступных для хищника участков на динамику системы "хищник-жертва" // Мат. моделир. в проблемах рацион. природопользования. Тез. докл. XVII школы-семинара. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1989. С. 59.
9. Григорьев М. П., Половинкин Ю. Т., Романова Н. А., Софронов Е. Т., Трофимцев Ю. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. 2-е изд. М.: Вузовская книга, 2008. 248 с.
10. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 467 с.
11. Докторова В. А. Развитие популяции при наличии охраняемой территории // Приморские зори – 2007: Тр. Межд. науч. чтений. Вып. 1. Владивосток: Изд-во ТАНЭБ, 2007. С. 131–134.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
13. Леонов А. М., Трофимцев Ю. И. Восстановление популяции с помощью убежищ // Тез. докл. II Межд. конф. по мат. моделир. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. С. 66 – 67.
14. Леонов А. М., Трофимцев Ю. И. Качественный анализ динамики промысловых популяций при наличии охраняемых территорий // Мат. проблемы экологии. Тез. докл. II Всеросс. конф. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1994. С. 112 – 113.
15. Леонов А. М., Трофимцев Ю. И. Особые точки и бифуркационные параметры модели восстановления популяции // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Вып. 2. Т. 15. С. 106 – 118.
16. Мазалов В. В., Реттиева А. Н. Об одной задаче управления популяцией // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2002. Вып. 2. Т. 9. С. 293 – 306.
17. Толстихин О. Н., Трофимцев Ю. И. Экологический менеджмент. Новосибирск: Наука, 1998. 216 с.
18. Vasilyev M. D. The stability of ODE system in the models of dynamics // International Young Scientists Conference on Mathematical Modeling. Linyi, China, May, 24 – 25, 2010. Abstracts. Yakutsk: IMI YSU, 2010. P. 102.
19. Mazalov V. V., Rettieva A. N. A fishery game model with migration: Reserved territory approach // Game Theory and Applications. Nova Sci. Publ. N.Y., 2004. V. 10. P. 97 – 108.

Информация об авторах:

Васильев Максим Дмитриевич – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета, Якутск, 1767700@mail.ru.

Maxim D. Vasilyev – Senior Lecturer at the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Science, North-Eastern Federal University (Yakutsk).

Трофимцев Юрий Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета, Якутск, trofimtsev@mail.ru.

Yury I. Trofimtsev – Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Science, North-Eastern Federal University (Yakutsk).

Статья поступила в редколлегию 26.02.2015 г.