ВІСНИК ПРИАЗОВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
2015р. Серія: Технічні науки Вип. 30. Т. 1
ISSN 2225-6733

УДК 533.6.011.72:681.121.089

© Лухтура Ф.И.*

# К ВОПРОСУ ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА ИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОТВЕРСТИЙ И СОПЕЛ

*Приведен метод расчета действительных параметров газа при истечении из отверстий и сопел с различной конфигурацией сужающейся их части по известным из опыта коэффициентам расхода. Предложен достаточно простой метод расчета величины «второго» критического перепада давлений, зависящей от коэффициентов расхода на запертых режимах истечения. В рамках одномерной модели невязкой жидкости подтверждено, что в выходном сечении отверстия невозможно получить критические скорости.*
***Ключевые слова:*** *отверстие, сопло, коэффициент расхода, коэффициент скорости, коэффициент сжатия струи.*

***Лухтура Ф.І. До питання про сталий режим витікання газу з вісосиметричних отворів та сопел.*** *Наведений метод розрахунку реальних параметрів газу при витіканні з отворів і сопел з різноманітними конфігураціями звужувальної їх частини по відомим з опиту коефіцієнтів витрат. Запропоновано достатньо простий метод розрахунку величини «другого» критичного перепаду тиску, який залежить від коефіцієнтів витрати на запертих режимах витікання. В рамках одновимірної моделі нев'язкої рідини підтверджено, що в вихідному перерізу отвору не можна получити критичні швидкості.*
***Ключові слова:*** *отвір, сопло, коефіцієнт витрати, коефіцієнт швидкості, коефіцієнт стиску струменя.*

***F.I. Lukhtura. On the question of set gas expiration through axisymmetrical holes and nozzles.*** *Real parameters of the gas expiring out of narrowing nozzles of different configuration have been calculated knowing the discharge coefficients obtained experimentally. Rather a simple method to calculate the «second» critical pressure differential dependent on discharge coefficients at cut-off expiration modes has been offered. Using an inviscid fluid one-dimensional model the author has confirmed that it is impossible to receive critical speeds in the output hole. The method makes it possible to estimate the value of the pressure in the separation point (if it is available), where the Laval nozzle section is minimum and knowing «second» critical pressure differential (or total pressure at cut-off expiration). The received data can be used as initial data to calculate jet flows passing through various kind of holes. The analytical research results of gas discharge regime through the holes (nozzles) have shown, that a one-dimensional model can be used to calculate the parameters of the expiration through holes of different configuration in the nozzle narrowing part precisely enough to estimate changes of the main (basic) flow parameters in the channels of the holes. The analysis of the research indicates that the flow coefficients at flow-off expiration modes for convergent and convergent-divergent holes are identical and the parameters in critical section are identical as well. The total pressure recovery coefficient is approximately equal to the flow coefficient, there being losses of total pressure. The received results can be used in power engineering, metallurgy etc. developing various blowing devices and burners.*
***Keywords:*** *hole, nozzle, flow coefficient, coefficient of speed, coefficient of compressibility of a jet.*

**Постановка проблемы.** На протяжении более 170 лет [1], начиная с момента публикаций работ А. Навье (1829 г.) и А.Сен-Венана и Л. Вантцеля (1839 г.), касающихся проблем и

* *ст. преподаватель, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь,* lukhelena@yandex.ru

ISSN 2225-6733

вопросов истечения газа из отверстий, многие ученые XIX (Ю. Вейсбах, Г. Цейнер, Г.-А. Гирн, Р. Клаузиус, А. Гюгонио, А. Паренти, О. Рейнольдс и др.) и XX столетия (С.А. Чаплыгин, Ф.И. Франкль [2, 3] и др.) проявляли достаточно большой интерес к этому процессу, вызывавшему в тот период многочисленные дискуссии на страницах соответствующих изданий и публикаций. С течением времени интерес к данному явлению не снижался и время от времени ученые предпринимали попытки дальнейшего изучения, теоретического и экспериментального исследования [4-26] с целью уточнения механизма истечения газа из отверстий.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Несмотря на длительный период изучения этого явления в современной периодической печати и в пособиях по прикладной газовой динамике [4-26], кроме немногочисленных работ [12, 17, 23, 24], в основном учитывают лишь потери из-за вязкого трения [4, 25, 26 и др.], незначительно изменяющие параметры истечения от теоретически ожидаемых, в большинстве случаев процесс истечения из отверстий и сопл представляют изоэнтропным [8, 26 и многих др.]. Это вызывает некоторое удивление, т.к. во многих практических случаях, как показал исторический опыт изучения, действительный (адиабатный) процесс истечения значительно отличается от теоретического (изоэнтропного). При расчете же параметров истечения несжимаемой жидкости такого недостатка не существует: для определения действительной скорости истечения и расхода несжимаемой жидкости из отверстий теоретическая формула Торричелли используется только лишь с поправочными коэффициентами истечения: коэффициентами сжатия струи $\varepsilon$, скорости $\varphi$, расхода $\mu$, учитывающие реальность процесса. Кроме того, что касается прикладных аспектов, то, как показал литературный обзор, информация, представленная по истечению газа из отверстий в известных источниках [4-26], достаточно противоречива. Так, например, в одних источниках [4, 21, 24] представлены данные, указывающие на потери скорости (а значит и полного давления) в сужающихся каналах из-за наличия сопротивления, в то же время в других [26] говорится о практически неизменном полном давлении при течении в конфузорах с различным углом наклона его образующей. Наконец, в третьих источниках [8, 9, 22 и др.] о потерях полного давления нет никакой информации. Обычно в работах не приводится анализ причинно-следственной связи между параметрами истечения. А значит, пока отсутствует достаточно полная, соответствующая существующим экспериментальным данным, теория истечения из отверстий различной формы, позволяющая определять действительные параметры на выходе из отверстия и на начальном участке струйного течения: скорость, полное давление – параметры, интересующие, в первую очередь, исследователей и инженерно-технических работников для выполнения прикладных НИР и решения практических задач. К тому же большинство существующих методик расчета [3, 12-14, 17] коэффициента расхода при истечении из отверстий с различными углами наклона образующих в связи со спецификой решения уравнений газовой динамики [27] применимы лишь в области сверхкритических перепадов давлений. Противоречивым, на наш взгляд, является также комментарии по поводу существующего в литературе факта несовпадения, при углах наклона стенок отверстия в диапазоне $65\div70^0$, аналитических [2, 3] (на основе теории Чаплыгина, Франкля), и экспериментальных [9] данных по режимам «запирания» отверстия. Как показано в [23-24], в этом случае не учитываются потери полного давления при истечении газа из отверстий в толстой стенке (сопел) в рассматриваемом диапазоне изменения углов наклона их стенок.

В настоящее время процесс истечения газа из отверстия можно представить следующим образом. С ростом давления перед соплом (или понижением давления в среде, куда истекает поток) расход, следуя выражению Сен-Венана-Вантцеля, растет и теоретически принимает максимальное значение при критическом перепаде $\pi^*_{кр} = \dfrac{p_\infty}{p_{0*}} = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ (запертое течение). В действительности из-за неравномерности параметров по сечению (газодинамических потерь) и потерь из-за вязкого трения действительный расход всегда меньше теоретического, а максимальное его значение наблюдается только при $\pi_{кр}$ ниже $\pi^*_{кр}$, где $\pi^*_{кр}$ и $\pi_{кр}$ – так называемые «первое» и «второе» критические отношения давлений. Таким образом, сопло в действительности запирается при $\pi_{кр}$. Величины $\pi^*_{кр}$, $\pi_{кр}$ и диапазон давлений $\pi_{кр} < \pi < \pi^*_{кр}$ зависят от формы

ISSN 2225-6733

отверстия, теплофизических свойств истекающего газа и др. В этом диапазоне с ростом давления перед соплом или по мере увеличения отношения давлений (полного перепада давлений) $\Pi_0 = 1/\pi$ звуковая линия перемещается против потока к срезу отверстия. При этом возрастает коэффициент расхода $\mu$. Следуя наиболее распространенному в настоящее время мнению [2-3, 8-9, 26], изменение расхода происходит вследствие того, что волны давления влияют на линию перехода и дозвуковую часть, т.е. по существу «проходят» внутрь отверстия. Здесь уместно отметить работы А. Паренти (1987 г.) [1], где, в отличие от упомянутого мнения, автор предложил гипотезу роста расхода из-за увеличения размеров сжатого критического сечения в струе. Этого же мнения, на наш взгляд, придерживались авторы работ [18, 19], в которых теоретически показан рост поперечного размера струи и, соответственно, коэффициента расхода вплоть до заполнения (запирания) сечения отверстия потоком. Таким образом, существуют некоторые разногласия и незначительные противоречия в объяснении роста расхода газа при его истечении из различных отверстий и сопел.

**Цель статьи –** уточнение, по возможности с единых позиций, характеристик установившегося движения сжимаемой жидкости в отверстиях и соплах и теоретическое исследование действительного процесса истечения из отверстий и сопел в рамках квазиодномерного приближения, т.к. возможности одномерной теории далеко не исчерпаны, а также устранение некоторых разногласий в толковании процесса истечения.

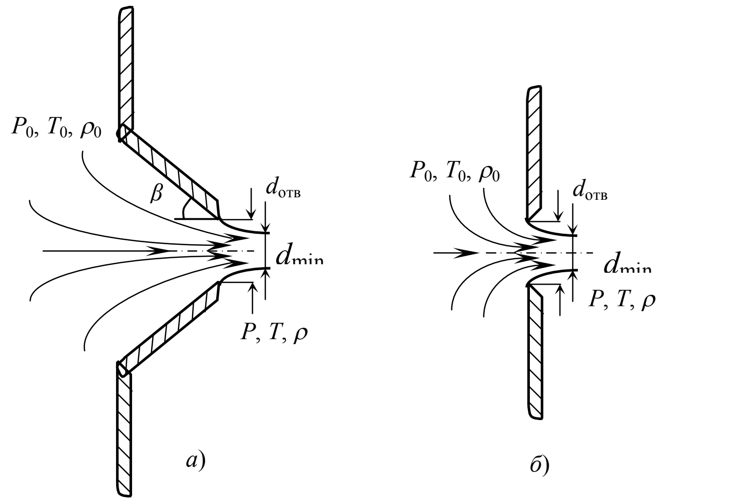


Рис. 1 – Типичная конфигурация отверстий (сопел): а – в толстой стенке; б – в тонкой стенке

**Изложение основного материала.** Пусть имеется емкость перед отверстиями различной конфигурации (рис. 1, а, б), в которой находится газ, параметры которого $P_0$, $T_0$ и $\rho_0$. Допускаем, что емкость имеет достаточно большие размеры, и скоростью движения газа в ней можно пренебречь. Поэтому параметры газа в емкости можно считать параметрами торможения. Давление среды в окрестности отверстия $P_{окр.ср}$.

Также как в случае истечения несжимаемой жидкости, при истечении газа вблизи выходного сечения отверстия образуется сжатое сечение $F_{сж}$. Площадь поперечного сечения отверстия – $F_{отв}$.

При решении этой задачи допускаем:

1. Газ совершенный и подчиняется уравнению состояния идеальных газов:

$$P/\rho = RT\,. \tag{1}$$

2. Процесс истечения адиабатный, т.е. выполняется условие (уравнение Лапласа-Пуассона) и соблюдается условие $T_0 = \text{const}$:

$$\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k}\,, \tag{2}$$

где $P$, $P_0$ – соответственно абсолютные статическое и полное давление газа;
$\rho$, $\rho_0$ – соответственно статическая плотность и плотность «заторможенного» газа;
$R = 8314/\mu$ – газовая постоянная;
$T$ – температура газа по абсолютной шкале;
$\mu$ – молекулярная масса газа;
$k$ – показатель адиабаты.

3. Во всех точках сечения отверстия и сжатого сечения струи параметры газа по сечению одинаковы (параметры газа по сечению распределены равномерно).

В процессе истечения газа происходит потеря некоторой доли энергии из-за несовершенства поджатия (непараллельности линий тока и неравномерности распределения параметров в поперечном сечении), внутреннего трения, образования ударных волн и др. Учитывая все возможные потери энергии, в т. ч. волновые при образовании течения Дж. Тейлора – симметричного типа околозвукового течения со сверхзвуковыми включениями, примыкающими к стенкам отверстия или сопла, и (или) течения Майера с замыканием этих сверхзвуковых зон скачком уплотнения, тепловую диаграмму течения (процесс расширения) газа из сужающихся отверстий ($0 < \beta < 180^o$) можно в общем случае представить в виде, приведенном на рис. 2.

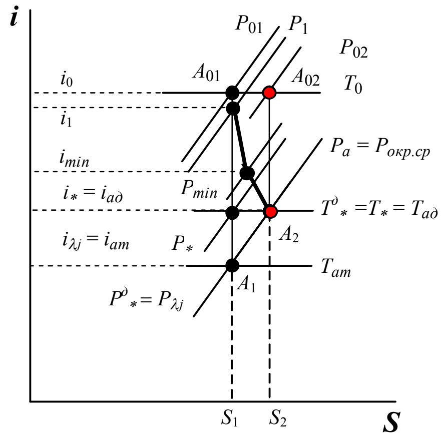


Рис. 2 – Процесс расширения газа в соплах на $iS$-диаграмме

Принято обычно считать, что эти потери пропорциональны кинетической энергии. В связи с этим уравнение энергетического баланса (уравнение Бернулли) для двух сечений: первое сечение в емкости, второе – сжатое сечение сразу за отверстием (или выходное сечение отверстия) (рис. 1), можно записать в следующем виде

$$\frac{w^2}{2} + \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho} + \zeta \frac{w^2}{2} = 0 \tag{3}$$

или

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2\int_{P}^{P_0} \frac{dP}{\rho}} = \varphi \sqrt{2\int_{P}^{P_0} \frac{dP}{\rho}}\ , \tag{4}$$

где $w$ – скорость, которую приобретает газ в струе;

$\zeta$ – коэффициент сопротивления отверстия (учитывающий в т.ч. газодинамические потери);

$P$ и $\rho$ – давление и плотность истекающего газа в сжатом (или в выходном) сечении;

$\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$ – коэффициент скорости.

Заменив в уравнении (4) $\rho$ его значением из уравнения (2) и интегрируя, получим

$$w = \varphi \sqrt{2\int_{P}^{P_0} \frac{dP}{\rho_0}\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{k}}} = \varphi \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P}{\rho}\right)} = \varphi \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}\ . \tag{5}$$

Обычно параметры $P$ и $\rho$ не даны по условию, и поэтому их нужно предварительно определять по известному давлению окружающей среды в окрестности отверстия. Допустим, что в окрестности выходного сечения давление $P = P_{окр.ср}$, тогда подставляя это значения в (5), находим:

$$w = \varphi \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P_{окр.ср}}{\rho_0}\frac{P_0^{\frac{1}{k}}}{P_{окр.ср}^{\frac{1}{k}}}\right)} = \varphi \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{P_{окр.ср}}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}\ . \tag{6}$$

Но так как скорость нужно определить, то нельзя решить вопрос: будет ли скорость в струе меньше или больше скорости звука в ней? Поэтому желательно располагать каким-либо признаком, который позволил бы решить этот вопрос. Для нахождения такого признака используют то обстоятельство, что по мере снижения давления в окружающей среде скорость истечения газа возрастает, а скорость звука при этом уменьшается. Очевидно, что совпадения этих скоростей соответствует критической скорости, которую легко определить через параметры торможения:

$$w_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0} = \sqrt{kRT_{кр}} = \sqrt{k\frac{P_{кр}}{\rho_{кр}}}\,. \quad (7)$$

Приравнивая скорости (6) и (7), найдем отношение давлений $\frac{P_{\text{окр.ср}}}{P_0} = \pi$ (или располагаемый перепад давлений $\frac{P_0}{P_{\text{окр.ср.}}} = \Pi_0$ ), при котором достигается критическая скорость истечения из отверстия (сопла) и наблюдается запертый режим, т.е. найдем

$$\pi_{\text{кр}} = \left(1 - \frac{1}{\varphi^2}\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (8)$$

Другими словами, поток должен быть «разогнан» с целью компенсировать потерянную скорость до такой скорости $\lambda_j$, соответствующей отношению $\pi_{\text{кр}}$ при полном расширении потока, чтобы с учетом потерь (коэффициента скорости $\varphi$) получить звуковую скорость в потоке. Действительно, если по критическому перепаду $\pi_{\text{кр}}$ определить скорость $\lambda_j$ при полном расширении газового потока до давления окружающей среды (точка $A_1$ на рис. 2), то получим

$$\lambda_j = \sqrt{\left(1 - \pi_{кр}^{\frac{k-1}{k}}\right)\frac{k+1}{k-1}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\varphi^2}\frac{k-1}{k+1}\right)\frac{k+1}{k-1}} = \frac{1}{\varphi}. \quad (9)$$

Используя уравнение неразрывности, записанного для двух сечений потока (пренебрегая подмешиванием газа из окружающей среды на рассматриваемом участке течения) сжатого и горла отверстия соответственно через теоретически ожидаемые параметры и действительные, получим

$$\frac{p_{0сж}F_{сж}q(\lambda_{сж})}{\sqrt{RT_0}} = \frac{p_{0отв}^{дейст}F_{отв}q\left(\lambda_{отв}^{дейст}\right)}{\sqrt{RT_0}} = \mu\frac{p_{0отв}^{теор}F_{отв}q\left(\lambda_{отв}^{теор}\right)}{\sqrt{RT_0}}. \quad (10)$$

Здесь при сравнении параметров теоретического и действительного течений сделаны допущения:

1. Теоретическое и действительное сопла имеют одинаковые площади горла $F_{отв} = F_{min}$.
2. Полные давления $P_{01}$ и температура торможения $T_0$ и другие теплофизические свойства в потоках газов на входе действительного и идеального сопел одинаковы.
3. В рассматриваемых сечениях сравниваемых сопл распределение параметров равномерно и соответствует равновесному состоянию рабочего тела.

Тогда $p_{0отв}^{теор} = p_{0отв}^{дейст}$. Разделив все части уравнения (10) на величину $F_{отв}q\left(\lambda_{отв}^{теор}\right)$, уравнение можно представить в виде

$$\mu = \sigma_{сж} \cdot \varepsilon \cdot \frac{q(\lambda_{сж})}{q\left(\lambda_{отв}^{теор}\right)} = \frac{q\left(\lambda_{отв}^{дейст}\right)}{q\left(\lambda_{отв}^{теор}\right)}, \quad (11)$$

где $\sigma_{сж} = \frac{p_{0сж}}{p_{0отв}^{дейст}}$ – коэффициент восстановления полного давления в сжатом сечении потока;

$\varepsilon = \frac{F_{сж}}{F_{отв}}$ – коэффициент сжатия струи;

$q(\lambda)$ – газодинамическая функция приведенного расхода.

Или, принимая во внимание, что теоретически ожидаемая при сверхкритических перепадах давления приведенная скорость в горле сопла будет $\lambda_{отв}^{теор} = 1$,

$$\mu = \sigma_{сж} \cdot \varepsilon \cdot q(\lambda_{сж}) = q\left(\lambda_{отв}^{дейст}\right). \quad (12)$$

Т. е. по известному значению коэффициента расхода можно определить достаточно про-

ISSN 2225-6733

сто продольную составляющую средней скорости в горле отверстия (минимального сечения сопла, отверстия), справедливой при углах наклона образующей меньше $70^0$, и пренебрегая потерями на трение до этого сечения

$$q\left(\lambda_{отв}^{дейст}\right)=\mu\,. \tag{13}$$

Это соотношение совпадает с результатами [24] при течении газа в соплах Лаваля. При этом коэффициент скорости в отверстии $\varphi_{отв} = \lambda_{отв}$. При значении $\pi = \pi_{кр}$ отверстие (или сопло) «запирается», что означает достижение равенства площадей сжатого и минимального сечений ($F_{сж} \cong F_{отв}$, и $\varepsilon \cong 1$), и коэффициент расхода приближается к максимальному значению $\mu_{**}$ для данной геометрии сопла (рис. 3). С понижением $\pi$ параметры в выходном сечении, в т.ч. и коэффициент расхода, не изменяются, т.е. происходит стабилизация линии перехода.

Уравнение неразрывности, записанное для действительного критического сечения, и теоретические параметры в этом же сечении, пренебрегая подмешиванием газа из окружающей среды на рассматриваемом участке течения, получим

$$\frac{p_{0кр}^{дейст}F_{кр}}{\sqrt{RT_0}}=\mu\frac{p_{0\lambda}^{теор}F_{\lambda}\,q(\lambda)}{\sqrt{RT_0}} \text{ или } \mu=\sigma_{кр}\cdot q(\lambda)=q\left(\lambda_{отв}^{дейст}\right), \tag{14}$$

где $\lambda$ – теоретическое значение приведенной скорости в действительном критическом сечении, определяется из соотношения [24]

$$\lambda=\left(\sqrt{\frac{\mu^2+k^2-1}{(k-1)^2}}-\frac{\mu}{k-1}\right). \tag{15}$$

Сравнивая выражения (14) и (12), получим

$$\mu=\sigma_{сж}\cdot\varepsilon\cdot q(\lambda_{сж})=\sigma_{кр}\cdot q(\lambda), \tag{16}$$

откуда следует, что при $\varepsilon\to 1$ и $q(\lambda_{сж})\to 1$ коэффициенты $\sigma_{сж}\to\sigma_{кр}$ и $\mu\to\mu_{**}$, в сжатом сечении скорость потока близка к скорости звука. Если $\pi = \pi_{кр}$, то для умеренных значений коэффициента расхода $\mu_{**}$

$$\varepsilon\cong 1, \qquad \sigma_{сж}\cong\mu_{**}=q(\lambda_a), \tag{17}$$

где $\mu_{**}$ – коэффициент расхода при запертом режиме истечения.

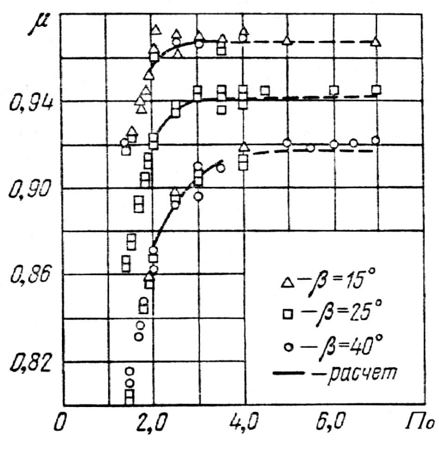


Рис. 3 – Изменение коэффициента расхода с изменением полного перепада давления

Следует отметить, что каждому значению $\mu_{**}$ соответствует определенное значение $\pi_{кр}$, а структура потока газа в узкой части отверстия зависит, кроме влияния толщины пограничного слоя (числа Re) и степени поджатия, от формы отверстия и в первую очередь от двух факторов: угла конусности $\beta$ сужающейся части (рис. 3 [6, 26], рис. 4 [22, 24]) и относительной кривизны стенок $r/R_{min}$ в области узкого сечения, где $r$ – радиус скругления стенки в узкой части отверстия (сопла), $R_{min}$ – радиус минимального сечения (горла) отверстия или сопла (рис. 5 [26]).

На рис. 6 представлены результаты расчета второго критического отношения давления $\pi_{кр}$ к коэффициенту расхода на этих режимах $\mu_{**}$. Здесь же представлены данные авторов [8, 9, 26], которые согласуются с полученными зависимостями. Следует отметить, что при $\beta > 65\text{-}70^0$ [23] до горла отверстия могут происходить потери полного давления, в т. ч. в случае внезапного сужения канала. Поэтому при малых значениях коэффициента расхода расчетные значения несколько разнятся от экспериментальных данных. Разнятся они и по причине достаточно приближенного принимаемого значения $\pi_{кр}$ в связи с асимптотической зависимостью $\mu_{**}$ от $\pi_{кр}$.

Если отношение $P_{окр.ср}/P_0$ будет больше найденного значения $\pi_{кр}$, то выходное сечение «незапертое» ($F_{сж} < F$), скорость истечения на выходе из отверстия будет меньше скорости звука в ней и можно пользоваться формулой (6) для ее определения. При этом если $\pi_{кр} \le \pi \le \pi^*_{кр}$,

ISSN 2225-6733

$$\pi^*_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{18}$$

то можно принять, что критическое течение ($\lambda_{\text{сж}} = M_{\text{сж}} = 1$) реализуется в сжатом сечении. Здесь $\pi^*_{\text{кр}}$ – первое (теоретическое) критическое отношение давлений определяется по (18) или (8) при $\varphi = 1$.

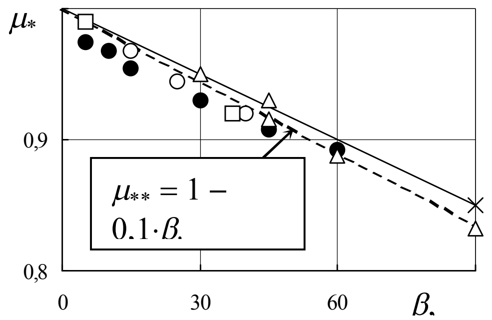


Рис. 4 – Зависимость коэффициента расхода $\mu_{**}$ от угла наклона стенок отверстия [24]

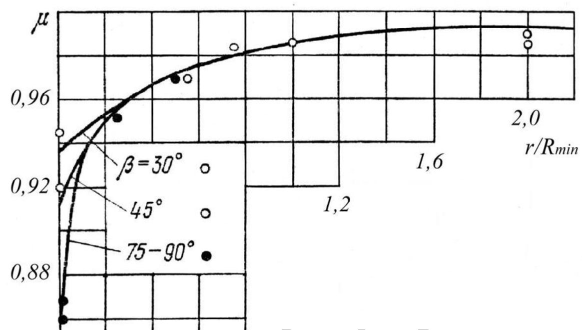


Рис. 5 – Влияние радиуса скругления стенок на коэффициент расхода

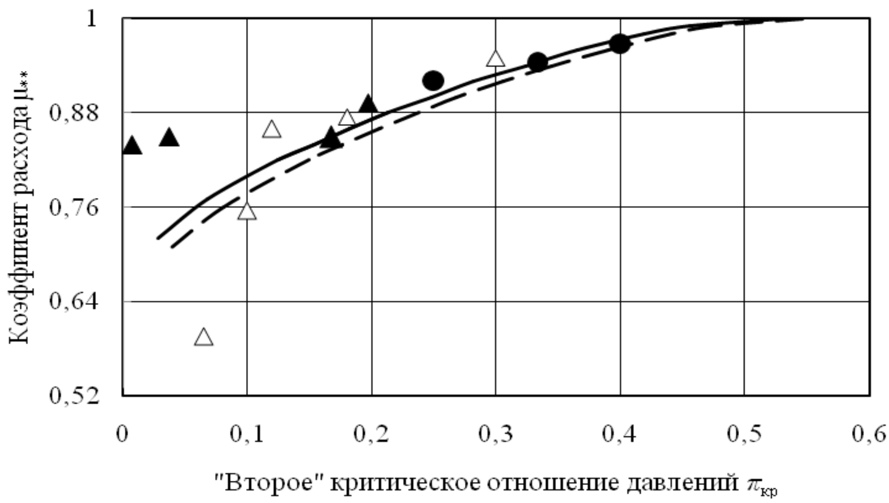


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента расхода при запертом режиме от критического отношения давления для отверстий с различными углами наклона образующей: △ – водяной пар ($k$ =1,3); ▲ – воздух ($k$ =1,4) [8, 9]; ● – воздух [26]; – – – , ——— – теория, соответственно для ($k$ =1,3) и ($k$ =1,4)

Коэффициент сжатия струи в этом диапазоне, следуя уравнению неразрывности (10) для потока,

$$\varepsilon = \frac{F_{сж}}{F_{отв}} = \frac{P_{0отв}}{P_{0сж}} q(\lambda_{отв}) = \frac{q(\lambda_{отв})}{\sigma_{сж}} = \frac{\mu}{\sigma_{сж}}. \tag{19}$$

При $\pi = \pi^*_{\text{кр}}$ коэффициент восстановления полного давления в сжатом сечении и коэффициент сжатия

$$\sigma_{\text{сж}} = P_{0\text{сж}} / P_{0a} \cong 1, \qquad \varepsilon = \mu = q(\lambda_a), \tag{20}$$

где $\mu$ – коэффициент расхода при незапертых режимах.

Если $\pi > \pi^*_{\text{кр}}$, то, пренебрегая потерями на трение, согласно (10), при $\sigma_{\text{сж}} = P_{0\text{сж}} / P_{0a} \cong 1$

ISSN 2225-6733

$$\varepsilon = q(\lambda_{\text{отв}})/q(\lambda_{\text{сж}}) = \mu/q(\lambda_{\text{сж}}) = q(\lambda_{\text{отв}})/q(\lambda_{\text{j}}), \qquad (21)$$

где $\lambda_j$ – значение приведенной скорости при полном расширении потока для данного отношения давлений $\pi$.

Коэффициент расхода $\mu$ при незапертом режиме истечения можно определить по известному коэффициенту $\mu_{**}$ из соотношения [8]

$$\mu = \frac{\mu_{**}}{q_{\text{теор}}} q(\xi) = \frac{\mu_{**}}{q_{\text{теор}}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \xi^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1-\xi^{\frac{k-1}{k}}\right)}; \qquad \xi = \frac{\pi - \pi_{\text{кр}} + (1-\pi)\pi^*_{\text{кр}}}{1-\pi_{\text{кр}}}; \qquad (22)$$

$$q_{\text{теор}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \pi^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1-\pi^{\frac{k-1}{k}}\right)}.$$

При совпадении первого и второго критических отношений давления ($\pi^*_{\text{кр}} = \pi_{\text{кр}}$), что характерно для сопел Лаваля, функция $\xi = \pi$, а при $\pi = \pi_{\text{кр}}$ $\xi = \pi^*_{\text{кр}}$.

Теоретический приведенный расход $q_{\text{теор}} = 1$ при $\pi \le \pi^*_{\text{кр}}$.

Предположив, что зависимость $q(\pi)$ при $\pi \ge \pi_{\text{кр}}$ описывается уравнением эллипса

$$q = \sqrt{1-\left(\frac{\pi - \pi_{\text{кр}}}{1-\pi_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{1}{1-\pi_{\text{кр}}}\sqrt{1-2\pi_{\text{кр}}(1-\pi)-\pi^2}. \qquad (23)$$

Тогда

$$\mu = \frac{\mu_{**}}{q_{теор}} \frac{1}{1-\pi_{\text{кр}}}\sqrt{1-2\pi_{\text{кр}}(1-\pi)-\pi^2}. \qquad (24)$$

Таким образом, решение задачи можно представить в такой последовательности:

1. По справочным данным определяем $\mu_{**}$.
2. По формуле (8) и (18) находим значение $\pi_{\text{кр}}$ (или $P_{\text{кр}}$) и $\pi^*_{\text{кр}}$.
3. Находим $\pi = \dfrac{P_{\text{окр.ср}}}{P_0}$ и при $\pi_{\text{кр}} \le \pi \le \pi^*_{\text{кр}}$ по формуле (22) или (24) $\mu$. При $\pi < \pi_{\text{кр}}$ $\mu = \mu_{**}$.
4. Далее определяем по известному коэффициенту расхода $\mu$ (или $\mu_{**}$) коэффициент скорости (в сжатом или выходном сечении отверстия) $\varphi$.
5. Если $\pi > \pi_{\text{кр}}$, то скорость находим по (6).
6. Если $\pi \le \pi_{\text{кр}}$ и истечение происходит через отверстие в тонкой стенке (в т. ч. через суживающееся коническое сопло – отверстие с различным углом наклона стенки) или сопло имеет цилиндрический (либо плавно суживающийся) профиль, то скорость истечения, соответственно, за выходным сечением отверстия в струе и на срезе сопла будет равна критической, и ее определяют по формуле (7) для критической скорости. При этом все остальные параметры в этих сечениях также будут критическими.

Следует отметить, что в выходном сечении отверстия в тонкой стенке продольная составляющая средней скорости никогда не достигает критической скорости. Таким образом, при использовании отверстия в тонкой стенке или суживающегося конического сопла получить скорость равной и больше критической на срезе невозможно. Невозможно получить скорость больше критической и при использовании цилиндрических и плавно суживающихся профилированных сопел (без учета сдува пограничного слоя на выходе).

Для получения скорости истечения больше критической (т.е. сверхзвуковой) необходимо использовать сопла Лаваля (рис. 7), имеющие сужающуюся и расширяющуюся части. В общем случае, минимальное сечение сопла Лаваля не соответствует критическому, в котором достигается критическая скорость. Критическое сечение располагается ниже по потоку в расширяющейся части сопла (рис. 8). Для того чтобы внутри сопла параметры потока изменялись непрерывно и в потоке за пределами сопла отсутствовали скачки уплотнения (ударные волны), сопло должно иметь специальный профиль, рассчитанный на данные условия работы (давление окружающей среды, давление и температура торможения, расход газа, необходимая скорость на выходе). В таких соплах коэффициенты истечения (скорости, расхода) близки к единице ($\mu$

ISSN 2225-6733

(или $\mu_{**}$) $\cong \varphi \cong 1$) и $\pi_{кр} = \pi^*_{кр}$, критическое сечение практически совпадает с минимальным. Однако на практике чаще всего сопло имеет профиль, соответствующий конической поверхности (рис. 7). При этом угол наклона образующей (угол конусности) обычно короткой сужающейся части к оси сопла $\beta$ может изменяться в широких пределах ($5^0 \leq \beta < 90^0$), а угол раскрытия $2\gamma$ конической поверхности расширяющейся части обычно не превышает $10 \div 14^0$ (реже до $30\text{-}40^0$). Коэффициенты истечения ($\mu$ и $\mu_{**}$, $\varphi$ и $\sigma$) зависят от угла наклона образующей суживающейся части сопла $\beta$. При этом, также как в случае профилированного сопла, $\pi_{кр} \cong \pi^*_{кр}$ (в связи с образованием за минимальным сечением зоны отрыва с давлением ниже атмосферного). Некоторое скругление конической образующей сужающейся части в области минимального сечения сопла (рис. 5) или использование цилиндрической поверхности в качестве образующей горла сопла приводит к существенному ослаблению влияния угла наклона образующей суживающейся части на коэффициенты истечения, приближая их значения к соответствующим величинам для профилированного сопла [15-17, 26].

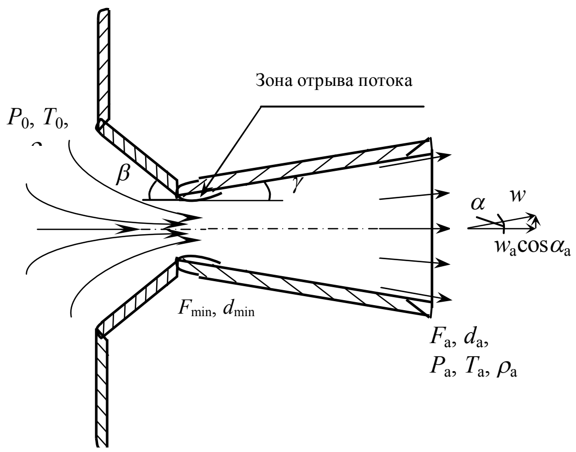


Рис. 7 – Коническое сопло Лаваля

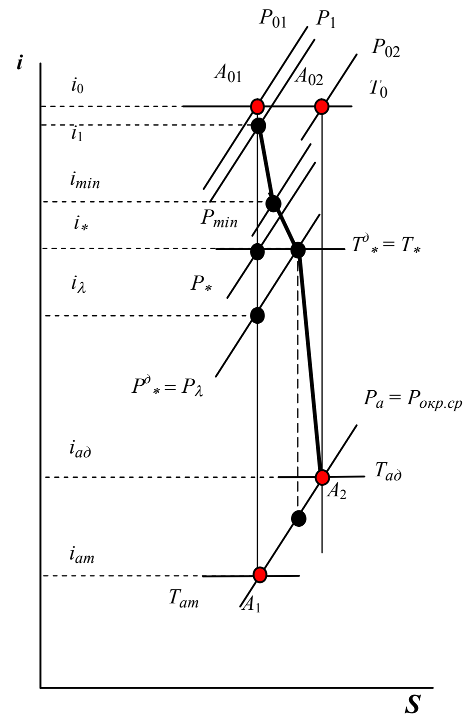


Рис. 8 – Процесс расширения газа в соплах Лаваля на $iS$-диаграмме

Необходимо отметить, следуя [24], что коэффициент скорости $\varphi$ может возрастать при наличии ощутимых газодинамических потерь по сравнению с потерями на трение с ускорением потока вдоль сопла Лаваля, что согласуется с мнением [12, 17]. К примеру, при сверхкритических перепадах давления в минимальном сечении сопла Лаваля (как и в выходном сечении суживающегося сопла), пренебрегая потерями полного давления до этого сечения из-за вязких потерь,

$$\varphi_{min} = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{кр}} = \lambda_{min} \quad \text{и} \quad q(\lambda_{min}) = \mu, \tag{25}$$

где $\mu$ – коэффициент расхода сопла Лаваля; $\lambda_{min}$ – приведенная скорость в этом сечении (рис. 8).

В критическом сечении, которое находится в расширяющейся части невязкого потока (или сопла Лаваля), в соответствии с данными [24]

ISSN 2225-6733

$$\varphi_{\text{кр}} = \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \left( \sqrt{\frac{\mu^2 + k^2 - 1}{(k-1)^2}} - \frac{\mu}{k-1} \right)^{-1}, \qquad \varphi_{\text{кр}} > \varphi_{\min}. \tag{26}$$

Потери полного давления на участке между минимальным и критическим сечениями или, пренебрегая к тому же потерями до выходного сечения, между минимальным и выходным

$$\sigma = \frac{P_{0\text{кр}}}{P_{0\min}} = \mu \cdot q(\lambda), \tag{27}$$

где $q(\lambda)$ – приведенный расход в сечении расширяющейся части сопла с теоретической скоростью $\lambda$, где достигается критическая скорость и расположено действительное критическое сечение (рис. 8); $P_{0\text{кр}}$, $P_{0\min}$ – полное давление соответственно в критическом и минимальном сечениях сопла.

Тогда в выходном сечении

$$\varphi_a = \frac{\mu}{\sigma} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2_{a\,теор}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \varphi_a^2 \lambda^2_{a\,теор}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{1}{q(\lambda)} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2_{a\,теор}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \varphi_a^2 \lambda^2_{a\,теор}} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad \varphi_a > \varphi_{кр}. \tag{28}$$

При известном значении коэффициента расхода сопла $\mu$ (обычно определяемого экспериментально) расчет коэффициентов скорости $\varphi$, восстановления полного давления $\sigma_a = P_{0a}/P_0$ не вызывает затруднений.

Для определения действительных коэффициентов истечения из сопел в некоторых работах используется выражение, которое справедливо в сугубо теоретическом случае адиабатного расширения газа в соплах до выходного сечения, где давление в потоке должно быть равно давлению окружающей среды («квазирасчетное» истечение) [4 и др.]:

$$\varphi_{a(P_a = P_\infty)} = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{k+1}{k-1} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2}{\lambda_a^2 \mu} \right)^2 + \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\lambda_a^2}} - \frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2}{\lambda_a^2 \mu}, \tag{29}$$

т.е. другими словами, определяются такие потери скорости, чтобы при той же неизменной площади выходного сечения получить давление на выходе, равное давлению в окружающей среде, что некорректно.

Представленную методику можно использовать вместе с полученной из эксперимента величиной второго критического отношения давления при запертом режиме для сопел с различным углом конусности образующих, для определения давления в зоне отрыва потока (рис. 7) за минимальным сечением в соплах Лаваля.

## Выводы

1. Результаты аналитического исследования режимов истечения газа из отверстий (сопел) показали, что одномерная модель может с успехом использоваться для расчета параметров истечения из отверстий (сопел) разной конфигурации его сужающейся части; позволяет правильно оценить изменения основных параметров потока в каналах отверстий.
2. Анализ проведенных исследований и расчетов указывает на то, что коэффициенты расхода на запертых режимах истечения для сужающихся и сужающихся-расширяющихся отверстий (сопел Лаваля) одинаковы, одинаковы при этом и параметры в критическом сечении, наблюдаемом за горлом этих отверстий. При этом существуют потери полного давления, и коэффициент восстановления полного давления примерно равен коэффициенту расхода. При незапертых режимах в диапазоне от второго до первого критических отношений давления $\pi_{\text{кр}} \le \pi \le \pi^*_{\text{кр}}$ потери полного давления снижаются.
3. Задачами дальнейших исследований являются: уточнение ряда расчетных зависимостей для определения коэффициента сжатия струи и коэффициента восстановления полного давления при незапертых режимах истечения, учет вязких эффектов при определении коэффициентов истечения.

4. Полученные результаты можно использовать в качестве приложений в энергетике, металлургии и др. при разработке различных дутьевых и горелочных устройств.

**Список использованных источников:**

1. Меркулова Н.М. История механики газа / Н.М. Меркулова. – М. : Наука, 1978. – 232 с.
2. Франкль Ф.И. О задачах С.А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений / Ф.И. Франкль // Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1945. – Т.9, № 2. – С. 121-142.
3. Франкль Ф.И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками / Ф.И. Франкль // Докл. АН СССР. – 1947. – Т.58, № 3. – С. 381-384.
4. Газовые турбины авиационных двигателей / Г.С. Жирицкий, В.И. Локай, М.К. Максутова, В.А. Стрункин. – М. : Оборонгиз, 1963. – 608 с.
5. Benson R.S. Compressible flow through a two-dimensional slit / R.S. Benson, D.E. Pool // Int. J. Mech. Sci. – 1965. – V.7, № 5. – P. 315-353.
6. Wehover S. Transonic flow in conical convergent and convergent–divergent nozzles with nonuniform inlet conditions / S. Wehover, W.C. Moger // AIAA Paper. – 1970. – № 70. – P. 635.
7. Соколов В.Д. Коэффициент расхода осесимметричных сужающихся сопл с произвольным контуром / В.Д. Соколов, С.В. Ягодин // Уч. зап. ЦАГИ. – 1975. – Т.6, № 1. – С. 117-121.
8. Дейч М.Е. Техническая газодинамика / М.Е. Дейч. – М. : Энергия, 1974. – 592 с.
9. О критических режимах истечения перегретого и влажного пара из сопл, щелей и отверстий / М.Е. Дейч, В.К. Шанин, В.И. Соломко, В.А. Дорошенко / Теплоэнергетика. – 1973. – № 4. – С. 83-85.
10. Fenain M. Calcul des perfor mances d'une tuyère propulsive convergente. Comparaison avec l'expèrience / M. Fenain, L. Dutouquet, J.-L. Solignac // Recherche Aèrospatiale. – 1974. – № 5. – P. 261-276.
11. Танг С.П. Экспериментальное определение коэффициента расхода осесимметричного сверхзвукового сопла / С.П. Танг, Дж.Б. Фенн // РТК. – 1978. – Т.16. – № 1. – С. 53-60.
12. Тагиров Р.К. Теоретическое исследование течения идеального газа в сужающихся соплах / Р.К. Тагиров // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1978. – № 2. – С. 198-202.
13. Истечение газов с различными показателями адиабаты / Г.А. Филиппов, Г.А. Салтанов, В.А. Сивобород, Ю.С. Косолапов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1982. – № 1. – С. 121-126.
14. Косолапов Ю.С. Расчетно-теоретическое исследование истечения газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий / Ю.С. Косолапов, В.А. Сивобород. // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 2. – С. 109-115.
15. Абалаков Г.В. Экспериментальное исследование критических расходомерных сопел с прямолинейными образующими проточной части / Г.В. Абалаков, В.М. Чефанов, А.П. Герасимов // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 1987. – № 2. – С. 3-7.
16. Абалаков Г.В. Влияние диаметра входа и радиуса скругления входной кромки горловины на коэффициент расхода сопел с прямолинейными образующими / Г.В. Абалаков, В.М. Чефанов, А.П. Герасимов // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 1989. – №3. – С. 78-80.
17. Тагиров Р.К. Влияние пограничного слоя на расход и удельный импульс сужающегося сопла / Р.К. Тагиров // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 1988. – № 1. – С. 77-81.
18. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2 / Л.И. Седов. – М. : Наука. – 1988. – 424 с.
19. Черный Г.Г. Газовая динамика / Г.Г. Черный. – М. : Наука. – 1970. – 568 с.
20. Погорелов В.И. Газодинамические расчеты пневматических приводов / В.И. Погорелов. – Л. : Машиностроение, 1971. – 184 с.
21. Пирумов У.Г. Обратная задача теории сопла / У.Г. Пирумов. – М. : Машиностроение, 1988. – 240 с.
22. Ленцов И.А. Определение коэффициента расхода сужающихся и сверхзвуковых сопел с прямолинейными образующими проточной части / И.А. Ленцов, Н.В. Гудкова // Изв. ВУЗов. Черная металлургия. – № 1. – 1991. – С. 88-89.
23. Лухтура Ф.И. О потерях энергии при течении газа в соплах. Часть I / Ф.И. Лухтура // Вісник Приазовського державного технічного університету. – 2004. – Вип. 14. – С. 287-292.
24. Лухтура Ф.И. О потерях энергии при течении газа в соплах. Часть 2 / Ф.И. Лухтура // Вісник Приазовського державного технічного університету. – 2005. – Вип. 15. – С. 167-172.

25. Лухтура Ф.И. О потерях энергии при течении газа в соплах. Часть 3 / Ф.И. Лухтура // Вісник Приазовського державного технічного університету. – 2007. – Вип. 17. – С. 187-185.
26. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Ч. 1 / Г.Н. Абрамович. – М. : Наука, 1991. – 600 с.
27. Годунов С.К. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной / С.К. Годунов, А.В. Забродин, Г.П. Прокопов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т.1. – № 6. – С. 1020-1050.

**Bibliography:**

1. Merkulova N.M. History of a mechanics gas / N.M. Merkulova. – M. : Nauka, 1978. – 232 p. (Rus.)
2. Frankl´ F.I. About S.A. Tshapligin problems for blended up to and supersonic flows / F.I. Frankl´ // Izv. AN SSSR. Ser. matematitsheskaya. – 1945. – T.9, № 2. – P. 121-142. (Rus.)
3. Frankl´ F.I. The expiration of a supersonic jet from a vessel with flat walls / F.I. Frankl´ // Dokl. AN SSSR. – 1947. – T.58, № 3. – P. 381-384. (Rus.)
4. Gas turbines of aero-engines / G.S. Zhiritskii, V.I. Lokay, M.K. Maksutova, V.A. Strunkin. – M. : Oborongiz, 1963. – 608 p. (Rus.)
5. Benson R.S. Compressible flow through a two-dimensional slit / R.S. Benson, D.E. Pool // Int. J. Mech. Sci. – 1965. – V.7, № 5. – P. 315-353.
6. Wehover S. Transonic flow in conical convergent and convergent–divergent nozzles with nonuniform inlet conditions / S. Wehover, W.C. Moger // AIAA Paper. – 1970. – № 70. – P. 635.
7. Sokolov V.D. Flow coefficient of axisymmetrical convergented nozzles with an arbitrary contour / V.D. Sokolov, S.V. Yagodin // Utsh. zap. TsAGI. – 1975. – T.6, № 1. – P. 117-121. (Rus.)
8. Deitsh M.E. Technical gas dynamics / M.E. Deitsh. – M. : Energia, 1974. – 592 p. (Rus.)
9. On critical modes of the expiration an overheated and wet pair from nozzles, slots and holes / M.E. Deitsh, V.K. Shanin, V.I. Solomko, V.A. Doroshenko / Teploenergetika. – 1973. – № 4. – P. 83-85. (Rus.)
10. Fenain M. Calcul des perfor mances d'une tuyère propulsive convergente. Comparaison avec l'expèrience / M. Fenain, L. Dutouquet, J.-L. Solignac // Recherche Aèrospatiale. – 1974. – № 5. – P. 261-276. (Fr.)
11. Tang S.P. Experimental definition of a flow coefficient of an axisymmetrical supersonic nozzle / S.P. Tang, Jh.B. Fenn // RTK. – 1978. – T.16. – № 1. – P. 53-60. (Rus.)
12. Tagirov R.K. Theoretical exploration of flow of ideal gas in convergent nozzles / R.K. Tagirov // Izv. AN SSSR. MZhG. – 1978. – № 2. – P. 198-202. (Rus.)
13. The expiration of gases with various parameters of an adiabat / G.A. Fillipov, G.A. Saltanov, V.A. Sivoborod, Yu.S. Kosolapov // Izv. AN SSSR. Energetika i trasport. – 1982. – № 1. – P. 121-126. (Rus.)
14. Kosolapov Yu.S. Computational theoretical exploration of gas efflux from flat slots and axisymmetrical holes / Yu.S. Kosolapov, V.A. Sivoborod // Izv. AN SSSR. MZhG. – 1984. – № 2. – P. 109-115. (Rus.)
15. Abalakov G.V. Experimental exploration of critical Venturi-type nozzles with straight-line generator a flowing part / G.V. Abalakov, V.M. Tshefanov, A.P. Gerasimov // Izv. VUZov. Aviatsionnaya tekhnika. – 1987. – № 2. – P. 3-7. (Rus.)
16. Abalakov G.V. Influence of an inlet diameter and radius of rounding of a lip of a port on a flow coefficient of nozzles with straight–line generator / G.V. Abalakov, V.M. Tshefanov, A.P. Gerasimov // Izv. VUZov. Aviatsionnaya tekhnika. – 1989. – №3. – P. 78-80. (Rus.)
17. Tagirov R.K. Boundary layer effect on the consumption and specific impulse of a convergented nozzle / R.K. Tagirov // Izv. VUZov. Aviatsionnaya tekhnika. – 1988. – № 1. – P. 77-81. (Rus.)
18. Sedov L.I. Mechanics of continuum. T.2 / L.I. Sedov. – M. : Nauka. – 1988. – 424 p. (Rus.)
19. Tshernii G.G. Gas dynamics / G.G. Tshernii. – M. : Nauka. – 1988. – 424 p. (Rus.)
20. Pogorelov V.I. Gas dynamics calculations of pneumatic traction mechanisms / V.I. Pogorelov. – L. : Mashinostroeniye, 1971. – 184 p. (Rus.)
21. Pirumov U.G. Revertive problem of the theory of a nozzle / U.G. Pirumov. – M. : Mashinostroeniye, 1988. – 240 p. (Rus.)
22. Lentsov I.A. Definition of a flow coefficient of convergented and supersonic nozzles with straight-

line generator a flowing part / I.A. Lentsov, N.V. Gudkova // Izvestiya VUZov. Tshyornaya метallurgia. – 1991. – № 1. – P. 88-89. (Rus.)
23. Lukhtura F.I. About energy losses at flow of gas in nozzles. Part 1 / F.I. Lukhtura // Reporter of the Priazovskyi state technical university. – 2004. – Issue 14. – P. 287-292. (Rus.)
24. Lukhtura F.I. About energy losses at flow of gas in nozzles. Part 2 / F.I. Lukhtura // Reporter of the Priazovskyi state technical university. – 2005. – Issue 15. – P. 167-172. (Rus.)
25. Lukhtura F.I. About energy losses at flow of gas in nozzles. Part 3 / F.I. Lukhtura // Reporter of the Priazovskyi state technical university. – 2007. – Issue 17. – P. 187-185. (Rus.)
26. Abramovitsh G.N. Applied gas dynamics. Part 1 / G.N. Abramovitsh. – M. : Nauka, 1991. – 600 p. (Rus.)
27. Godunov S.K. The incremental scheme for the two-dimensional non-stationary problems of gas dynamics and calculation of flowing around with a stepping back shock wave / S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, G.P. Prokopov // J. Vitsheslitelnaya matematika i matematitsheskaya fizika. – 1961. – T.1. – № 6. – P. 1020-1050. (Rus.)

Рецензент: В.А. Маслов
д-р техн. наук, проф., ГВУЗ «ПГТУ»

Статья поступила 27.05.2015