

УДК 537.311.33

ВКЛАД РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ КВАЗИДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В УШИРЕНИЕ КРИВОЙ КЛАССИЧЕСКОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

Т. Т. Муратов

CONTRIBUTION OF RESONANCE SCATTERING OF QUASI-TWO- AND THREE-DIMENSIONAL MOBILE CARRIERS TO DISSIPATION OF CLASSICAL CYCLOTRON RESONANCE CURVE

T. T. Muratov

Получены асимптотические формулы для уширения кривой поглощения классического циклотронного резонанса (ЦР) в условиях резонансного рассеяния электронов на атомах примеси. Расчеты проведены с учетом распределения Максвелла. Оценки показывают, что возможный виртуальный уровень (~ 0,4 мэВ) в квазидвухмерных полупроводниках на порядок меньше чем в объемных (порядка мэВ), это указывает на то, что область температур соответствующих резонансному рассеянию электронов в квазидвухмерных полупроводниках менее 1К. 2D полуширина линии поглощения достигает максимума при 0,2 К. Зафиксирована температурная щель (0,2 ÷ 0,62) К в спектре поглощения, это указывает на то, что более совершенная теория уширения требует учета рассеяния электронов на приповерхностных акустических фононах, 2D ионах примеси и квантовых поправок.

Asymptotic formulas are received for dissipation of absorption curve of classical cyclotron resonance (CR) in the conditions of the resonance scattering of electrons on atomic impurities. The calculations were done with provision for Maxwell's distribution. The estimations show that possible virtual level (~ 0,4 meV) in quasi-two-dimensional semiconductors is significantly lower than in three-dimensional (of meV scale), which indicates that the range of temperatures corresponding to resonance scattering of electrons in quasi-two-dimensional semiconductors is less than 1 K. 2D middle-width of the dissipation absorption curve reaches its maximum at 0,2 K. The temperature slot of (0,2 ÷ 0,62) K was observed in the spectrum of absorption, which indicates that the more developed dissipation theory requires the account of scattering of electrons on surface acoustic phonons, 2D impurity ions and quantum adjustments to electron conductivity.

Ключевые слова: циклотронный резонанс, уширение, резонансное рассеяние, асимптотические формулы.

Keywords: cyclotron resonance, dissipation, resonance scattering, asymptotic formulas.

Введение

При очень низких ($T < 10$ К) температурах в полупроводниках часто реализуются условия, когда основным механизмом рассеяния свободных электронов (дырок) становится рассеяние на нейтральных атомах примеси. Мелкая примесь имеет целый спектр возбужденных S – состояний и если один отщепленный S – уровень примыкает к дну зоны проводимости E_C , то возможно резонансное рассеяние носителей тока [1]. В принципе это позволяет заменить атом мелкой примеси некоторым модельным потенциалом. Для объёмных полупроводников таким модельным потенциалом может быть сферическая прямоугольная потенциальная яма, для квазидвухмерных – круговая прямоугольная яма.

S -резонансный уровень, локализованный вблизи E_C , оказывает существенное влияние на процессы переноса энергии и заряда носителями при различных внешних условиях [2], например, при наличии слабого магнитного поля электронная проводимость невырожденного полупроводника достигает максимума ($T > 1$ К, $H \sim 200$ Э), причем слабое H – поле учитывается своеобразно – как приращение радиуса резонансного центра [3]. Подход, развитый в работе [3], в принципе позволяет исследовать влияние резонансного рассеяния носителей тока на электронные явления переноса и при условиях классического предела циклотронного резонанса (ЦР). Однако в работах [2; 3] S – ре-

зонансный уровень строго фиксирован и имеет статичный характер, что затрудняет зондирование резонансных глубин в условиях классического ЦР. Эта трудность устранена в работе [4], в которой получены формулы для полуширины кривой поглощения ЦР, причем они выражены через длину рассеяния и, следовательно, справедливы для произвольного потенциала примеси конечного радиуса действия. Формулы для времени релаксации также выражены через длины 2- и 3D рассеяния.

В невырожденных полупроводниках длина волны электрона $\lambda \sim 1/\sqrt{T}$ и при сверхнизких температурах существенны квантово-статистические поправки. В той области температур соответствующих резонансным глубинам примесного потенциала можно конечно ограничиться квазиклассическим рассмотрением, но и здесь следует учесть статистику. Дело в том, что время релаксации τ есть среднее время свободного пробега, т. е. время между двумя актами рассеяния. Оно определяется длиной свободного пробега и полной скоростью электрона, но не скоростью дрейфа в магнитном поле. Полная скорость зависит от E – кинетической энергии электрона. Тем самым $\tau = \tau(E)$. Эта зависимость усложняется в том случае, когда длина свободного пробега также зависит от E . Поэтому для нахождения $\delta\omega = |\omega - \omega_C|$ – уширения линии ЦР, как и множества других параметров, необходимо усреднять как

$\tau(E)$, так и $1/\tau(E)$, а также и другие величины с учетом функции распределения электронов по энергии. Однако в работе [4] время релаксации, а вслед за этим и полуширина линии поглощения

$\delta\omega = 1/\tau_{2d,3d}(E)$ лишь оцениваются харак-

терным параметром $\tilde{k} = \frac{\sqrt{2m^*k_B T}}{\hbar}$ (m^* – эффективная масса электрона). Такой подход на наш взгляд является не вполне корректным и требует проведения более детального расчета.

Как следует из классической статистики, нет необходимости, чтобы энергия электрона была близка к резонансному уровню модельного потенциала. Игнорирование этого факта может привести к неверным выводам. Вывод о том что $\delta\omega_{3d} \sim T^{-1/2}$ [4], сомнителен и требует тщательного анализа. Замена волнового числа тепловым параметром не позволяет учесть более быстрые и более медленные электроны, а ведь именно они формируют хвост распределения Максвелла в области очень низких и высоких температур. Представление о невзаимодействующих электронах также крайне упрощенное [4]. При таком подходе утрачивает сам смысл перераспределения энергии между степенями свободы при различных механизмах рассеяния носителей.

В предлагаемой работе производится расчет полуширины кривой поглощения при резонансном рассеянии электронов на 2- и 3D – примесях путем усреднения с максвелловским весом. Получаются точные аналитические (асимптотические) формулы для электропроводности 2- и 3D полупроводников. Формулы выражены через вариацию ΔU глубины ямы. Частота внешнего электрического поля весьма близка к циклотронной частоте, так что влияние нейтральных примесей, ионов примеси и акустических фононов сводится как правило к нарушению (размытию) спектра поглощения, т. е. как если бы не было заряженных и нейтральных примесей, фононов и т. д., то и не было бы уширения. Ясно, что в рамках вычислений, проводимых с использованием формулы Эргинсоа [5], нельзя получить формулу для уширения ($\tau = \text{const}$). Рассматривается область ультранизких температур, где существенны квантовые поправки.

Расчет асимптотики уширения линии циклотронного резонанса

Циклотронный резонанс имеет простой физический смысл. Электрон в \mathbf{H} – поле движется по окружности с циклотронной частотой ω_C . Если в плоскости этой окружности включить электрическое поле, причем изменять его направление так, чтобы оно совпадало с направлением движения электрона, то электрон все время будет забирать энергию от поля. В этом случае, как и при движении в постоянном \mathbf{E} – поле, электрон ускоряется до тех пор, пока не столкнется с атомом примеси. Поэтому в обоих случаях частота соударения электрона с атомом порядка $1/\tau$. Если $\omega \neq \omega_C$, т. е. оптимальные условия резонанса с полем не выполняются, про-

димость значительно ниже. При точном резонансе с полем проводимость достигает статического режима. Именно в этом режиме существенно влияние резонансного рассеяния носителей на электропроводность. Электроны, выбывшие из резонанса с \mathbf{E}_{res} – полем, уже резонируют на примесных атомах.

Рассмотрим 2- и 3D – полупроводник, находящийся в скрещенных однородном магнитном \mathbf{H} и резонансном электрическом поле

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) \exp(i\omega t).$$

Пусть невырожденный газ слабо взаимодействующих между собой электронов рассеивается на хаотически расположенных нейтральных центрах в условиях классического ЦР. Концентрацию примесей считаем малой, т. е. одновременное рассеяние носителей на двух и более центрах не учитываем, что соответствует обычному газовому приближению [6]. Амплитуды и сечения резонансного 2- и 3D – рассеяния медленного электрона ($kr \ll 1$) определяются стандартно [7, с. 638 – 639]:

$$f_{2d}^{m=0}(k) = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{1}{\ln\left(\frac{2i}{\gamma k a_{2d}}\right)},$$

$$\sigma_{2d}(k) = 2\pi \left| f_{2d}^{m=0}(k) \right|^2 = \frac{\pi^2}{k} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{2}{\gamma k a_{2d}}}, \tag{1}$$

$$f_{3d}^{l=0}(k) = -\frac{1}{ik + \frac{1}{a_{3d}}},$$

$$\sigma_{3d}(k) = 4\pi \left| f_{3d}^{l=0}(k) \right|^2 = \frac{4\pi}{k^2 + \left(1/a_{3d}\right)^2}. \tag{2}$$

Здесь $\gamma = e^C$, C – постоянная Эйлера,

$k = \sqrt{2m^*E}/\hbar$, a_{2d} и a_{3d} – длины двух- и трехмерного рассеяния. В области температур соответствующих резонансным глубинам: $a_{2d}^{\text{res}} = r_0 \times \exp\left(-\frac{2U_0}{\Delta U}\right)$, $a_{3d}^{\text{res}} = r_0 \frac{2U_0}{\Delta U}$

(это и есть размеры волновых функции резонансных уровней) [4], где r_0 – радиус 2- и 3D модельного потенциала примеси,

$$U_0 = U_{\text{min}} = \frac{\hbar^2}{2m^*r_0^2}; \quad \Delta U \Rightarrow = U - U_{\text{res}} -$$

расстройка потенциала от U_{res} , U – глубина сферической (или круговой) ямы. Если $\Delta U > 0$, рассеяние

происходит на резонансном уровне, при $\Delta U < 0$ – на виртуальном уровне.

Тогда на основе формул (1) и (2) для полуширины линии поглощения $\delta \omega \Rightarrow = |\omega - \omega_c| \ll \omega_c$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{3d} &= \left\langle \frac{1}{\tau_{3d}(k)} \right\rangle = \frac{n_i^{3d} \hbar}{m^*} \langle k \sigma_{3d}^{tr}(k) \rangle = \frac{n_i^{3d} \hbar}{m^*} \left\langle \frac{4\pi \sqrt{2m^*E}}{\hbar} \right\rangle_E \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\varepsilon_{3d} = \frac{(\Delta U)^2}{4U_0} \right] = \frac{2\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{(m^*)^{3/2}} \left\langle \frac{\sqrt{E}}{E + \varepsilon_{3d}} \right\rangle \Rightarrow \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{(m^*)^{3/2}} \frac{\int_0^\infty \frac{E^2}{E + \varepsilon_{3d}} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE}{\int_0^\infty E \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \sqrt{E} dE} = \frac{2\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{(m^*)^{3/2}} \frac{4}{3\sqrt{\pi} \sqrt{k_B T}} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{x^2 \exp(-x)}{x + \varepsilon_0} dx = \frac{8\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{3(m^*)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{k_B T}} [1 - \varepsilon_0 L(\varepsilon_0)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n_i^{3d} – концентрация атомов примеси, обычно $n_i^{3d} \approx 2 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{3d} / k_B T$,

k_B – константа Больцмана.

$$L(\varepsilon_0) = 1 - \varepsilon_0 \exp(\varepsilon_0) [-\text{Ei}(-\varepsilon_0)],$$

$$\text{Ei}(-\varepsilon_0) = - \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{x} dx.$$

Пользуясь разложением в ряд и асимптотическим выражением для $\text{Ei}(-\varepsilon_0)$ можно показать, что [1]

$$L(\varepsilon_0) \approx 1/\varepsilon_0 - 2/\varepsilon_0^2 + \dots \quad (\varepsilon_0 \gg 1), \quad (4)$$

$$L(\varepsilon_0) \approx 1 + \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0 + \dots \quad (\varepsilon_0 \ll 1). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в точную формулу (3) получаем предельные формулы:

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow 0}^{3d} &\approx \\ &\approx \frac{8\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{3(m^*)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{k_B T}} \frac{2k_B T}{\varepsilon_{3d}} \sim \sqrt{T}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow 0}^{3d} \sim (\Delta U)^{-2}, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{3d} &\approx \\ &\approx \frac{8\sqrt{2}\pi \hbar^2 n_i^{3d}}{3(m^*)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{k_B T}} \sim 1/\sqrt{T}. \end{aligned} \quad (7)$$

Как и следовало ожидать в области «высоких температур» ($\varepsilon_0 \ll 1$), влияние резонансных центров на уширение кривой поглощения ЦР исчезающе мало.

Следует отметить, что под «высокими температурами» мы здесь понимаем область выше области температур соответствующих резонансным глубинам. Таким образом, профиль полуширины линии поглощения: $\langle \delta \omega \rangle_{T \rightarrow 0} \sim T^{1/2}$. Эту асимптотику можно

интерпретировать так: кривая поглощения резонансно уширяется за счет слишком «быстрых» или слишком «медленных» электронов из-за распределения Максвелла. Из (6) следует, что окрестность абсолютного нуля идеально соответствует ЦР. Именно из-за распределения Максвелла и учета слабого взаимодействия между электронами не происходит разогрева электронов. Они успевают резонировать, т. е. выбывать из резонанса только путем рассеяния друг на друге, до нарушения закона Ома. Ясно, что в промежулке между двумя ветвями:

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow 0}^{3d} \sim \sqrt{T} \text{ и}$$

$\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{3d} \sim 1/\sqrt{T}$ где-то должен быть максимум, в противном случае мы просто не получим кривую, характерную для ЦР (рис. 1). В области температур $T \geq 100 \text{ К}$ начинает также давать вклад рассеяние на акустических фононах $\langle \delta \omega \rangle_{AL} \sim T^{3/2}$

[1], также начиная с $T \geq 30 \text{ К}$ необходим учет рассеяния на ионах примеси, так что полное уширение:

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{3d} &= \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_i} \right\rangle_E = \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_i(E)} \right\rangle = \frac{1}{\tau_N} + \\ &+ \frac{1}{\tau_{AL}} + \frac{1}{\tau_I} + \dots \end{aligned}$$

Здесь следует уточнить, что подразумевается под слагаемыми: первый член соответствует уширению за счет остатка резонансного рассеяния на нейтральных

примесях (асимптотика (7)), второй – за счет рассеяния на акустических фононах, третий обусловлен ионами примеси. При очень низких температурах достаточно ограничиться (в нашем случае) резонансным рассеянием электронов.

Учет акустических фононов (в рамках модели деформационного потенциала) вблизи абсолютного нуля не имеет смысла, так как формула для длины свободного пробега $l_{AL} = A/k_B T$ [1] при температурах близких к абсолютному нулю неприменима. Соответствующий расчет [6] дает для $\langle \delta \omega(k) \rangle_I$ две ветви:

$\sim T^{-3/2}$ и $T^{1/2}$ (рис. 1) – откуда доопределяется асимптотика (7):

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{3d} \sim c_1 T^{-1/2} + c_2 T^{3/2} + c_3 T^{-3/2}, \quad (7a)$$

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{3d} \sim c_1 T^{-1/2} + c_2 T^{3/2} + c_3 T^{1/2}. \quad (7b)$$

Оценки показывают, что 3D уширение линии можно наблюдать в ИК диапазоне частот (субмиллиметровый диапазон, $T_{\max} \approx 6$ К).

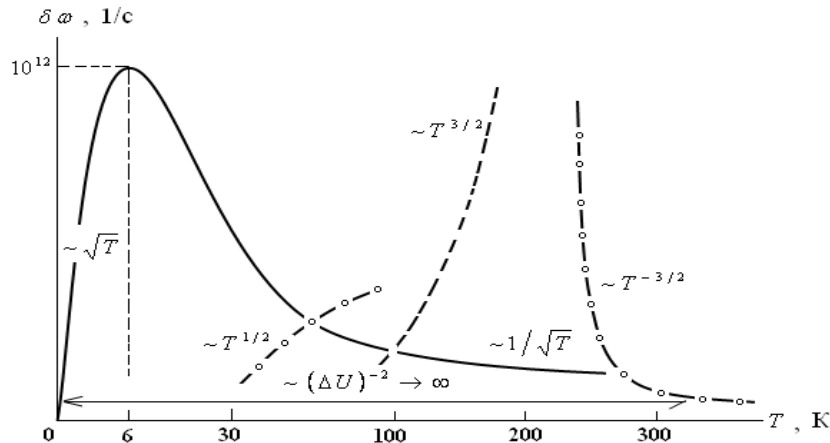


Рис. 1. Температурный ход полуширины линии поглощения ЦР при различных механизмах рассеяния. Сплошной кривой соответствует резонансное рассеяние на нейтральных примесях, штрихам и кружочкам соответственно рассеяние на тепловых колебаниях решетки и на ионах примеси

В двумерном случае (q2D)

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{2d} &= \left\langle \frac{1}{\tau_{2d}(k)} \right\rangle = \frac{n_i^{2d} \hbar}{m^*} \langle k \sigma_{2d}^{tr}(k) \rangle = \frac{n_i^{2d} \hbar}{m^*} \left\langle k \frac{\pi^2}{k} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{2}{\gamma k a_{2d}}} \right\rangle_E \Rightarrow \\ &= \frac{n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \left\langle \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{2}{\gamma k a_{2d}}} \right\rangle = \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \frac{1}{(k_B T)^2} \int_0^\infty \frac{E \exp(-E/k_B T) dE}{\pi^2 + \ln^2(\gamma^2 m^* a_{2d}^{\text{res}2} E / 2 \hbar^2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\varepsilon_{2d} = \frac{2 \hbar^2 \exp(4U_0/\Delta U)}{\gamma^2 m^* r_0^2} \right] = \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \frac{1}{(k_B T)^2} \int_0^\infty \frac{E \exp(-E/k_B T) dE}{\pi^2 + \ln^2(E/\varepsilon_{2d})}. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь E – энергия движения в плоскости (ρ, φ) , n_i^{2d} – поверхностная концентрация примесей, обычно $n_i^{2d} \approx 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-2}$. В формуле (8) под ε_{2d} подразумевается эффективный виртуальный и/или резонансный уровень в зависимости от знака расстройки потенциала. Интеграл в (8) выражается через специальные функции [8, с. 588]:

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{2d} &= \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \left(\frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right) - \nu // \left(\frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{где } \nu(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{\mu^x dx}{\Gamma(x+1)}.$$

Исследуем наиболее крайний и интересный случай – уширение в окрестности абсолютного нуля. Для этого выделим в $\nu''(\mu)$ асимптотическую экспоненту:

$$\begin{aligned} \nu''(\mu) &= \int_0^{\infty} \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)} = \int_1^{\infty} \frac{\mu^{x-1} dx}{\Gamma(x)} + \\ &+ \int_0^2 \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)} \sim \exp(\mu) + \int_0^2 \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)}, \\ (\mu &= \frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T}; \mu \rightarrow \infty), [9, \text{с. 117}]. \end{aligned}$$

Тогда разность (с учетом множителя μ^2) в формуле (9) равна:

$$\int_0^2 \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x-1)}, \text{ тогда}$$

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{2d} \sim \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \int_0^2 \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x-1)}.$$

Оценку последнего интеграла нетрудно найти, предварительно сведя его к виду $\mu \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x)}$.

Вблизи точки $x = +0$ $\Gamma(x) \sim 1/x$,

$$\left| \frac{1}{\Gamma(x)} \right| \leq 1,$$

тогда

$$\mu \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x)} \sim \left(\frac{\mu}{\ln \mu} \right)^2 (1 - \ln \mu) \sim - \frac{\mu^2}{\ln \mu}$$

(см. приложение 1). Таким образом, асимптотика (оценка) основного уширения:

$$\begin{aligned} \delta \omega_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow 0}^{2d} \sim \\ &\sim \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \left(\frac{\varepsilon_{2d}/k_B T}{\ln(\varepsilon_{2d}/k_B T)} \right)^2 \left(1 - \ln \frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T} \right) \Rightarrow \\ &\sim \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar}{m^*} \frac{(\varepsilon_{2d}/k_B T)^2}{\ln(k_B T / \varepsilon_{2d})}. \end{aligned} \quad (10)$$

Асимптотика (10) требует корректировки: учитывая, что $\varepsilon_{2d} = \frac{2 \hbar^2 \exp(4U_0/\Delta U)}{\gamma^2 m^* r_0^2}$, нетрудно понять, что при $\Delta U > 0$ формула (10) будет при

$\Delta U \rightarrow +0$ нарастающей асимптотой, другими словами профиль кривой поглощения при ультранизких температурах за счет рассеяния на резонансном уровне не имеет максимума и монотонно возрастает (или убывает).

Ситуация резко меняется при $\Delta U \rightarrow -0$; под-

$$\text{ставив } \varepsilon_{2d} = \frac{2}{m^*} \left(\frac{\hbar}{r_0 \gamma} \right)^2 \exp(-4U_0/\Delta U)$$

[7, с. 201] в формулу (10), приводим его к виду:

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow 0}^{2d} &\sim \\ &\sim \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \left(\frac{2\pi}{\gamma} \right)^2 \frac{U_0 \Delta U}{(k_B T)^2} e^{-8U_0/\Delta U} \sim T^{-2}, \\ (T &\geq 0,62 \text{ К}). \end{aligned} \quad (10a)$$

Аналогично для высокотемпературной асимптотики уширения (см. приложение 2):

$$\begin{aligned} \langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{2d} &\sim - \frac{4 n_i^{2d} \pi^2 \hbar \ln \mu + 1}{m^* \ln^2 \mu} \sim \\ &\sim \frac{4 n_i^{2d} \hbar \pi^2}{m^* \ln \mu} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sim \frac{4 n_i^{2d} \hbar \pi^2}{m^* \ln(4U_0/\gamma^2 k_B T) + 4U_0/\Delta U}; \quad (11)$$

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow \infty}^{2d} \sim \Delta U \rightarrow +0,$$

$$\mu = \frac{\varepsilon_{2d}}{k_B T}, \quad (\mu \ll 1). \quad (11a)$$

Если формально выделить из (11) $\frac{1}{\ln^2 \mu}$, то при-

ходим к оценке из работы [4]:

$$\langle \delta \omega(k) \rangle_{2d} \sim \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \left(\frac{\pi}{\ln \mu} \right)^2. \quad (11b)$$

Из асимптотики (11b) следует ограничение на высоту пика уширения:

$$\langle \delta \omega \rangle_{2d}^{\text{нп}} = \frac{4 n_i^{2d} \hbar}{m^*} \Rightarrow \approx 10^{14} \text{ с}^{-1} \text{ (рис. 2)}$$

(видимый диапазон), соответственно чему предельное уширение налагает снизу ограничение на величину возможного виртуального уровня:

$$\varepsilon_{2d}^{\text{vir}} / k_B T \geq \exp(\pi) = 23,14. \quad (12)$$

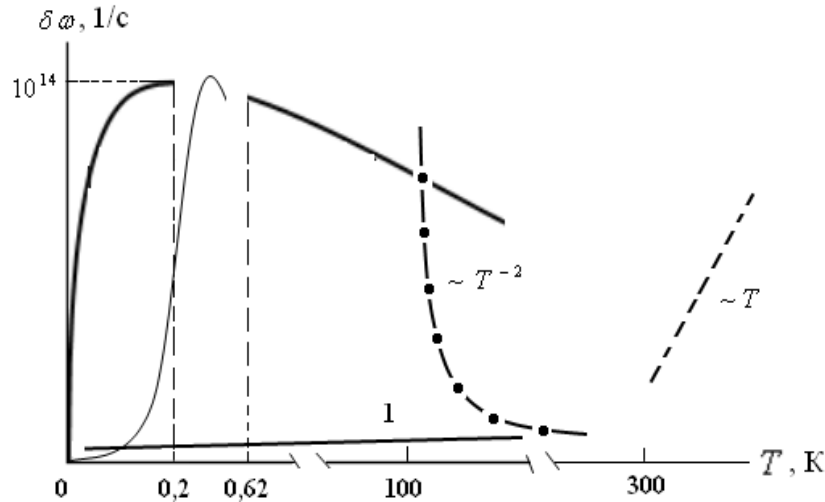


Рис. 2. Температурный ход полуширины линии поглощения ЦР при различных механизмах рассеяния. Сплошной линии соответствует резонансное рассеяние на нейтральных примесях [4], точкам и штрихам соответственно рассеяние на ионах примеси и тепловым колебаниям 2D решетки. Температурная щель (0,2 ÷ 0,62) К – область доминирования поправки (12а)

На основании вышеизложенного целесообразно сделать одно важное замечание: оценка уширения, данная в [4], относится, как теперь выяснилось, к высокотемпературной области; при низких, а тем более ультранизких температурах, надо использовать асимптотику (10а). Ограничение на частотный спектр позволяет при определенном виртуальном уровне ϵ_{2d} определить верхний температурный предел (12), а для определения ϵ_{2d} можно, например, применить методику, развитую в работе [2].

Вблизи абсолютного нуля следует учесть квантовые поправки: переходы с нулевого уровня Ландау на возбужденные уровни приводят к уширению (для короткодействующих потенциалов)

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\hbar \omega_c}{\langle \tau \rangle} - \text{гауссова полуширина}$$

(коэффициент затухания), где $\langle \tau \rangle$ – время релаксации при $\mathbf{H} = 0$,

$$\delta \omega_1 \sim \frac{\Gamma}{\hbar} = \sqrt{\frac{2\omega_c}{\langle \tau \rangle}} \sim \sqrt{2\omega_c \delta \omega_0} \sim \frac{1}{(k_B T / \epsilon_{2d}) \sqrt{\ln(k_B T / \epsilon_{2d})}}. \quad (12a)$$

Оценка (12а) показывает, что контур уширения типа гауссового (рис. 2) и диффузионное приближение в общем случае здесь не применимо (см. примечание).

Электропроводность и подвижность

На основе формулы (2) получается формула для объемной электронной проводимости в виде:

$$\sigma_{3d} = \frac{4 e^2 n_e \sqrt{m^*}}{3 \sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^2 n_i^{3d}} \frac{(\epsilon_{3d} + 2 k_B T)}{\sqrt{k_B T}}, \quad (\mu = \sigma / en). \quad (13)$$

Соответственно асимптотики:

$$\sigma_{T \rightarrow 0}^{3d} \approx \frac{4 e^2 n_e \sqrt{m^*}}{3 \sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^2 n_i^{3d}} \frac{\epsilon_{3d}}{\sqrt{k_B T}} \sim T^{-1/2}, \quad (13a)$$

$$\sigma_{T \rightarrow \infty}^{3d} \approx \frac{8 e^2 n_e \sqrt{m^*}}{3 \sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^2 n_i^{3d}} \sqrt{k_B T} \sim T^{1/2}. \quad (13b)$$

Температурная зависимость

$$u = \frac{4 e \sqrt{m^*}}{3 \sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^2 n_i^{3d}} \frac{(\epsilon_{3d} + 2 k_B T)}{\sqrt{k_B T}} \quad (13)$$

имеет минимум при $T = \epsilon_{3d} / 2 k_B$. Её значение в этом случае определяется формулой:

$$u_{\min} = \frac{8 e \sqrt{k_B m^*}}{3 \pi^{3/2} \hbar^2 n_i^{3d}} \sqrt{\epsilon_{3d}}. \quad (14)$$

С учетом того, что $\epsilon_{3d} = \frac{(\Delta U)^2}{4 U_0}$, получим

$u_{\min} \sim |\Delta U|$. Оценим $\Delta U = U - U_{\text{res}}$, где U глубина мелкого донора ($U \sim 10$ мэВ), постоянная U_0 порядка 2 мэВ ($r_0 \sim 40 \text{ \AA}$ для мелкой примеси в Ge [6]), резонансный уровень ϵ_{3d} порядка мэВ [1; 2], тогда $\Delta U = \pm \sqrt{\epsilon_{3d} U_0} \approx \pm 1,414$ мэВ. Это качественно согласуется с общей картиной континуума

резонансных глубин, а именно расстройка потенциала на порядок и два меньше глубины потенциала мелко-

го донора: $\Delta U \approx \pm 0,5 U_0$ [4].

В квазидвумерной ситуации $\sigma_{2d} = e^2 n_e \frac{\langle \tau_{2d} \rangle}{m^*}$, ($n_e \ll 10^{12} \text{ см}^{-3}$) [10, с. 40]

$$\begin{aligned} \langle \tau_{2d} \rangle &= \frac{m^*}{n_i^{2d} \hbar} \left\langle \frac{(\pi/2)^2 + \ln^2 \left(2/\gamma a_{2d} \sqrt{2m^* E} \right)}{\pi^2} \right\rangle_E = \frac{m^*}{4 n_i^{2d} \hbar (k_B T)^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \ln^2 \left(\frac{\gamma^2 m^* E a_{2d}^2}{2 \hbar^2} \right) \right] \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) E dE \Rightarrow \\ &= \frac{m^*}{4 n_i^{2d} \hbar} \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \left(\ln^2 \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}} + 2(1-\gamma) \ln \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}} + (1-\gamma)^2 - \frac{\pi^2 - 6}{6} \right) \right], \\ \mu_{2d} &= \frac{e}{4 n_i^{2d} \hbar} \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \left(\ln \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}} + (1-\gamma) \right)^2 - \frac{\pi^2 - 6}{6 \pi^2} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{при } T \rightarrow 0 \quad u_{2d} \sim u_0 \ln^2 \frac{k_B T}{\varepsilon_{2d}}, \quad u_{2d} \sim (\Delta U)^{-2}. \quad (16)$$

Температурная зависимость подвижности (15) имеет суперслабый минимум при:

$$T_{\min} = \frac{\varepsilon_{2d} \exp[-(1-\gamma)]}{k_B} \approx \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{2d}}{k_B},$$

$$u_{\min} = \frac{e}{4 n_i^{2d} \hbar} \frac{5\pi^2 + 6}{6\pi^2} = 5,33 \times 10^3 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}. \quad (17)$$

В отличие от объемного случая (14), минимум u_{2d} не зависит от резонансного уровня а, следовательно, и от расстройки потенциала. Это дает возможность манипулировать знаком в экспонен-

те $\frac{2 \hbar^2 \exp(\pm 4 U_0 / |\Delta U|)}{\gamma^2 m^* r_0^2}$, выбор знака в пока-

зателе связан с выбором одного корня из двух $\pm \sqrt{\varepsilon_{3d} U_0}$, при рассеянии на виртуальном уровне следует выбрать знак минус:

$$\varepsilon_{2d} \sim -U_0 \exp(-4 U_0 / |\Delta U|).$$

Оценим порядок ε_{2d} , с учетом того, что

$$U_0 \approx 2 \text{ мэВ}, \quad \Delta U \approx 1, \quad 414 \quad \text{ мэВ},$$

$$\left(\frac{2}{\gamma} \right)^2 U_0 \approx 24 \text{ мэВ}, \text{ имеем } \varepsilon_{2d} \approx 0,4 \text{ мэВ}, \text{ т. е. на}$$

порядок ниже, чем в объемном образце. Из (17) определяем $T_{\min} \approx 0,7 \text{ К}$ (рис. 3).

Минимум (максимум) температуры не удовлетворяют условию (12). Однако это и не требуется, так как ограничение (12) при определенном виртуальном уровне ($\varepsilon_{2d} \approx 0,4 \text{ мэВ}$) дает верхний температурный предел $T \leq 0,2 \text{ К}$ (рис. 2).

Как видно, подвижность квазидвухмерного невырожденного электронного газа в области (0,01÷1) К весьма слабо зависит от температуры, напротив, в окрестности абсолютного нуля имеет место резко выраженный рост (16). Следует иметь в виду, что, начиная с 30К (на фоне резонансного рассеяния), могут давать вклад и ионы примеси, при более высоких температурах в процесс рассеяния электронов вовлекутся и приповерхностные акустические фононы вплоть до комнатных температур [10, с. 58].

Как было показано (12а), диффузионное приближение не приемлемо, и в рамках этого приближения нельзя рассчитать квантовые поправки к проводимости 2D невырожденного электронного газа. При определенных условиях квантовые поправки можно учесть методом квантовой интерференции. В 3D случае соответствующий расчет приводит к формуле:

$$\sigma(H) = \sigma(0) \left[1 - \frac{\hbar \omega_C}{2 k_B T} \ln \left(2 \sqrt{2} \pi \gamma \frac{\hbar \omega_C}{k_B T} \right) \right],$$

($\gamma = e^C$).

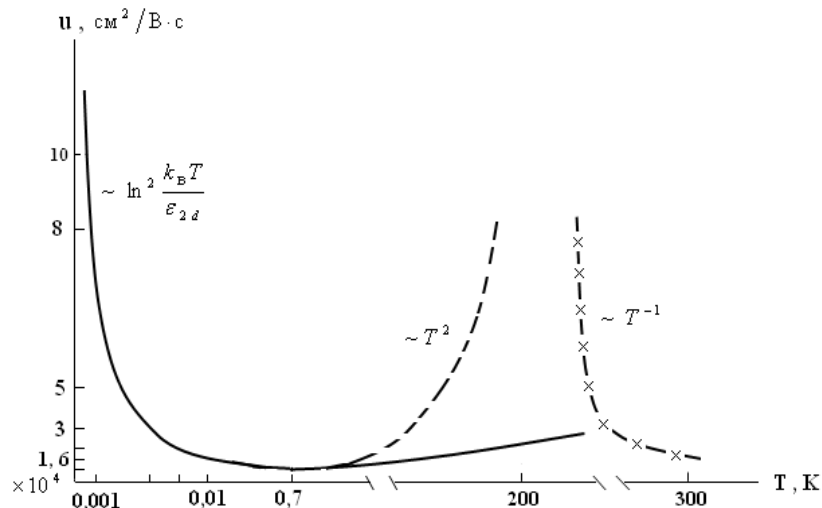


Рис. 3. Температурная зависимость 2D подвижности. Сплошной линией указана теоретическая зависимость (15). Штрихам соответствует рассеяние на ионах примеси, крестикам – рассеяние на акустических фононах [10]

Заключение

В объемных образцах при очень низких температурах вдали от области температур соответствующих резонансному рассеянию электронов (левое крыло) кривая поглощения резонансно уширяется $\sim \sqrt{T}$, а при «высоких температурах» (правое крыло) $\sim 1/\sqrt{T}$. В окрестности абсолютного нуля 2D подвижность резонансно возрастает $\sim \ln^2 \frac{k_B T}{\epsilon_{2d}}$.

Ограничение на профиль уширения указывают на то, что асимптотика (10) работает до предела $T \geq 0,62$ К и далее не проникает вглубь окрестности абсолютного нуля. В этом отношении оценка (11а) более плавна и начинает проявляться с $T < 0,2$ К. Оптимальная область температур преобладания резонансного рассеяния 2D электронов (0,62 ÷ 1) К. Применение статистики приводит к существованию температурной щели (0,2 ÷ 0,62) К в спектре поглощения (рис. 2), проявление которой, по-видимому, связано с квантовыми эффектами перехода.

Асимптотика (10а) сильно ограничивает окрестность абсолютного нуля, однако, по-видимому, до этого $\langle \delta \omega(k) \rangle_{T \rightarrow 0}^{2d} \rightarrow 0$ из-за $\exp(-8 U_0 / \Delta U)$.

При высоких температурах уширение слабо зависит от температуры (11).

Приложение 1

Применяя формулу $\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, где d_n – коэффициенты степенного ряда, выражаемые через ζ – функцию Римана [8, с. 950]; можно показать, что

$$\mu \times \int_{-1}^{+1} \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x)} = -\frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln \mu}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n I_{n+3/2}(\ln \mu)$$

(I_n – функция Бесселя мнимого аргумента), а при

Примечания при корректуре

В условиях применимости классической статистики невырожденные носители заряда расположены на нулевом уровне Ландау. Если на нулевом уровне Ландау есть «свободные места», то рассеяние электронов возможно в пределах данного уровня, без существенного изменения энергии электрона. Если уровень заполнен полностью, то возможны переходы на $n > 1$ – уровни. Вероятность таких переходов при очень низких температурах обычно весьма мала: $\sim \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)$, где ΔE – расстояние между уровнями Ландау. Энергия электрического поля предполагается недостаточной для перехода электронов с нулевого уровня Ландау на первый уровень. Параметр $\Gamma \approx 5$ мэВ, ($\epsilon_{2d} \approx 0,4$ мэВ) на порядок выше возможного двухмерного резонансного уровня, так что приближение двухмерного S – рассеяния здесь вполне приемлемо. Необходимо также отметить, что в основное уширение (10) кроме поправки (12а) могут в принципе давать вклады эффекты вырывания S – электрона ($m = 0$) резонансным электрическим полем из потенциальной ямы короткодействующих сил:

$$\delta \omega_2 \sim \exp\left(-\frac{2 \epsilon_{2d}}{\hbar \omega_c}\right).$$

$$\mu \gg 1 \quad I_{n+3/2}(\ln \mu) \sim \frac{\exp(\ln \mu)}{\sqrt{2\pi \ln \mu}} = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi \ln \mu}},$$

$$\text{т. е. } \mu \int_{-1}^{+1} \frac{(-\mu^x) dx}{\Gamma(x)} \Rightarrow$$

$$\sim -\frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln \mu}} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi \ln \mu}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sim \frac{-\mu^2}{\ln \mu}.$$

Приложение 2

$$\mu^2 [\exp(\mu) - \nu''(\mu)] = \mu^2 \exp(\mu) - \mu^2 \int_0^{\infty} \frac{\mu^{x-2} dx}{\Gamma(x-1)} = \mu^2 \exp(\mu) - \int_0^{\infty} \frac{\mu^x dx}{\Gamma(x-1)} \Rightarrow$$

$$= \mu^2 \exp(\mu) - \int_{-1}^{\infty} \frac{\mu^{x+1}}{\Gamma(x)} dx = \mu^2 \exp(\mu) - \mu \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{\mu^x}{\Gamma(x)} dx + \int_{-1}^0 \frac{\mu^x}{\Gamma(x)} dx \right)_{(\mu \ll 1)} \Rightarrow$$

$$\stackrel{[9, \text{с. 117}]}{\sim} \mu^2 \exp(\mu) - \mu \cdot \left[\frac{\text{Rg}'(0)}{\ln^2 \mu} + \int_{-1}^0 x \exp(x \ln \mu) dx \right] = \mu^2 \exp(\mu) - \frac{\ln \mu + 1}{\ln^2 \mu},$$

где $\text{Rg}(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$, $\text{Rg}'(0) = - \left. \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma^2(x)} \right|_{x \rightarrow 0} \sim - \frac{(1/x)'}{(1/x)^2} = 1$, с учетом того что

$$\mu^2 \exp(\mu) \sim 0 \text{ при } \mu \rightarrow 0 \text{ имеем } \mu^2 \exp(\mu) - \frac{\ln \mu + 1}{\ln^2 \mu} \sim \frac{1}{\ln \mu}, \quad (\ln \mu > 0).$$

Литература

1. Ансельм А. И. Влияние резонансного рассеяния носителей тока на центрах примесей на электрические свойства атомных полупроводников // ЖЭТФ. 1953. Т. 24. Вып. 1. С. 83 – 89.
2. Имамов Э. З., Колчанова Н. М., Крещук Л. Н., Ясиевич И. Н. // ФТТ. 1985. Т. 27. Вып. 1. С. 69 – 76.
3. Муратов Т. Т. Формализм «магнетосечений» D –(A +)-центров при резонансном рассеянии носителей заряда в невырожденных полупроводниках // Вестник НГУ. 2013. Вып. 3. Т. 8. С. 142 – 158. (Серия: Физика).
4. Андреев С. П., Павлова Т. В., Небогатов В. А. Уширение кривой классического циклотронного резонанса нейтральными примесями в двух- и трехмерных полупроводниках // Труды научной сессии НИЯУ МИФИ. 2010. Т. 3: Современные проблемы физики конденсированного состояния. С. 89 – 92.
5. Erginsoy C. Neutral Impurity Scattering in Semiconductors // Phys. Rev. 1950. Vol. 79. P. 1013 – 1014.
6. Блатт Ф. Физика электронной проводимости в твердых телах. М.: Мир, 1971. 470 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика: нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 767 с.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
10. Неверов В. Н., Титов А. Н. Физика низкоразмерных систем. Екатеринбург, 2008. 232 с.

Информация об авторе:

Муратов Темур Ташкабаевич – старший преподаватель кафедры методики преподавания физики Ташкентского государственного педагогического университета им. Низами, temur-muratov@yandex.ru, tgpu_info@edu.uz.

Temur T. Muratov – Senior Lecturer at the Department of Methodology of Teaching Physics, Nizami Tashkent State Pedagogical University.

Статья поступила в редколлегию 22.05.2014 г.