E-Jurnal Matematika Vol. 2, No.2, Mei 2013, 11-17 ISSN: 2303-1751

PERBANDINGAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR MENGGUNAKAN METODE NEWTON-RAPHSON DAN METODE JACOBIAN

NANDA NINGTYAS RAMADHANI UTAMI[1], I NYOMAN WIDANA[2], NI MADE ASIH[3]

[1, 2, 3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, Bukit Jimbaran-Bali,
e-mail: [1]belle_nanda@yahoo.com.au, [2]nwidana@yahoo.com, [3]sedhana2@gmail.com

Abstract

System of nonlinear equations is a collection of some nonlinear equations. The Newton-Raphson method and Jacobian method are methods used for solving systems of nonlinear equations. The Newton-Raphson methods uses first and second derivatives and indeed does perform better than the steepest descent method if the initial point is close to the minimizer. Jacobian method is a method of resolving equations through iteration process using simultaneous equations. If the Newton-Raphson methods and Jacobian methods are compared with the exact value, the Jacobian method is the closest to exact value but has more iterations. In this study the Newton-Raphson method gets the results faster than the Jacobian method (Newton-Raphson iteration method is 5 and 58 in the Jacobian iteration method). In this case, the Jacobian method gets results closer to the exact value.

***Keywords**: System of nonlinear equations, Newton-Raphson's method, Jacobian's method*

1. Pendahuluan

Sistem persamaan nonlinear merupakan kumpulan dari beberapa persamaan nonlinear dengan fungsi tujuannya saja atau bersama dengan fungsi kendala berbentuk nonlinier, yaitu pangkat dari variabelnya lebih dari satu [6]. Ada beberapa fungsi tujuan dalam persamaan nonlinier yang tidak bisa diselesaikan secara analitik, tetapi dapat diselesaikan dengan metode-metode khusus untuk penyelesaian masalah dalam persamaan nonlinier. Untuk menyelesaikan permasalahan persamaan nonlinier terdapat banyak metode dan algoritma yang bisa digunakan, tetapi setiap metode dan algoritma yang ada mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Salah satunya metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Ada banyak macam metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan linear maupun sistem persamaan nonlinear diantaranya metode Newton-Raphson dan metode Jacobian.

Metode Newton-Raphson adalah metode untuk mencari hampiran atau pendekatan terhadap akar fungsi real [1]. Metode Newton-Raphson sering

[1] Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana
[2,3] Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana

konvergen dengan cepat, terutama bila iterasi dimulai cukup dekat dengan akar yang diinginkan. Secara umum pembahasan metode Newton-Raphson yang digunakan menggunakan pendekatan polinomial Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x0n \tag{1}$$

Dalam penyelesaian sistem persamaan nonlinear yang terdiri dari himpunan nilai-nilai x yang secara simultan memberikan semua persamaan tersebut nilai yang sama dengan nol [4].

Perhatikan sistem persamaan nonlinear di bawah ini :

$$\begin{aligned} U_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ U_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ U_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Dimana penyelesaiannya dengan perluasan metode Newton-Raphson melalui ekspansi deret taylor pada masing-masing persamaan. Dengan ekspansi deret taylor orde pertama:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) \tag{3}$$

Sehingga persamaan (2) menjadi:

$$\begin{bmatrix} (U_1)_{i+1} - (U_1)_i \\ (U_2)_{i+1} - (U_2)_i \\ \vdots \\ (U_n)_{i+1} - (U_n)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (U_1)_i}{\partial x_1} & \frac{\partial (U_1)_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial (U_1)_i}{\partial x_n} \\ \frac{\partial (U_2)_i}{\partial x_1} & \frac{\partial (U_2)_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial (U_2)_i}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (U_n)_i}{\partial x_1} & \frac{\partial (U_n)_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial (U_n)_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1)_{i+1} - (x_1)_i \\ (x_2)_{i+1} - (x_2)_i \\ \vdots \\ (x_n)_{i+1} - (x_n)_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

Metode Jacobian adalah metode penyelesaian persamaan melalui proses iterasi dengan menggunakan persamaan [2]:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ii} x_j^k}{a_{ii}}, j \neq i, i = 1,2,, n \ldots \text{ dan } k = 0,1,2, \ldots \tag{5}$$

bila dilihat dari sistem persamaan sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

dengan syarat $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,3,\ldots,n$ maka sistem persamaan iterasinya dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - a_{12}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{nn}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

dengan k = 0, 1, 2, . . .
Iterasi dimulai dengan memberikan nilai awal untuk x:

$$
x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \tag{7}
$$

kondisi berhenti iterasinya, dapat digunakan pendekatan galat relatif

$$
\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{k}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon, \text{ untuk i = 1, 2, 3, . . . , n} \tag{8}
$$

Syarat agar iterasinya konvergen adalah:

$$
|a_{ii}| > \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{9}
$$

Jika syarat diatas dipenuhi, maka kekonvergenan akan dijamin. Kekonvergenannya juga ditentukan pada pemilihan tebakan awal. Tebakan yang terlalu jauh dari solusi sejatinya dapat menyebabkan iterasi divergen.

2. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini data diperoleh dari data sekunder. Untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan metode Newton-Raphson, tuliskan sistem tersebut dalam bentuk persamaan (2). Langkah selanjutnya menentukan nilai awal untuk masing-masing variabel($x^{(0)}$). Kemudian menghitung nilai dari fungsi sistem persamaan nonlinear dengan nilai tebakan awal yang telah ditentukan pada langkah sebelumnya. Langkah berikutnya mencari turunan dari fungsi sistem persamaan nonlinear untuk masing-masing variabelnya. Setelah itu menghitung turunan dari fungsi yang telah didapat dari langkah sebelumnya dengan menggunakan nilai tebakan awal ($x^{(0)}$). Menentukan deviasi dari setiap variabelnya. Kemudian menghitung nilai titik selanjutnya. Dalam tulisan ini nilai galat ditetapkan sebesar 10^{-6}. Ulangi terus proses iterasi metode Newton-Raphson sampai konvergen.

Langkah penyelesaian sistem persamaan nonlinear dalam metode Jacobian adalah menuliskan sistem tersebut dalam bentuk persamaan (2) (sistem persamaan nonlinear yang khusus untuk metode Jacobian yang hanya bisa dilinearkan). Selanjutnya, menentukan nilai awal variabel, diambil nilai awal dari $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. Setelah itu menghitung nilai $x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, x_3{}^{(1)}, \ldots, x_n{}^{(1)}$ menggunakan persamaan (6). Dalam tulisan ini nilai galat ditetapkan sebesar 10^{-6}. Selanjutnya ulangi lagi proses iterasi diatas sampai didapatkan nilai variabel x yang konvergen.

3. Hasil dan Pembahasan

Sistem persamaan nonlinear yang diberikan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y - z^2 - 10 &= 0 \\ 3x^2 + 6y - z^2 - 25 &= 0 \\ x^2 - 5y + 6z^2 - 4 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

3.1 Solusi Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear dengan Metode Newton-Raphson

Langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan metode Newton- Raphson adalah:

Pertama menuliskan sistem persamaan nonlinear dengan menggunakan persamaan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 2x^2 + y - z^2 - 10 &= 0 \\ G(x,y,z) &= 3x^2 + 6y - z^2 - 25 &= 0 \\ H(x,y,z) &= x^2 - 5y + 6z^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Kedua menentukan nilai tebakan awal untuk masing-masing variabel x, y, dan z, dimana dalam hal ini dipilih nilai tebakan awalnya $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, selanjutnya menghitung nilai fungsi dari sistem persamaan nonlinear:

$$\begin{aligned} F(1,1,1) &= 2(1)^2 + 1 - (1)^2 - 10 = -8 \\ G(1,1,1) &= 3(1)^2 + 6(1) - (1)^2 - 25 = -17 \\ H(1,1,1) &= (1)^2 - 5(1) + 6(1)^2 - 4 = -2 \end{aligned}$$

Setelah itu, mencari turunan dari ketiga fungsi sistem persamaan nonlinear untuk masing-masing variabelnya:

$$\begin{array}{lll} \frac{dF}{dx} = 4x & \frac{dF}{dy} = 1 & \frac{dF}{dz} = -2z \\ \frac{dG}{dx} = 6x & \frac{dG}{dy} = 6 & \frac{dG}{dz} = -2z. \\ \frac{dH}{dx} = 2x & \frac{dH}{dy} = -5 & \frac{dH}{dz} = 12z \end{array}$$

Menghitung nilai turunan dari fungsi yang telah didapat dari langkah sebelumnya dengan menggunakan nilai tebakan awal, yaitu $x = y = z = 1$, yaitu:

$$\frac{dF}{dx} = 4x = 4 \quad \frac{dF}{dy} = 1 \quad \frac{dF}{dz} = -2z = -2$$
$$\frac{dG}{dx} = 6x = 6 \quad \frac{dG}{dy} = 6 \quad \frac{dG}{dz} = -2z - 2\ .$$
$$\frac{dH}{dx} = 2x = 2 \quad \frac{dH}{dy} = -5 \quad \frac{dH}{dz} = 12z = 12$$

Selanjutnya menentukan deviasi, maka tulis terlebih dahulu nilai turunan dari fungsi langkah sebelumnya beserta nilai fungsi sistem persamaan nonlinear dimana akan dibentuk matriks, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -8 \\ -17 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ -17 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.882813 \\ 1.046875 \\ 0.289063 \end{bmatrix}$$

didapatkan $\Delta p_1 = 1.882813, \Delta p_2 = 1.046875$ dan $\Delta p_3 = 0.289063$. Selanjutnya akan dihitung nilai pendekatan yang lebih tepat dari tebakan awal dengan menggunakan persamaan (3), didapatkan $x_1 = 2.882813, x_2 = 2.046875, x_3 = 1.289063$. Nilai x_i, y_i dan z_i yang sudah didapatkan dan akan dijadikan sebagai nilai awal untuk iterasi selanjutnya. Ulangi langkah kedua proses iterasi metode Newton-Raphson sampai mendapatkan nilai deviasi sekecil mungkin atau mendekati nol.

3.2 Solusi Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear dengan Metode Jacobian

Langkah-langkah dalam menyelesaiakan sistem persamaan nonlinear adalah pertama menyusun sistem persamaan nonlinear (10). Langkah selanjutnya melinearkan sistem persamaan nonlinear dengan memisalkan $x_1 = x^2, x_2 = y$ $x_3 = z^2$, maka sistem persamaan akan menjadi:

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 - x_3 - 10 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 25 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 4 = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

dari persamaan (11) diperoleh :

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{10 - x_2 + x_3}{2} \\ x_2 = \frac{25 - 3x_1 + x_3}{6} \\ x_3 = \frac{4 - x_1 + 5x_2}{6} \end{gathered} \tag{12}$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai awal variabel, misalkan nilai awalnya adalah $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Subtitusikan nilai awal variabel pada iterasi pertama dari persamaan (12), didapatkan nilai $x_1^{(1)} = 5, x_2^{(1)} = 4.1667, x_3^{(1)} = 0.667$ (iterasi pertama). Selanjutnya mencari nilai $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ dengan persamaan (12), dimana nilai $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ sebagai nilai awal, maka didapatkan nilai $x_1^{(2)} = 3.25, x_2^{(2)} = 1.778, x_3^{(2)} = 3.305$. Ulangi proses langkah sebelumnya dalam persamaan (12) dengan mensubtitusikan nilai iterasi sebelumnya yang telah didapat menjadi nilai awal pada iterasi selanjutnya sampai didapatkan nilai variabel $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ dan $x_3^{(i)}$ yang tidak berubah dari iterasi yang sebelumnya (konvergen).

3.3 Perbandingan Solusi Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear dengan Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian dengan Nilai Eksaknya.

Dalam pengerjaan secara analitik, didapatkan solusi dari sistem persamaan nonlinear (10), dengan nilai eksak $x = 2.183031$, $y = 2.046875$, $z = 1.256234$. Untuk metode Newton-Raphson didapatkan nilai $x = 2.183032$, $y = 2.046875$, $z = 1.256234$ dengan banyaknya iterasi 5, sedangkan metode Jacobian didapatkan nilai $x = 2.183031$, $y = 2.046875$, $z = 1.256234$ dengan banyak iterasi 58. Terlihat metode Jacobian jauh lebih banyak melakukan iterasi dibandingkan metode Newton-Raphson tetapi untuk solusi sistem persamaan nonlinear metode Jacobian lebih mendekati dari nilai eksaknya (tabel 1).

Tabel 1. Perbandingan Solusi Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian dengan Nilai Eksaknya.

Metode / Variabel	x	y	z	Iterasi
Eksak	2.183031	2.046875	1.256234	-
Newton-Raphson	2.183032	2.046875	1.256234	5
Jacobian	2.183031	2.046875	1.256234	58

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, kesimpulan yang didapatkan dari solusi sistem persamaan nonlinear dengan nilai eksak $x = 2.183031$, $y = 2.046875$, $z = 1.256234$, dengan metode Newton-Raphson didapatkan nilai $x = 2.183032$, $y = 2.046875$, $z = 1.256234$. Sedangkan untuk metode Jacobian didapatkan nilai $x = 2.183031$, $y = 2.046875$, $z = 1.256234$. Dalam hal ini metode Newton-Raphson mendapatkan hasil yang lebih cepat dengan 5 iterasi dibandingkan metode Jacobian dengan 58 iterasi, tetapi metode Jacobian mendapatkan hasil yang lebih mendekati dengan nilai eksak.

Daftar Pustaka

[1] Chong, Edwin K.P.& Stanislaw H. Zak. 2008.*”An Introduction To Optimization Third Edition”*. United States of America : Wiley.

[2] Heri, Sutarno & Racmatin Dewi. “*Metode Numerik*. Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pendidikan Indonesia.

[3] Ilmiadi. 2010. *Solusi Sistem Persamaan Nonlinear dengan Metode Jacobian.* http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/05510006-ilmiadi.ps. di akses pada tanggal 5 Agustus 2012.

[4] Mathews, John. H. 1992. *“Numerical Methods”*. Prentice-hall Internasioal,Inc

[5] Nasha, Khutwatun. 2008. *“Penyelesaian Sistem Persamaan Tak Linier Dengan Metode Newton-Raphson”.*http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/03110240-khutwatun-nasiha.ps. diakses pada tanggal 19 September 2012.

[6] Rurres, Anton. 2004. *Aljabar Linear Elementer Edisi 8 jilid 1”*. Jakarta : Erlangga.