E-Jurnal Matematika Vol. 2, No.2, Mei 2013, 42-48 ISSN: 2303-1751

DIMENSI METRIK GRAPH LOBSTER $L_n(q;r)$

PANDE GDE DONY GUMILAR[1], LUH PUTU IDA HARINI[2], KARTIKA SARI[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, Bukit Jimbaran-Bali
e-mail: [1] pande.dony@gmail.com , [2] ballidah@gmail.com, [3]sari_kaartika@yahoo.co.id

Abstract

The metric dimension of connected graph G is the cardinality of minimum resolving set in graph G. In this research, we study how to find the metric dimension of lobster graph $L_n(q;r)$. Lobster graph $L_n(q;r)$ is a regular lobster graph with n vertices backbone on the main path, every backbone vertex is connected to q hand vertices and every hand vertex is connected to r finger vertices, with $n,q,r \in N, n \geq 2$. We obtain the metric dimension of lobster graph $L_2(1;1)$ is 1, the metric dimension of lobster graph $L_n(1;1)$ for $n > 2$ is 2, the metric dimension of lobster graph $L_n(q;1)$ for $n \geq 2$ and $q \geq 2$ is $n(q-1)$ and the metric dimension of lobster graph $L_n(q;r)$ for $n \geq 2, q \geq 1$ and $r \geq 2$ is $nq(r-1)$.

***Keywords**: lobster graph, metric dimension, resolving set.*

1. Pendahuluan

Graph adalah pemodelan matematika dalam bentuk geometri yang diwakili oleh diagram *vertex* dan *edge* sedangkan teori graph merupakan pemikiran matematis yang mengkaji sifat dan struktur graph. Beberapa penelitian yang menggunakan konsep graph yaitu navigasi robot [5], permasalahan berat koin [6], penemuan jaringan dan verifikasi [1], dan *mastermind of the game* [2]. Konsep graph yang digunakan pada penelitian-penelitian tersebut adalah dimensi metrik dari suatu graph terhubung.

Diberikan suatu graph terhubung *G*, misalkan *u* dan *v* adalah *vertex-vertex* dalam graph terhubung *G*, panjang lintasan terpendek dari *u* ke *v* pada *G* dinotasikan $d(u,v)$. Jika $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ suatu himpunan terurut dari *vertex-vertex* dalam graph terhubung *G* dan *vertex* v di $V(G)$ maka representasi jarak dari *vertex v* terhadap *W* adalah

$$r(v|W) = \big(d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_k)\big).$$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari *G*. Himpunan pemisah dengan kardinalitas (banyak anggota) minimum disebut himpunan pemisah minimum atau basis metrik. Kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari *G*, yang

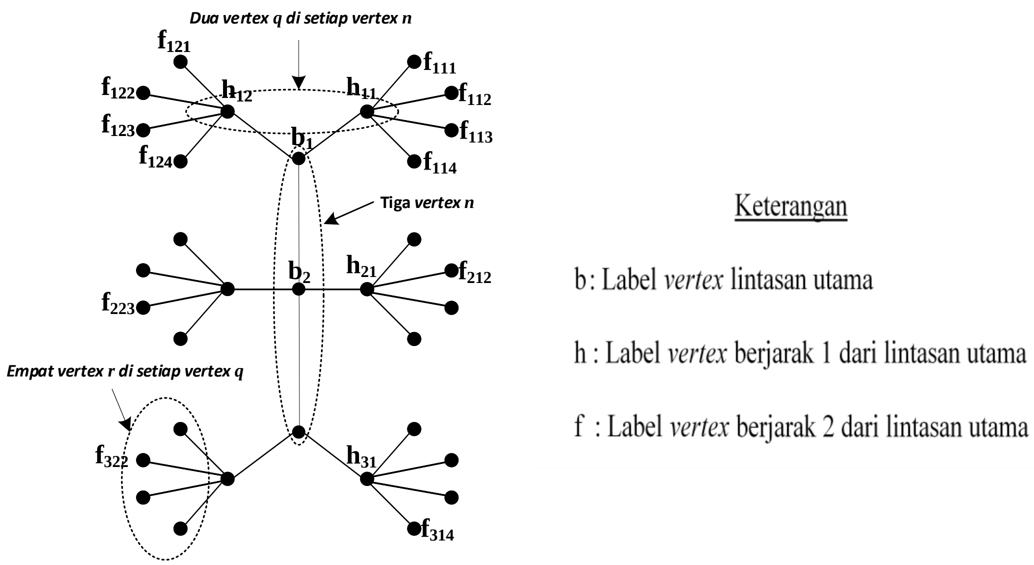
[1] Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana
[2,3] Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana

dinotasikan dim(G) [3]. Dengan demikian, dimensi metrik pada graph G adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah dari G.

Terdapat banyak jenis graph. Salah satu jenis graph yang jarang dibahas adalah graph lobster. Graph lobster adalah graph pohon yang setiap *vertex*nya memiliki jarak paling banyak *t* dari lintasan utama, dengan *t* adalah suatu bilangan bulat positif [4]. Pada penelitian ini ditentukan dimensi metrik graph lobster teratur dengan $t = 2$.

1.1 Graph Lobster

Graph lobster $L_n(q;r)$ merupakan graph lobster teratur yang memiliki n *vertex backbone* pada lintasan utama, setiap *vertex backbone* dihubungkan dengan q *vertex hand* dan setiap *vertex hand* dihubungkan dengan r *vertex finger*, dengan $n, q, r \in N,\ n \geq 2$. Contohnya, diberikan suatu graph lobster $L_n(q;r)$ dengan $n = 3, q = 2$ dan $r = 4$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Pelabelan graph lobster $L_n(q;r)$

Dalam tulisan ini pelabelan *vertex-vertex* dalam graph lobster dijelaskan sebagai berikut. *Vertex* b_i merupakan *vertex backbone* ke-*i*. *Vertex* h_{ij} merupakan *vertex hand* ke-j yang terhubung dengan *vertex* b_i. *Vertex* f_{ijk} merupakan *vertex finger* ke-*k* yang terhubung dengan *vertex* b_i dan *vertex hand* ke-j.

2. Metode Penelitian

Langkah awal dalam penelitian ini adalah mempelajari teori graph, graph lobster dan dimensi metrik. Langkah selanjutnya yang dilakukan adalah eksplorasi bentuk-bentuk dari graph lobster $L_n(q;r)$ dengan cara menentukan himpunan pemisahnya dengan memasukkan nilai *n, q* dan *r* tertentu. Lebih lanjut lagi, berdasarkan hasil eksplorasi akan dilakukan studi kasus dimensi metrik graph lobster $L_n(q;r)$. Kemudian ditarik kesimpulan dari hasil analisis tersebut.

3. Hasil dan Pembahasan

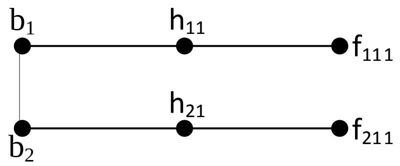
Terlebih dahulu untuk memudahkan menentukan dimensi metrik tersebut diberikan lemma berikut.

Lemma 3.1 *Diberikan graph terhubung G dan* $v_i \in V(G)$ *dengan* $i = 1,2,3,\dots,n$. *Graph G berdimensi metrik satu jika dan hanya jika graph G merupakan graph lintasan.*

Lemma 3.2 *Diberikan graph G dan himpunan vertx-vertex* W *dengan* $W \subseteq V(G)$. *Jika* $w \in W$ *maka* w *memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap* W.

3.1 Dimensi Metrik Graph Lobster $L_2(1;1)$

Gambar 3.1 merupakan gambar graph lobster $L_2(1;1)$.



Gambar 2. Graph lobster $L_2(1;1)$

Perhatikan Gambar 2. Tampak bahwa graph lobster tersebut merupakan graph lintasan. Berdasarkan Lemma 3.1 diperoleh dimensi metrik graph lobster $L_2(1;1)$ adalah satu. Berdasarkan hasil ini diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.3 *Diberikan graph lobster* $L_n(q;r)$. *Jika* $n = 2$, $q = 1$ *dan* $r = 1$ *maka* $dim\big(L_n(q;r)\big) = 1$.

3.2 Dimensi Metrik Graph Lobster $L_n(1;1)$ untuk $n > 2$

Berikut ini diberikan lemma yang menyangkut himpunan pemisah pada graph lobster $L_n(1;1)$ untuk $n > 2$.

Lemma 3.4 *Diberikan graph lobster* $L_n(q;r)$. *Jika* $n > 2$, $q = 1$ *dan* $r = 1$ *maka vertex backbone ke-1 dan vertex finger ke-n merupakan himpunan pemisah.*

Bukti :

Diambil himpunan $W = \{b_1, f_{n11}\}$ pada graph lobster $L_n(1;1)$ diperoleh bahwa setiap *vertex* yang bukan himpunan W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W, sedangkan berdasarkan Lemma 3.2 setiap *vertex* pada himpunan W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W, sehingga himpunan W merupakan himpunan pemisah.

Berdasarkan Lemma 3.4 diperoleh teorema yang menyangkut dimensi metrik pada graph lobster $L_n(1;1)$ untuk $n > 2$.

Teorema 3.5 *Diberikan graph lobster* $L_n(q;r)$. *Jika* $n > 2$, $q = 1$ *dan* $r = 1$ *maka* $dim\big(L_n(q;r)\big) = 2$.

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.1 dan Lemma 3.4 diperoleh $\dim\big(L_n(1;1)\big) = 2$ untuk $n > 2$.

3.3 Dimensi Metrik Graph Lobster $L_n(q;1)$ untuk $n \geq 2$ dan $q \geq 2$

Berikut ini diberikan lemma-lemma yang menyangkut himpunan pemisah pada graph lobster $L_n(q;1)$ untuk $n \geq 2$ dan $q \geq 2$.

Lemma 3.5 *Diberikan graph lobster* $L_n(q;r)$. *Jika* $n \geq 2$, $q \geq 2$ *dan* $r = 1$ *maka gabungan sedikitnya* $(q-1)$ *vertex finger di setiap vertex backbone merupakan himpunan pemisah.*

Bukti :

Tanpa mengurangi keumuman bukti, diambil himpunan $W = \{ f_{111}, f_{121}, f_{131}, \ldots, f_{1(q-1)1}, f_{211}, f_{221}, f_{231}, \ldots, f_{2(q-1)1}, \ldots, f_{n1q}, f_{n21}, f_{n31}, \ldots, f_{n(q-1)1}\}$ pada graph lobster $L_n(q;1)$, diperoleh setiap *vertex* yang bukan himpunan W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W, sedangkan berdasarkan Lemma 3.2 setiap *vertex* pada himpunan W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W. Dengan demikian W merupakan himpunan pemisah. Lebih lanjut lagi, misalkan himpunan W digabungkan dengan himpunan Y yang anggota-anggotanya merupakan *vertex-vertex* yang bukan di W, notasikan dengan W', maka $W^{'} = W \cup Y$. Berdasarkan Lemma 3.2, setiap anggota W' mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap W'. Di lain pihak, berdasarkan hasil terdahulu, bahwa setiap *vertex* pada graph lobster $L_n(q;1)$ dengan $n \geq 2$ dan $q \geq 2$ yang bukan anggota W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W, maka setiap *vertex* pada graph lobster tersebut yang bukan anggota W' memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W'. Oleh karena itu, W' merupakan himpunan pemisah. Jadi gabungan sedikitnya $(q-1)$ *vertex finger* di setiap *vertex backbone* merupakan himpunan pemisah.

Lemma 3.6 *Diberikan graph lobster* $L_n(q;r)$. *Jika* $n \geq 2$, $q \geq 2$ *dan* $r = 1$ *maka gabungan* $(q-1)$ *vertex finger di setiap vertex backbone adalah himpunan bagian dari himpunan pemisah minimum* (β) *dari graph lobster tersebut.*

Bukti :

Tanpa mengurangi keumuman bukti, diambil gabungan $(q-1)$ *vertex finger* di setiap *vertex backbone* yaitu $W = \{f_{111}, f_{121}, f_{131}, \ldots, f_{1(q-1)1}, f_{211}, f_{221}, f_{231}, \ldots, f_{2(q-1)1}, \ldots, f_{n11}, f_{n21}, f_{n31}, \ldots, f_{n(q-1)1}\}$ diperoleh kardinalitas himpunan W adalah $n(q-1)$. Berdasarkan Lemma 3.5, W merupakan himpunan pemisah. Akan ditunjukkan bahwa $W \subseteq \beta$. Andaikan W bukan himpunan bagian dari β.

Dengan kata lain, terdapat *vertex finger* yang merupakan anggota di W tetapi bukan merupakan anggota di β. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan *vertex* tersebut *vertex finger* f_{111} atau $f_{111} \notin \beta$. Diperoleh bahwa terdapat *vertex* yang memiliki representasi jarak yang sama, yaitu

$$r(f_{111}|\beta) = r(f_{1q1}|\beta)$$

Hal ini berarti β bukan merupakan himpunan pemisah minimum. Terjadi kontradiksi, oleh karena itu $f_{111} \in \beta$. Jadi $W \subseteq \beta$.

Berdasarkan Lemma 3.5 dan Lemma 3.6 diperoleh teorema yang menyangkut dimensi metrik pada graph lobster $L_n(q;1)$ untuk $n \geq 2$ dan $q \geq 2$.

Teorema 3.7 *Diberikan graph lobster $L_n(q;r)$. Jika $n \geq 2$, $q \geq 2$ dan $r = 1$ maka dim$\left(L_n(q;r)\right) = n(q-1)$.*

Bukti :
Berdasarkan Lemma 3.5, diperoleh gabungan sedikitnya $(q-1)$ *vertex finger* di setiap *vertex backbone* merupakan himpunan pemisah. Karena terdapat n *vertex backbone* maka banyak *vertex finger* sebagai anggota himpunan pemisah pada graph lobster tersebut sedikitnya adalah $n(q-1)$. Akan tetapi himpunan pemisah ini belum tentu merupakan himpunan pemisah minimum. Dengan demikian diperoleh bahwa

$$\dim\left(L_n(q;1)\right) \leq n(q-1) \qquad (3.1)$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 3.6, karena $W \subseteq \beta$ maka kardinalitas himpunan W lebih kecil atau sama dengan kardinalitas himpunan β. Kardinalitas himpunan W adalah $n(q-1)$ sedangkan kardinalitas β adalah $\dim\left(L_n(q;1)\right)$. Dengan demikian diperoleh bahwa

$$n(q-1) \leq \dim\left(L_n(q;1)\right) \qquad (3.2)$$

Berdasarkan (3.1) dan (3.2) diperoleh $\dim\left(L_n(q;1)\right) = n(q-1)$. □

3.4 Dimensi Metrik Graph Lobster $L_n(q;r)$ untuk $n \geq 2, q \geq 1$ dan $r \geq 2$

Berikut ini diberikan lemma-lemma yang menyangkut himpunan pemisah pada graph lobster $L_n(q;r)$ untuk $n \geq 2, q \geq 1$ dan $r \geq 2$.

Lemma 3.8 *Diberikan graph lobster $L_n(q;r)$. Jika $n \geq 2, q \geq 1$ dan $r \geq 2$ maka gabungan sedikitnya $(r-1)$ vertex finger di setiap vertex hand merupakan himpunan pemisah.*

Bukti :
Tanpa mengurangi keumuman bukti diambil himpunan $W = \{f_{111}, f_{112}, \ldots, f_{11(r-1)}, \ldots, f_{12(r-1)}, \ldots, f_{1q(r-1)}, f_{211}, f_{212}, \ldots, f_{21(r-1)}, \ldots, f_{22(r-1)}, \ldots, f_{2q(r-1)}, \ldots, f_{nq(r-1)}\}$ pada graph lobster $L_n(q;r)$, diperoleh setiap *vertex* yang bukan himpunan W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W, sedangkan berdasarkan Lemma 3.2 setiap *vertex* pada himpunan W memiliki representasi

jarak yang berbeda terhadap W. Lebih lanjut lagi, misalkan himpunan W digabungkan dengan himpunan Y yang anggota-anggotanya merupakan *vertex-vertex* yang bukan di W, notasikan dengan W', maka $W' = W \cup Y$. Berdasarkan Lemma 3.2, setiap anggota W' mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap W'. Di lain pihak, berdasarkan hasil terdahulu, bahwa setiap *vertex* pada graph lobster $L_n(q;r)$ dengan $n \geq 2$, $q \geq 1$ dan $r \geq 2$ yang bukan anggota W memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W, maka setiap *vertex* pada graph lobster tersebut yang bukan anggota W' memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap W'. Oleh karena itu, W' merupakan himpunan pemisah. Jadi gabungan sedikitnya $(r-1)$ *vertex finger* di setiap *vertex hand* merupakan himpunan pemisah.

Lemma 3.9 *Diberikan graph lobster $L_n(q;r)$. Jika $n \geq 2, q \geq 1$ dan $r \geq 2$ maka gabungan $(r-1)$ vertex finger di setiap vertex hand adalah himpunan bagian dari himpunan pemisah minimum (β) dari graph lobster tersebut.*

Bukti :

Diambil gabungan $(r-1)$ *vertex finger* di setiap *vertex hand* yaitu $W = \{f_{111}, f_{112}, \dots, f_{11(r-1)}, \dots, f_{12(r-1)}, \dots, f_{1q(r-1)}, f_{211}, f_{212}, \dots, f_{21(r-1)}, \dots, f_{22(r-1)}, \dots, f_{2q(r-1)}, \dots, f_{nq(r-1)}\}$, diperoleh juga kardinalitas himpunan W adalah $nq(r-1)$. Berdasarkan Lemma 3.8, W merupakan himpunan pemisah. Akan ditunjukkan bahwa $W \subseteq \beta$. Andaikan W bukan himpunan bagian dari β. Dengan kata lain, terdapat *vertex finger* yang merupakan anggota di W tetapi bukan merupakan anggota di β. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan *vertex* tersebut *vertex finger* f_{111} atau $f_{111} \notin \beta$. Diperoleh bahwa terdapat *vertex* yang memiliki representasi jarak yang sama, yaitu

$$r(f_{111}|\beta) = r(f_{11r}|\beta)$$

Hal ini berarti β bukan merupakan himpunan pemisah minimum. Terjadi kontradiksi, oleh karena itu $f_{111} \in \beta$. Jadi $W \subseteq \beta$. □

Berdasarkan Lemma 3.5 dan Lemma 3.6 diperoleh teorema yang menyangkut dimensi metrik pada graph lobster $L_n(q;r)$ untuk $n \geq 2, q \geq 1$ dan $r \geq 2$.

Teorema 3.10 *Diberikan graph lobster $L_n(q;r)$. Jika $n \geq 2, q \geq 1$ dan $r \geq 2$ maka $dim\big(L_n(q;r)\big) = nq(r-1)$.*

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.8 diperoleh gabungan sedikitnya $(r-1)$ *vertex finger* di setiap *vertex hand* merupakan himpunan pemisah. Karena terdapat q *vertex hand* di setiap *vertex backbone* maka banyak *vertex finger* sebagai anggota himpunan pemisah pada graph lobster tersebut adalah $nq(r-1)$. Akan tetapi himpunan pemisah ini belum tentu merupakan himpunan pemisah minimum. Dengan demikian diperoleh bahwa

$$\dim\big(L_n(q;r)\big) \leq nq(r-1) \tag{3.3}$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 3.9, karena $W \subseteq \beta$ maka kardinalitas himpunan W lebih kecil atau sama dengan kardinalitas himpunan β. Kardinalitas himpunan W adalah $nq(r-1)$ sedangkan kardinalitas β adalah $\dim\big(L_n(q;r)\big)$. Dengan demikian diperoleh bahwa

$$nq(r-1) \le \dim\big(L_n(q;r)\big) \tag{3.4}$$

Berdasarkan (3.3) dan (3.4) diperoleh $\dim\big(L_n(q;r)\big) = nq(r-1)$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai dimensi metrik graph lobster $L_n(q;r)$ dengan $t = 2$, maka dapat disimpulkan dimensi metrik graph lobster $L_n(q;r)$ untuk $n = 2, q = 1$ dan $r = 1$ adalah 1, dimensi metrik graph lobster $L_n(q;r)$ untuk $n > 2, q = 1$ dan $r = 1$ adalah 2, dimensi metrik graph lobster $L_n(q;r)$ untuk $n \ge 2, q \ge 2$ dan $r = 1$ adalah $n(q-1)$, dan dimensi metrik graph lobster $L_n(q;r)$ dengan $n \ge 2, q \ge 2$ dan $r \ge 2$ adalah $nq(r-1)$.

Daftar Pustaka

[1] Beerliova Z., Eberhard F., Erlebach T., Hall A., Hoffmann M., Mihalak M. dan Ram L.S. 2006. Network Dicovery and Verification. *IEEE Journal On Selected Areas in Communications*. 24(12). p.2168-2181.

[2] Caceres J., Hernando C., Mora M, Pelayo I.M., Puertas M.L., Seara C., dan Wood D. R. 2007. On The Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 21(2). p.423-441.

[3] Harary, F. dan Melter, R. A. 1976. On The Metric Dimension of A Graph. *Ars Combinatoria*. 2. p.191–195

[4] Khan, N., Pal, A. dan Pal, M. 2009. Edge Colouring of Cactus Graphs. *AMO - Advanced Modeling and Optimization*. 11(4).

[5] Khuller, S., Raghavachari, B., dan Rosenfeld, A. Landmarks in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 70(3). p.217-229.

[6] Sebo, A. dan Tannier, E. 2004. On Metric Generators of Graphs. *Mathematics of Operations Research*. 29(2). p.383-393.