

## ОБЛАДНАННЯ ТА РЕМОНТИ

УДК 621.9.014.2

©Ищенко А.А.<sup>1</sup>, Ширяев А.В.<sup>2</sup>, Дегтяренко И.А.<sup>3</sup>

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ НА ПЛОЩАДКЕ КОНТАКТА

*Рассмотрены теоретические основы и дан анализ напряжений, возникающих в контакте деталей, изготовленных из стали и композитных материалов. Предложены зависимости для определения контактных напряжений для плоской задачи теории упругости.*

**Ключевые слова:** контакт, напряжения, упругие тела, плоская контактная задача, теория упругости.

*Ищенко А.О., Ширяев О.В., Дегтяренко И.О. Дослідження контактних напруж пружних тіл за наявності сил тертя на майданчику контакту. Розглянуті теоретичні основи і даний аналіз напруж, що виникають в контакті деталей, виготовлених із сталі і композитних матеріалів. Запропоновані залежності для визначення контактних напруж для плоского задачі теорії пружності.*

**Ключові слова:** контакт, напруги, пружні тіла, плоске контактне задача, теорія пружності.

*A.O. Ischenko, O.V. Shiryayev, I.O. Degtyarenko. Research of contact tensions of elastic bodies in the presence off friction forces in the contact area. Theoretical bases are considered and the analysis of tensions, arising up in the contact of partss, composite materials made from steel and, is given. Offered to dependence for determination of contact tensions for the flat task of theory of resiliency.*

**Keywords:** contact, tensions, resilient bodies, flat contact task theory of resiliency.

**Постановка проблемы.** Задачи, возникающие при взаимодействии упругих тел, являются весьма распространенными в технике. Особую актуальность они приобрели в связи с широким применением композиционных материалов для ремонта металлургических агрегатов. В связи с этим, решение контактных задач для тел с весьма отличающимися упругими свойствами является важной научной проблемой.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Основоположником решения контактных задач теории упругости является Г. Герц. В течение последних ста лет его теория явилась источником возникновения ряда сильных математических методов и значительного числа работ, посвященных различным случаям контакта – контакту в точке, контакту по линии, прямой или кривой, контакту по части поверхности. Большие исследования в этой области были выполнены А.Н. Динником и Н.М. Беляевым. В их работах приведены как общие случаи контакта двух тел, так и частные случаи контакта шара с плоскостью, цилиндром, шаром, двух цилиндров и т. д. И.Я. Штаерман получил решение задачи, допуская, что между соприкасающимися телами, ограниченными осесимметричными поверхностями, происходит касание любого порядка. А.И. Лурье получил решение задачи о плотном прилегании штампа. Им же был рассмотрен ряд задач о круглом, эллиптическом, плоском и неплюском штампе. Задача о плотном прилегании осесимметричного штампа рассматривалась также Я.С. Уфляндом. Впервые задача о

<sup>1</sup> д-р техн. наук, профессор, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь

<sup>2</sup> канд. техн. наук, доцент, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь

<sup>3</sup> ст. преподаватель, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь

вдавливании в упругое полупространство штампа с плоским основанием произвольной формы в плане рассмотрена Л.А. Галиным [3]. Им получены значения верхней и нижней оценок для величины силы, под действием которой штамп перемещается поступательно на заданную глубину. Задача о давлении на упругое полупространство квадратного в плане штампа исследовалась в работах М.Я. Леонова, С.А. Посацкого, А.Н. Иващенко, В.М. Леоновой.

Несмотря на достаточное количество работ, посвященных контакту тел различной формы, в результате литературного обзора не найдено достаточно простое решение для контакта двух упругих тел.

**Цель статьи** – теоретическое исследование напряжений в контакте тел с различными упругими свойствами.

**Изложение основного материала.** При восстановлении проектных размеров проёмов станин прокатных станов используют новую технологию применения композитных материалов путём его нанесения на внутреннюю поверхность съёмных защитных планок станины в специально выполненные фрезерованные канавки либо цилиндрические углубления. В первом случае композитный материал находится в плоскодеформированном состоянии, во втором – в объёмном. На первом этапе рассмотрим плоскую задачу, как более простую. Примем следующее упрощение: композитный материал в канавке является отдельной деталью и не соединен с металлом защитной планки.

Задачу оценки прочности представленной конструкции можно разбить на ряд этапов:

- определение контактных напряжений в месте соприкосновения полуплоскости с деталью из композитного материала;
- определение компонентов напряженного состояния в месте соединения;
- определение максимума эквивалентных напряжений в детали и оценка прочности в этих точках.

В детали из композита реализуется как плоская, так и объёмная деформация, но на первом этапе с целью экспериментальной проверки полученных зависимостей, проведено исследование для двух видов плоской задачи теории упругости.

Считаем, что длина тел значительно больше их размеров по оси  $x$ , поэтому задача сводится к плоской деформации (перемещение точек тел вдоль площадки контакта отсутствует –  $w=0$ , но напряжения вдоль площадки не равны нулю). На каждое сечение действует удельная сила  $P$ , равная отношению суммарной нагрузки к длине тел.

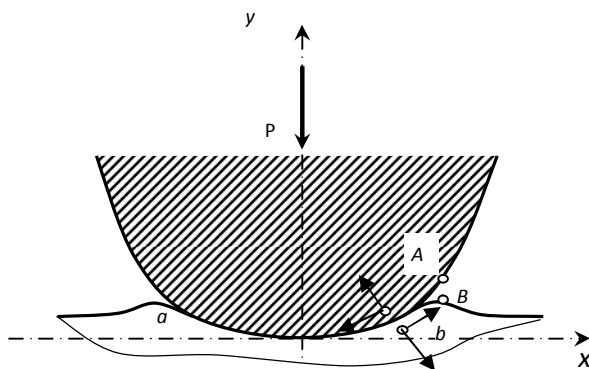


Рис. 1 – Схема контакта двух упругих тел

Решение этой задачи выполняется по методике [3]. Полагаем, что радиусы кривизны обоих тел велики по сравнению с размерами площадки контакта и поэтому, каждое из этих тел можно заменить полуплоскостью (рис. 1).

Для установления соотношений между перемещениями, которое должно иметь место на площадке контакта рассмотрим

уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела, до деформации:

$$y_1 = f_1(x); y_2 = -f_2(x). \tag{1}$$

Начало координат поместим в точке первоначального касания тел. Под действием сил первое тело получит перемещение  $\delta_1$ , а второе тело — перемещение  $\delta_2$ . Кроме того, точка  $A$ , расположенная на поверхности первого тела, и вступающая с ней в контакт точка  $B$ , которая находится на поверхности второго тела, в результате происшедшей упругой деформации получит соответственно перемещения  $v_1$  и  $v_2$  в направлении оси  $y$ .

Так как координаты точек  $A$  и  $B$  после вступления их в контакт становятся одинаковыми, то это позволяет найти условие, связывающее перемещения обоих тел, которое при  $y = 0$  примет вид:

$$v_1 + v_2 = \delta_1 + \delta_2 - f_1(x) - f_2(x) \quad (2)$$

В дальнейшем придется иметь дело с производными от перемещений  $f_1$  и  $f_2$  по координате  $x$ . Из (2) находим

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{y=0} = -f_1'(x) - f_2'(x) \quad (3)$$

Нормальное давление, действующее на первое тело вдоль площадки контакта, совпадает с нормальным давлением, которое действует на второе тело. Можно записать:

где  $\xi$  – переменная интегрирования интеграла Коши.

После преобразований и введения констант  $k$  и  $m$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\pi E_1}{2(1-\nu_1^2)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_{y=0} &= \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{d\xi}{\xi-x} + \frac{1-2\nu_1}{2-2\nu_1} \pi (\tau_{xy})_{y=0}; \\ \frac{\pi E_2}{2(1-\nu_2^2)} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{y=0} &= \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{d\xi}{\xi-x} - \frac{1-2\nu_2}{2-2\nu_2} \pi (\tau_{xy})_{y=0}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{d\xi}{\xi-x} - m \pi (\tau_{xy})_{y=0} = -\frac{1}{k} [f_1'(x) + f_2'(x)], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} k &= \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} + \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2}; \\ m &= \frac{\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{E_1} - \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2}}{\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}} \end{aligned}$$

Аналогично задаче для штампа [3], введем функции  $\omega_1(z)$  и  $\omega_2(z)$ , являющиеся интегралами Коши, плотности которых равны соответственно величинам нормального давления и тангенциального усилия на границе полуплоскости:

Эти функции определены в нижней полуплоскости. Как известно [3], нормальные давления, действующие на первое тело вдоль площадки контакта, совпадает с нормальным давлением, действующим на второе тело. Точно так же равны по абсолютной величине и тангенциальные усилия. Таким образом, задача о контакте двух тел, из которых одно заменяется верхней, а другое нижней полуплоскостью, приводится к отысканию функций только в нижней полуплоскости.

Рассмотрим два варианта данной задачи: контакт в условиях отсутствия сил трения и при наличии сил трения, если одно из тел имеет микро- или макроперемещения (что характерно для контакта деталей металлургических машин).

$$\begin{aligned} \omega_1(z) = u_1 - i v_1 &= \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{d\xi}{\xi-x}; \\ \omega_2(z) = u_2 - i v_2 &= \int_a^b (\sigma_y)_{y=0} \frac{d\xi}{\xi-x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда граничные условия выглядят следующим образом:

1. Случай, когда на площадке контакта отсутствуют силы трения. Тангенциальные усилия отсутствуют,  $\omega_2(z) = 0$ , тогда граничные условия:

- вне площадки контакта  $v_1 = 0$ ;
- на площадке контакта  $u_1 = -(1/k)f_1(x)$ .

2. Случай, когда на площадке контакта имеют место силы трения. Пусть коэффициент трения равен  $\rho$ . В таком случае:

- вне площадки контакта  $v_1 = 0; v_2 = 0$ ;
- на площадке контакта

$$u_1 - m v_2 = -\frac{1}{k} [f_1'(x) + f_2'(x)]; v_2 - \rho v_1 = 0. \quad (7)$$

Условие  $v_2 - \rho v_1 = 0$  позволяет свести задачу также к определению одной функции  $\omega_1(z)$ . Решения однородной задачи в данном случае (по аналогии со штампом и с некоторыми изменениями) имеют следующий вид:

$$\omega_1(z) = \exp\left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{m}{\rho}\right) \times \int_a^b \frac{dx}{x-z}\right] \times \frac{iP(z)}{(z-a)(z-b)} \quad (8)$$

Здесь  $P(z)$  – некоторый полином (который, в частности, может быть принят равным  $(z-a)(z-b)$ , когда будет получено простейшее решение).

Кроме того, так как уравнение контура штампа  $f(x)=c$ , то  $f'(x)=0$ , и условия для определения функции  $\omega_1(z) = u_1 - iv_1$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 = 0 &\rightarrow -\infty < x < a; \\ u_1 + \rho \frac{1-2\nu}{2-2\nu} v_1 = 0 &\rightarrow a < x < b; \\ v_1 = 0 &\rightarrow b < x < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом,  $\omega_1(z)$  определяется из решения однородной задачи, и поэтому она может быть получена из функций:

При этом  $|\theta| < 1$  и, таким образом, удовлетворяется одно из требований, налагаемых на функцию  $\omega_1(z)$ , которая может иметь только интегрируемые особенности.

Используя алгоритм решения, приведенный в работе [3] и опуская промежуточные выводы, получим решение, в котором функция  $\omega_1(z)$  выраженная через единичную нагрузку  $P$ , может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \omega_1^{(0)}(z) &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^\theta, \omega_1^{(0)}(z) = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\theta-1}, \\ \theta &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m}{\rho}. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\omega_1(z) = \frac{P}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \times \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\frac{1}{2}-\theta}, \quad (11)$$

Здесь, в отличие от работы [3], показатель  $\theta$  учитывает упругие свойства обеих контактирующих тел.

Для определения давления, действующего на границу упругого тела, выделяем мнимую часть функции  $\omega_1(z)$ :

$$p(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im}[\omega_1(z)]_{z=x-i0}.$$

В интервале, где  $a < x < b$ , будем иметь

$$\omega_1(z)|_{z=x} = \frac{iP}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \times \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{1}{2}-\theta} \times e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\pi\theta\right)}, \quad (12)$$

отсюда

$$p(x) = P \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}-\theta}, \quad (13)$$

Если расположить начало координат в середине штампа, обозначив  $a$  вместо  $b$  и  $-a$  вместо  $a$ , то получим:

$$p(x) = P \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}-\theta}, \quad (14)$$

Для удобства исследования распределения нормального давления на площадке контакта введем безразмерную координату  $\xi=x/a$  ( $-1 < \xi < +1$ ), тогда:

$$p(\xi) = P \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi a} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{1}{2}-\theta}, \quad (15)$$

Вышеприведенное решение задачи при наличии сил трения является более общим случаем. Его можно легко применить и для случая отсутствия сил трения, т.е. в этом случае  $\rho=0$ . Тогда показатель  $\theta=1/2$  и, подставляя его значение в (14) получим формулу давления на поверхности упругого тела:

$$p_0(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{P}{\sqrt{(a^2-x^2)}}. \quad (16)$$

Это выражение идентично зависимости, полученной в [3] для контакта абсолютно жесткого штампа с упругой полуплоскостью.

Особенности зависимостей (13)-(15) является то, что показатель степени  $(1/2 - \theta)$  должен быть положительным. То есть, в формулах коэффициентов  $k$  и  $m$  первое тело – всегда обладает более упругими свойствами, в противном случае сила трения меняет направление и знак степени в (13)-(15) следует изменить на обратный. Кроме того, вышеприведенные зависимости неприменимы для случая контакта двух тел, с равными упругими характеристиками. Тогда показатель  $\theta$  обращается в ноль и давления в выражениях (13)-(15) тоже равны нулю, чего не может быть.

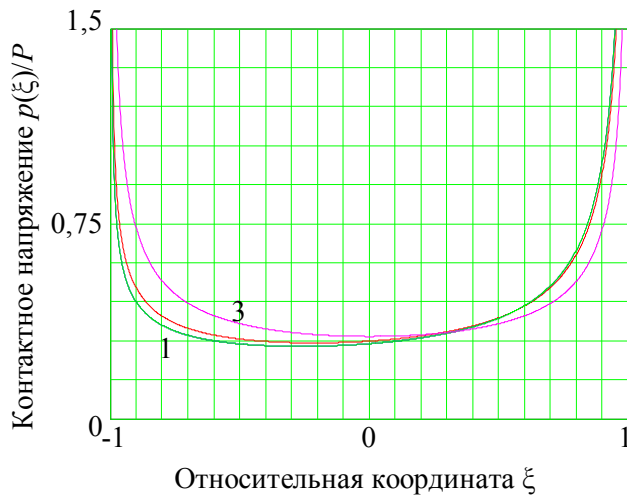


Рис. 2 – Распределение напряжений в контакте: 1 – упругие тела (пластик-сталь) и 2 – абсолютно жесткий штамп и упругая полуплоскость при наличии трения в контакте; 3 – упругие тела и штамп при отсутствии сил трения

отсутствия.

2. Выявлено ограничение в применении полученных зависимостей для тел с близкими упругими свойствами.
3. Для сопоставления с реальным распределением напряжений в упругом теле необходимо выполнить исследования на образцах из оптически активного материала методом фотоупругости.

**Список использованных источников:**

1. Контактные задачи теории упругости / Моссаковский В.И. и др. – К. :Наук.думка,1985. – 176 с.
2. Справочник машиностроителя. Том III / Под ред. С.В. Серенсена, Н.С. Ачеркана. – М. : ГНТИМЛ, 1951. – 1098 с.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М. : Гостехиздат, 1953. – 264 с.

В качестве примера рассчитаны контактные напряжения для тел из эпоксидной смолы ( $E_1=3 \cdot 10^4$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_1=0,35$ ) и стали ( $E_2=2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_2=0,3$ ). Графики изменения относительных давлений вдоль площадки контакта в относительных координатах для двух рассмотренных случаев, представлены на рис. 2. Очевидно, что при таком соотношении упругих характеристик распределение давления в контакте сталь-материал на основе эпоксидной смолы весьма близки к давлению штампа с упругой полуплоскостью.

**Выводы**

1. Выведены теоретические зависимости контактных напряжений двух упругих тел, одно из которых имеет конечные размеры как для случая наличия сил трения в контакте, так и в случае их

4. Развитие теории контактных задач в СССР / Под общ. ред. Л.А. Галина и др. – М. : Наука, 1976. – 492 с.
5. Трение, изнашивание и смазка : Справочник. В 2-х кн. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. – М. : Машиностроение, 1978. – Кн. 1. 1978. – 400 с.

**Bibliography:**

1. Contact tasks of theory of resiliency / Mossakovskiy V.I. and other. – К. :Naukova dumka, 1985. – 176 p. (Rus.)
2. Reference book of machine builder. Т. III / Under rel. S.V. Serensen, N.S. Achercan. – М. : GNTIML, 1951. – 1098 p. (Rus.)
3. Galin L.A. Contact tasks of theory of resiliency. – М. : Gostehizdat, 1953. – 264 p. (Rus.)
4. Development of theory of contact tasks in USSR / Under rel. L.A. Galin and as. – Science, 1976. – 492 p. (Rus.)
5. Friction, wear and greasing: Reference book. In 2 b. / Under rel. I.V. Kragelskiy, V.V. Alisin. – М. : Mashinostroenie, 1978. – В. 1. 1978. 400 p. (Rus.)

Рецензент: В.М. Кравченко  
д-р техн. наук, проф. ГВУЗ «ПГТУ»

Статья поступила 6.02.2012

УДК 621.9.014.2

©Ищенко А.А.<sup>1</sup>, Ширяев А.В.<sup>2</sup>, Фесенко Е.А.<sup>3</sup>, Ширяев И.А.<sup>4</sup>

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ПОКОЯ ПЛАСТМАСС  
СО СТАЛЬЮ**

*Рассмотрены результаты экспериментального исследования коэффициента трения покоя в контакте образцов из оптически-активного материала на основе эпоксидной смолы ЭП-40 со стальной плоскостью. Приведена конструкция установки типа «наклонная плоскость» для исследования коэффициентов трения образцов из различных материалов. Предложены экспериментальные зависимости для определения коэффициентов трения эпоксидной смолы по металлу при различных контактных напряжениях.*

**Ключевые слова:** контакт, напряжения, коэффициент трения, наклонная плоскость, эпоксидная смола.

*Ищенко А.О., Ширяев О.В., Фесенко Є.О., Ширяєв І.О. Дослідження коефіцієнта тертя спокою пластмас зі сталлю. Розглянуті результати експериментального дослідження коефіцієнта тертя спокою в контакті зразків з оптично-активного матеріалу ЕП-40 із сталевую площиною. Приведена конструкція установки типу «площина, похилої», для дослідження коефіцієнтів тертя зразків з різних матеріалів. Запропоновані експериментальні залежності для визначення коефіцієнтів тертя ЕП-40 по металу при різних контактних напругах.*

**Ключові слова:** контакт, напруги, коефіцієнт тертя, площина, похилої, епоксидна смола.

<sup>1</sup> д-р техн. наук, профессор, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь  
<sup>2</sup> канд. техн. наук, доцент, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь  
<sup>3</sup> студент гр. МЗ-07, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь  
<sup>4</sup> аспирант, ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет», г. Мариуполь