

УДК 519.6

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЫСТРОГО АВТОМАТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Е. А. Андреева, И. С. Мазурова

**APPLICATION OF FAST AUTOMATIC DIFFERENTIATION FOR OPTIMIZATION
OF SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

E. A. Andreeva, I. S. Mazurova

В работе рассматривается задача оптимального управления в модели хищник-жертва, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Для исходной непрерывной задачи сформулирован принцип максимума с учетом заданных ограничений и вида функционала. Исходная непрерывная задача сведена к дискретной задаче оптимального управления. Для дискретной задачи оптимального управления получены формулы вычисления градиента целевой функции с помощью прямого метода дифференцирования и метода быстрого автоматического дифференцирования. Разработан численный метод построения приближенного оптимального решения на основе метода быстрого автоматического дифференцирования. Показано, что полученное численным методом приближенное оптимальное управление с заданной точностью удовлетворяет принципу максимума для исходной непрерывной задачи.

In this paper, the authors solve the optimal control problem in the predator-prey model described by a system of Volterra integro-differential equations. The maximum principle for the initial continuous problem is formulated considering the defined constraints and functional form. The initial continuous problem is reduced to the discrete optimal control problem. For the discrete optimal control problem formulas for calculating the gradient of the target function using the method of direct differentiation and the method of fast automatic differentiation are received. The numerical method is developed to construct an approximate optimal solution on the basis of fast automatic differentiation method. It is shown that the obtained numerical results of the approximate optimal control correspond to the maximum principle for the initial continuous problem with a prescribed accuracy.

Ключевые слова: оптимальное управление, интегро-дифференциальные уравнения, модель хищник-жертва, метод быстрого автоматического дифференцирования.

Keywords: optimal control, integro-differential equations, prey-predator model, fast automatic differentiation method.

Изучение многих процессов, происходящих в различных биологических, экономических и технических системах, сводится к построению и анализу их математических моделей. Рассмотрение модели произвольной непрерывной динамической системы приводит к описанию их в общем случае системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

В ВЦ РАН под руководством Ю. Г. Евтушенко [1] разработана методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология), позволяющая с единых позиций определять градиенты для явно и неявно определенных функций и для вычислительных процессов, которые являются результатом дискретной аппроксимации непрерывных систем, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями. Этот подход был применен для построения оптимального решения систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтера.

В работе рассматривается математическая модель взаимодействия популяций с произвольным конечным числом хищников и жертв, которая описывается системой интегро-дифференциальных уравнений (1) – (2):

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left(e_i - \sum_{l=1}^m a_{il} x_l(t) \right) - \sum_{j=1}^n b_{ji} y_j(t) (x_i(t) - R_i) - u_i(t), \quad (1)$$

$$i = 1, m,$$

$$\dot{y}_j(t) = y_j(t) \left(-\alpha_j - \sum_{l=1}^n c_{jl} y_l(t) + \sum_{l=1}^m d_{jl} (x_l(t) - R_l) \right) + y_j(t) \sum_{l=1}^m \gamma_{jl} \int_{t-r}^t F_{jl}(t-\tau) (x_l(\tau) - R_l) d\tau - v_j(t), \quad (2)$$

$$j = 1, n,$$

при заданных начальных условиях

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i^0, x_i(\theta) = \varphi_i(\theta), \theta \in [-r, 0], \\ y_j(0) &= y_j^0 \quad i = 1, m, j = 1, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь m, n – количество классов хищников и жертв соответственно, $x_i(t)$, $i = 1, m$ – численность популяции жертв i -ого класса, $y_j(t)$, $j = 1, n$ – численность популяции хищников j -ого класса в момент времени $t \in [0, T]$, R_i – численность популяции жертв i -ого класса, недоступная хищникам,

$e_i, \alpha_j, a_{il}, b_{jl}, c_{jl}, d_{jl}, \gamma_{jl}$ – действительные положительные коэффициенты, характеризующие взаимодействие популяций хищников и жертв. Функции распределения $F_{jl}(t-\tau)$ характеризуют состояния системы в прошлом, описывая влияние доступной для хищника жертвы на характерном отрезке времени, связанном с ростом популяции жертв. Функциями управления являются функции $u_i(t)$ – скорость отлова популяции жертв i -ого класса, $v_j(t)$ – скорость отлова популяции хищников j -ого класса, удовлетворяющие ограничениям

$$0 \leq u_i(t) \leq u_{i\max}, \quad 0 \leq v_j(t) \leq v_{j\max}, \quad (4)$$

$$i = 1, m, j = 1, n,$$

$$\max_{0 \leq \omega_i \leq u_{i\max}, 0 \leq \psi_j \leq v_{j\max}} \left[-\lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \omega, \psi) - \sum_{i=1}^m p_i(t) \omega_i - \sum_{j=1}^n r_j(t) \psi_j \right] =$$

$$-\lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) - \sum_{i=1}^m p_i(t) \bar{u}_i(t) - \sum_{j=1}^n r_j(t) \bar{v}_j(t), \quad (6)$$

сопряженные функции

$$p_i(t), r_j(t), \quad i = 1, m, j = 1, n$$

являются решением системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_i(t) = -p_i(t) \left(e_i - \sum_{l=1}^m a_{il} x_l(t) \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^m p_l(t) a_{il} x_l(t) + p_i(t) \sum_{j=1}^n b_{ji} y_j(t) -$$

$$- \sum_{j=1}^n r_j(t) y_j(t) d_{ji} -$$

$$- \sum_{j=1}^n r_j(t) y_j(t) \gamma_{ji} \int_t^{t+r} F_{ji}(\tau-t) d\tau, \quad i = 1, m, \quad (7)$$

$$\dot{r}_j(t) = r_j(t) \alpha_j + r_j(t) \sum_{l=1}^n c_{jl} y_l(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^m p_l(t) b_{jl} (x_l(t) - R_l) +$$

$$+ \sum_{l=1}^n r_l(t) y_l(t) c_{lj} - r_l(t) \sum_{l=1}^m d_{jl} (x_l(t) - R_l) -$$

$$- r_j(t) \sum_{l=1}^m \gamma_{jl} \int_{t-r}^t F_{jl}(t-\tau) (x_l(\tau) - R_l) d\tau, \quad j = 1, n, \quad (8)$$

с условиями трансверсальности на правом конце

$$p_i(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x(T), y(T)), \quad i = 1, m,$$

$$p_i(t) \equiv 0 \quad \text{при } t > T, \quad (9)$$

где $u_{i\max}, v_{j\max}$ – максимальные скорости отлова популяции жертв и хищников соответственно, далее $u = (u_1, \dots, u_m), v = (v_1, \dots, v_n)$.

Математическая модель взаимодействия популяций с произвольным конечным числом хищников и жертв (1) – (3) является обобщением модели взаимодействия двух популяций, построенной в работе [3].

Оптимальное управление отловом строится из условия оптимизации заданного функционала

$$J(u, v) = \int_0^T f_0(t, x, y, u, v) dt + \Phi(x(T), y(T)). \quad (5)$$

В работе [2] показано, что оптимальное управление $\bar{u}(t), \bar{v}(t), t \in [0, T]$ в задаче (1) – (5) удовлетворяет принципу максимума:

$$r_j(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(x(T), y(T)), \quad j = 1, n,$$

$$r_j(t) \equiv 0 \quad \text{при } t > T.$$

Рассмотрим дискретную аппроксимацию задачи (1) – (5), в которой используется правило левых прямоугольников для аппроксимации интеграла и схема Эйлера аппроксимации производных.

Дискретная задача оптимального управления состоит в минимизации функции:

$$I = \Delta t \sum_{k=0}^{q-1} F_1(x^k, y^k, u^k, v^k) + F_0(x^q, y^q) \rightarrow \inf, \quad (10)$$

при заданных рекуррентных соотношениях:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta t x_i^k \left(e_i - \sum_{l=1}^m a_{il} x_l^k \right) -$$

$$- \Delta t \sum_{j=1}^n b_{ji} y_j^k (x_i^k - R_i) - \Delta t u_i^k, \quad i = 1, m, \quad (11)$$

$$y_j^{k+1} = y_j^k + \Delta t y_j^k \cdot$$

$$\cdot (-\alpha_j - \sum_{l=1}^n c_{jl} y_l^k + \sum_{l=1}^m d_{jl} (x_l^k - R_l)) +$$

$$+ \Delta t^2 y_j^k \sum_{l=1}^m \gamma_{jl} \sum_{s=k-v}^{k-1} F_{jl}^{k-s} \cdot (x_l^s - R_l) - \Delta t v_j^k, \quad j = 1, n, \quad (12)$$

начальных условиях

$$x_i^l = \varphi_i(t_l), \quad l = \overline{-v, 0},$$

$$y_j^0 = \theta_j, \quad i = 1, m, j = 1, n \quad (13)$$

и ограничениях на управление

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i^k \leq u_{i\max}, 0 \leq v_j^k \leq v_{j\max}, \\ i = 1, m, j = 1, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Для рекуррентных соотношений (11) – (12) введем следующие обозначения:

$$x^l = F_1(l, X^{1l}, Y^{1l}, U^{1l}, V^{1l}), \quad (15)$$

$$y^l = F_2(l, X^{2l}, Y^{2l}, U^{2l}, V^{2l}), \quad (16)$$

где $X^{il}, Y^{il}, U^{il}, V^{il}$ – заданные наборы векторов x^l, y^l, u^l, v^l соответственно, $i = \overline{1, 2}$, l принимает значения от 1 до q , в общем виде будем писать $l \in D$.

Будем говорить, что соотношения (15)-(16) задают q -шаговый процесс. Формулы (15)-(16) определяют вектора x^l, y^l на l -ом шаге.

Для каждого $j \in D$ введем индексные наборы $Q_{1j}, R_{1j}, S_{1j}, W_{1j}, Q_{2j}, R_{2j}, S_{2j}, W_{2j}$, содержащие индексы всех векторов x^l, y^l и $u^l, v^l, l \in D$, принадлежащих соответственно наборам X^{1j}, Y^{1j} и U^{1j}, V^{1j} в (15):

$$Q_{1j} = \{i \in D : x^i \in X^j\},$$

$$S_{1j} = \{i \in D : u^i \in U^j\},$$

$$R_{1j} = \{i \in D : y^i \in Y^j\},$$

$$W_{1j} = \{i \in D : v^i \in V^j\},$$

и X^{2j}, Y^{2j} и U^{2j}, V^{2j} в (16):

$$Q_{2j} = \{i \in D : x^i \in X^j\},$$

$$S_{2j} = \{i \in D : u^i \in U^j\},$$

$$R_{2j} = \{i \in D : y^i \in Y^j\},$$

$$W_{2j} = \{i \in D : v^i \in V^j\}.$$

На j -шаге множества $Q_{1j}, S_{1j}, R_{1j}, W_{1j}$ определяют индексы всех «входных» векторов x^i, u^i, y^i, v^i , содержащихся во множествах X^j, U^j, Y^j, V^j соответственно, необходимых для вычисления правой части (15), аналогично на j -шаге множества $Q_{2j}, S_{2j}, R_{2j}, W_{2j}$ задают множества

всех индексов «входных» векторов x^i, u^i, y^i, v^i , необходимых для вычисления правой части (16).

Введем сопряженные индексные наборы:

$$\overline{Q}_{1j} = \{i \in D : x^j \in X^i\},$$

$$\overline{S}_{1j} = \{i \in D : u^j \in U^i\},$$

$$\overline{R}_{1j} = \{i \in D : y^j \in Y^i\},$$

$$\overline{W}_{1j} = \{i \in D : v^j \in V^i\},$$

$$\overline{Q}_{2j} = \{i \in D : y^j \in Y^i\},$$

$$\overline{S}_{2j} = \{i \in D : v^j \in V^i\},$$

$$\overline{R}_{2j} = \{i \in D : y^j \in Y^i\},$$

$$\overline{W}_{2j} = \{i \in D : v^j \in V^i\}.$$

На j -шаге множество \overline{Q}_{1j} определяет номера

всех тех шагов $i \in D$, для которых $x^j \in X^i$.

Между элементами введенных множеств есть связь. Если $i \in Q_{1j}, s \in S_{1j}$, то $j \in \overline{Q}_{1i}, j \in \overline{S}_{1s}$.

С помощью введенных множеств можно записать:

$$X^{1j} = \{x^i : i \in Q_{1j}\}, U^{1j} = \{u^i : i \in S_{1j}\}.$$

Из приведенных определений следует, что если $x^q \in \overline{X}^{1j}, y^q \in \overline{Y}^{1j}$, то имеет место следующие функциональные зависимости:

$$x^q = F_1(q, \dots, x^j, \dots),$$

$$y^q = F_2(q, \dots, y^j, \dots).$$

Следовательно, наборы $Q_{1j}, R_{1j}, S_{1j}, W_{1j}, Q_{2j}, R_{2j}, S_{2j}, W_{2j}$ могут быть названы наборами индексов входных переменных x, y и u, v соответственно, в то время как $\overline{Q}_{1j}, \overline{R}_{1j}, \overline{S}_{1j}, \overline{W}_{1j}, \overline{Q}_{2j}, \overline{R}_{2j}, \overline{S}_{2j}, \overline{W}_{2j}$ называются наборами индексов выходных векторов x, y и u, v соответственно.

Определим матрицы производных процесса по управлению[^]

$$\begin{aligned} N_{1ij} = \partial x^{jT} / \partial u^i, N_{2ij} = \partial y^{jT} / \partial u^i \\ M_{1ij} = \partial x^{jT} / \partial v^i, M_{2ij} = \partial y^{jT} / \partial v^i, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} N_{1ij} = \delta_{ij} F_{1u^i}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j) + \\ = \sum_{k \in Q_{1j}} N_{1ik} F_{1x^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j) + \\ + \sum_{k \in R_{1j}} N_{2ik} F_{1y^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2ij} &= \delta_{2ij} F_{2v^i}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j) + \\
 &+ \sum_{k \in R_{2j}} M_{2ik} F_{2y^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j) + \\
 &+ \sum_{k \in Q_{2j}} M_{1ik} F_{2x^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j), \\
 \delta_{1ij} &= \begin{cases} 1, i \in S_{1j} \\ 0, i \notin S_{1j} \end{cases}, \delta_{2ij} = \begin{cases} 1, i \in S_{2j} \\ 0, i \notin S_{2j} \end{cases}, \\
 M_{1ij} &= \sum_{k \in Q_{1j}} M_{1ik} F_{1x^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j) + \\
 &+ \sum_{k \in R_{1j}} M_{2ik} F_{1y^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j), \\
 N_{2ij} &= \sum_{k \in R_{2j}} N_{2ik} F_{2y^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j) + \\
 &+ \sum_{k \in Q_{2j}} N_{1ik} F_{2x^k}^T(j, X^j, Y^j, U^j, V^j).
 \end{aligned}$$

Для процесса (15) – (16) формула (17) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 N_{1i+1j} &= \frac{\partial x^{i+1}}{\partial u^j} = -\Delta t \delta_{i+1j} + \frac{\partial x^i}{\partial u^j} (1 + \Delta t(e - ax^i) - \\
 &- \Delta tax^i - \Delta tb^T y^i) + \frac{\partial y^i}{\partial u^j} (-\Delta tb^T x^i),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{1i+1j} &= \frac{\partial x^{i+1}}{\partial v^j} = \frac{\partial x^i}{\partial v^j} (1 + \Delta t(e - ax^i) - \Delta tax^i - \\
 &- \Delta tb^T y^i) + \frac{\partial y^i}{\partial v^j} (-\Delta tb^T x^i).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2i+1j} &= \frac{\partial y^{i+1}}{\partial v^j} = -\Delta t \delta_{i+1j} + \\
 &+ \frac{\partial y^i}{\partial v^j} (1 + \Delta t(-\alpha - c^T y^i + d^T(x^i - R)) - \Delta tc^T y^i +
 \end{aligned}$$

$$+ \Delta t^2 \gamma^T \sum_{s=i-v}^{i-1} F^{i-s}(x^s - R)) + \frac{\partial x^i}{\partial v^j} (\Delta ty^i d^T) +$$

$$+ \Delta t^2 \sum_{s=i+1}^{q-1} \frac{\partial x^s}{\partial v^j} y^s \gamma^T F^{s-i},$$

$$\begin{aligned}
 N_{2i+1j} &= \frac{\partial y^{i+1}}{\partial u^j} = \frac{\partial y^i}{\partial u^j} (1 + \Delta t(-\alpha - c^T y^i + \\
 &+ d^T(x^i - R)) + \Delta ty^i c^T +
 \end{aligned}$$

$$+ \Delta t^2 \gamma^T \sum_{s=i-v}^{i-1} F^{i-s}(x^s - R)) + \frac{\partial x^i}{\partial u^j} (\Delta ty^i d^T) +$$

$$+ \Delta t^2 \sum_{s=i+1}^{q-1} \frac{\partial x^s}{\partial u^j} y^s \gamma^T F^{s-i},$$

$$\delta_{i+1j} = \begin{cases} 1, i+1=j \\ 0, i+1 \neq j \end{cases}$$

Градиент целевой функции по $u^l, l = \overline{0, q-1}$ для процесса (15) – (16) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega(u, v)}{du^l} &= I_{u^l}(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{k=1}^q N_{1lk} I_{x^k}(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{k=1}^q N_{2lk} I_{y^k}(x, y, u, v).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Градиент целевой функции по $v^l, l = \overline{0, q-1}$ для процесса (15) – (16) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega(u, v)}{dv^l} &= I_{v^l}(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{k=1}^q M_{2lk} I_{y^k}(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{k=1}^q M_{1lk} I_{x^k}(x, y, u, v).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Основное вычислительное время при расчете градиента по формулам (18) – (19) затрачивается на нахождение матриц $N_{1ij}, N_{2ij}, M_{1ij}, M_{2ij}$, для этого необходимо решить $2q(n+m)$ раз систему уравнений с $q^2(n+m)^2$ неизвестными.

Введем множители Лагранжа p^l, r^l , тогда функция Лагранжа запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 L(x, y, u, v, p, r) &= I(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{l=1}^q [F_1^T(l, X^l, Y^l, U^l, V^l) - x^{lT}] p^l + \\
 &+ \sum_{l=1}^q [F_2^T(l, X^l, Y^l, U^l, V^l) - y^{lT}] r^l.
 \end{aligned}$$

Множители Лагранжа определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 L_{x^i}(x, y, u, v, p, r) &= I_{x^i}(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{l \in Q_i} F_{1x^i}^T(l, X^l, Y^l, U^l, V^l) p^l + \\
 &+ \sum_{l \in Q_{2i}} F_{2x^i}^T(l, X^l, Y^l, U^l, V^l) r^l - p^i = 0, \\
 L_{y^i}(x, y, u, v, p, r) &= I_{y^i}(x, y, u, v) + \\
 &+ \sum_{l \in R_i} F_{1y^i}^T(l, X^l, Y^l, U^l, V^l) p^l + \\
 &+ \sum_{l \in R_{2i}} F_{2y^i}^T(l, X^l, Y^l, U^l, V^l) r^l - r^i = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда множители Лагранжа $p_i^k, r_j^k, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{0, q}$ для процесса (15) – (16) запишутся следующим образом:

$$p_i^k = I_{x_i^k}(x, y, u, v) + p_i^{k+1} + \Delta t p_i^{k+1} \left(e_i - \sum_{l=1}^m a_{il} x_l^k \right) - \Delta t \sum_{l=1}^m p_l^{k+1} a_{li} x_l^k - \tag{20}$$

$$- \Delta t p_l^{k+1} \sum_{j=1}^n b_{ji} y_j^k + \Delta t \sum_{j=1}^n r_j^{k+1} y_j^k d_{ji} + \Delta t^2 \sum_{s=k+1}^{k+v} \sum_{j=1}^n r_j^{s+1} y_j^s \gamma_{ji} F_{ji}^{s-k}, i = 1, m,$$

$$r_j^k = I_{y_j^k}(x, y, u, v) + r_j^{k+1} - \Delta t r_j^{k+1} \alpha_j - \Delta t r_j^{k+1} \sum_{l=1}^n c_{jl} y_l^k -$$

$$- \Delta t \sum_{l=1}^m p_l^{k+1} b_{lj} (x_l^k - R_l) - \Delta t \sum_{l=1}^n r_l^{k+1} y_l^k c_{lj} + \Delta t r_j^{k+1} \sum_{l=1}^m d_{jl} (x_l^k - R_l) + \tag{21}$$

$$+ \Delta t^2 r_j^{k+1} \sum_{l=1}^m \gamma_{jl} \sum_{s=k-v}^{k-1} F_{jl}^{k-s} (x_l^s - R_l), j = 1, n.$$

Градиент целевой функции по

$$u_i^k, i = \overline{1, m}, k = \overline{0, q-1}$$

для процесса (15) – (16) запишется следующим образом:

$$\frac{d\Omega(u, v)}{du_i^k} = L_{u_i^k}(x, y, u, v, p, r) = \tag{22}$$

$$= I_{u_i^k}(x, y, u, v) + \Delta t p_i^{k+1}.$$

Градиент целевой функции по

$$v_j^k, j = \overline{1, n}, k = \overline{0, q-1}$$

для процесса (15) – (16) запишется следующим образом:

$$\frac{d\Omega(u, v)}{dv_j^k} = L_{v_j^k}(x, y, u, v, p, r) = \tag{23}$$

$$= I_{v_j^k}(x, y, u, v) + \Delta t r_j^{k+1}.$$

Основное вычислительное время при расчете градиента по формулам (22) – (23) тратиться на нахождение векторов p^l и $r^l, l = \overline{0, q}$, для этого необходимо решить 2 системы уравнений с $q(n+m)$ неизвестными.

Выражения для вычисления градиента «прямым» и «обратным» методами математически эквивалентны, но с вычислительной точки зрения имеется существенное отличие. Показано, что для расчета градиента по формулам «прямого» метода дифференцирования необходимо решить $2q(n+m)$ раз систему уравнений с $q^2(n+m)^2$ неизвестными. Для расчета градиента по формулам БАД необходимо решить 2 системы уравнений с $q(n+m)$ неизвестными.

Для нахождения градиента по формулам прямого метода дифференцирования и метода БАД необходимо вычислить:

Для прямого метода дифференцирования:	Для метода БАД:
$q^2 m^2$ значений $\partial x^{jT} / \partial u^i$,	qm значений p^i ,
$q^2 mn$ значений $\partial y^{jT} / \partial u^i$,	qn значений r^i ,
$q^2 mn$ значений $\partial x^{jT} / \partial v^i$,	qm значений $\frac{dI(u)}{du^i}$,
$q^2 n^2$ значений $\partial y^{jT} / \partial v^i$,	qn значений $\frac{dI(u)}{dv^i}$,
qm значений $\frac{dI(u)}{du^i}$,	
qn значений $\frac{dI(u)}{dv^i}$,	
всего $q^2(n+m)^2 + q(n+m)$ значений	всего $2q(n+m)$ значений

Таким образом, применение прямого метода вычисление градиента целевой функции в $q(n + m)$ раз более трудоемко, чем расчеты по формулам БАД.

На основе метода быстрого автоматического дифференцирования разработана программа, позволяющая построить оптимальное решение задачи (10) – (14). Ниже на рисунках 1 – 4 представлены графики зависимости оптимального управления $\bar{u}_1(t)$, $\bar{v}_1(t)$ и численности популяции $\bar{x}_1(t)$, $\bar{y}_1(t)$ при различных значениях запаздывания r при следующих параметрах системы: $T=20$; $m = 1, n = 1$,

$$x_1^0 = 6, y_1^0 = 5, R_i = 0, e_i = 0.75, c_{11} = 0, \\ d_{1i} = 0, \alpha_1 = 0.75, \gamma_{11} = 0.1, a_{11} = 0.0375, \\ b_{11} = 0.0375, 0 \leq u_i \leq 0.1, i = 1,2, \\ \Delta t = 0.01, \\ A_1 = 7, B_1 = 13.5, M = N = 1000, \\ I(u, v) = M \cdot \max(A_1 - x_1^q, 0)^2 + \\ + N \cdot \max(B_1 - y_1^q, 0)^2,$$

точность метода $\varepsilon = 0,0000001$.

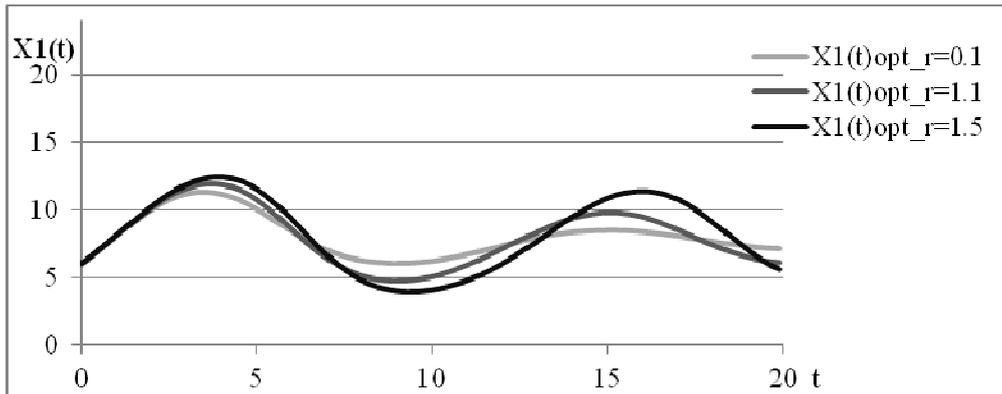


Рис. 1. График зависимости $\bar{x}_1(t)$ при различных значениях запаздывания r

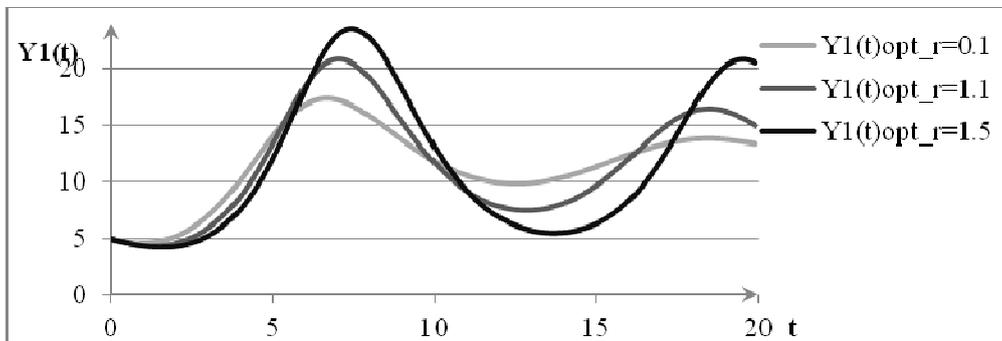


Рис. 2. График зависимости $\bar{y}_1(t)$ при различных значениях запаздывания r

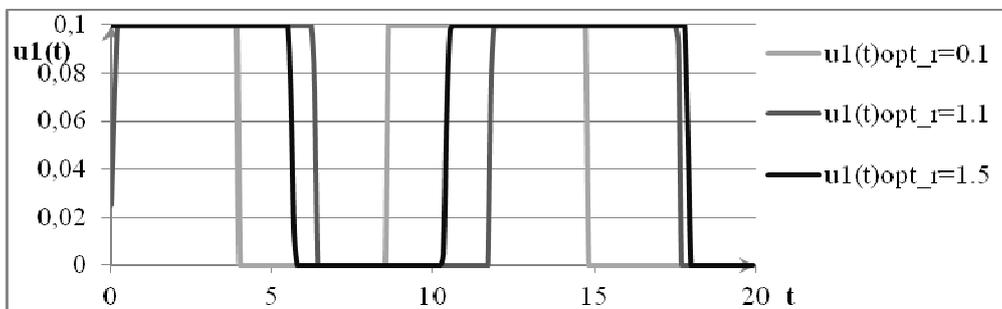


Рис. 3. График зависимости $\bar{u}_1(t)$ при различных значениях запаздывания r

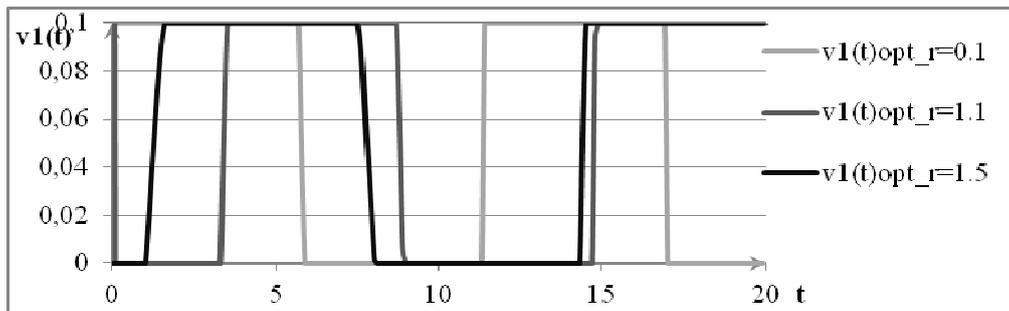


Рис. 4. График зависимости $\bar{v}_1(t)$ при различных значениях запаздывания r

Легко видеть, что полученное численными методами оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума.

Таким образом, в предлагаемой работе рассмотрены детерминированные нелинейные управляемые модели, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями, сформулированы необходимые условия оптимальности. Для дискретной задачи оптимального управления получены формулы вычисления градиента целевой функции с помощью прямого метода дифференцирования и метода быстрого автоматического дифференцирования. Показано, что применение прямого метода вычисления градиента целевой функции

в $q(n+m)$ раз более трудоемко, чем расчеты по формулам быстрого автоматического дифференцирования, где $q(n+m)$ – размерность управления. На базе метода БАД разработан алгоритм построения приближенного оптимального решения, численные результаты которого с заданной точностью совпадают с теоретическими результатами. Оптимальное управление определяется функцией переключения и имеет конечное число переключений на фиксированном интервале времени.

Литература

1. Евтушенко Ю. Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: Научное издание ВЦ РАН, 2013. 144 с.
2. Andreeva E. A., Mazurova I. S. Optimal control of predator-prey model with distributed delay // Mathematical Modelling and Geometry. 2013. Vol. 1. № 3. P. 38 – 48. Режим доступа: <http://mmg.tversu.ru>
3. Beretta E., Capassa V., Rinaldi F. Global stability results for a generalized Lotka_Volterra system with distributed delays. Journal of Math. Biology. 1988. № 26.

Информация об авторах:

Андреева Елена Аркадьевна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой компьютерной безопасности и математических методов управления математического факультета Тверского государственного университета, andreeva.tvgu@yandex.ru.

Elena A. Andreeva – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Computer Security and Mathematical Management Methods, Tver State University.

Мазурова Ирина Сергеевна – соискатель кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления математического факультета Тверского государственного университета, IrinaSMazurova@gmail.com.

Irina S. Mazurova – post-graduate student at the Department of Computer Security and Mathematical Management Methods, Tver State University.

(Научный руководитель – Е. А. Андреева)

Статья поступила в редколлегию 22.07.2014 г.