УДК517.977.56

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

ГИБКИНА Н.В., МАРТЫНЕНКО М.С., СИДОРОВ М.В.

Рассматривается одна из возможных постановок задач оптимального управления нагревом однородной пластины. Под оптимальным управлением понимается такой режим нагрева сторон пластины, при котором в конечный момент времени в пластине устанавливается температурный режим, наиболее близкий (в смысле среднеквадратической метрики) к желаемому распределению температур.

Введение

Актуальность исследования. Математическое моделирование процессов распространения тепла и диффузии является одной из важнейших задач при описании многих технических и производственных процессов, а также при изучении целого ряда естественнонаучных проблем. Формально эти процессы могут быть описаны дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа, т.е. так называемыми уравнениями теплопроводности. С помощью математических моделей теплопроводности могут быть исследованы процессы нагрева материалов во время их обработки, процессы диффузии, связанные с набуханием, увлажнением, экстрагированием, а также процессы сушки, адсорбции, кристаллизации и комбинированной термической и тепло-диффузионной обработки, в частности обработки полимеров, вулканизации резинотехнических изделий и др. [1, 14]. Эффективная организация технологических процессов, при реализации которых происходит распространение тепла, непосредственно связана с определением наилучших режимов протекания этих процессов. Решение данной задачи направлено на улучшение организации процесса производства, снижение уровня энергетических и материальных затрат, повышение качества выпускаемой продукции. Математически принятие решения о том, какое из возможных управлений является наилучшим, определяется значением функционала специального вида, структура которого зависит от целей управления. В большинстве случаев для описания процессов теплопроводности приходится использовать многомерные модели, что объясняется сложностью и разнообразием реальных объектов и рассматриваемых технологических процессов.

Таким образом, формальное представление разнообразных способов управления процессами распространения тепла, дальнейшее исследование и усовершенствование существующих методов оптимального управления данными процессами, а также разработка новых методов решения этой задачи является актуальной научной проблемой. Результаты данной работы распространяются на двумерный случай [12].

Задачи оптимального управления процессами распространения тепла решаются в основном с использованием сеточных методов в сочетании с методами оптимизации (например, методы проекции градиента и условного градиента) [3, 4, 8], а также методов, основанных на разложении в ряды Фурье [1, 2, 6].

Обоснование задач оптимального управления, в которых модель системы описывается начально-краевой задачей для параболического уравнения, проведено в [5, 11].

Одной из основных трудностей, связанных с решением задач оптимального управления, является сложность как самой математической модели, так и реализации соответствующих математических методов, что, в свою очередь, приводит к невозможности получения результатов, удобных для дальнейшего практического использования. Глубокие исследования задач оптимального управления процессами теплопереноса в настоящее время стали возможными во многом благодаря применению ЭВМ, которые позволяют численно решать задачи оптимизации и находить приближенные выражения для оптимальных управлений.

Цель и задачи исследования. Целью настоящего исследования является разработка математических методов оптимального управления нагревом сторон однородной пластины для установления в конечный момент времени в ней такого температурного режима, который будет как можно более близким к желаемому распределению температур.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– сформулировать задачу оптимального управления процессом теплопроводности в однородной пластине;

– используя метод Фурье, получить решение задачи теплопроводности в однородной пластине (без внутренних источников тепла) при заданных краевых и начальном условиях;

– выбрать управляющие воздействия в виде отрезка двойного ряда Фурье;

– провести вычислительные эксперименты для разных параметров процесса оптимального управления нагревом нижней стороны однородной пластины в целях установления в конечный момент времени в этой пластине такой температуры, которая будет как можно более близкой к желаемому распределению температур.

1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную пластину $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ (внутренние источники тепла отсутствуют) с заданным температурным режимом на ее сторонах. Через $u = u(x, y, t)$ обозначим температуру пластины в точке

(x, y) в момент времени t. Пусть $\varphi(x, y)$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ – распределение температуры в пластине в начальный момент времени $t = 0$. Требуется так управлять температурой на сторонах пластины при $t \in [0, T)$, чтобы к некоторому моменту времени $T > 0$ распределение температуры в пластине стало как можно более близким к заданному распределению температур $z(x, y)$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

Процесс распространения тепла в однородной пластине $\overline{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$ описывается двумерным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \ (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \qquad (1)$$

при начальном

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y), \ (x, y) \in \overline{\Omega} \qquad (2)$$

и краевых условиях:

$$u\big|_{x=0} = \nu_1(y, t), \ u\big|_{x=a} = \nu_2(y, t), \ t \ge 0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{y=0} = \mu_1(x, t), \ u\big|_{y=b} = \mu_2(x, t), \ t \ge 0, \qquad (4)$$

где k^2, a, b – заданные положительные константы; $\varphi(x, y)$ – заданная функция из $L_2(\Omega)$.

Предполагаем, что выполнено условие согласования:

$$\nu_1(y, 0) = \varphi(0, y), \ \nu_2(y, 0) = \varphi(a, y),$$

$$\mu_1(x, 0) = \varphi(x, 0), \ \mu_2(x, 0) = \varphi(x, b).$$

Известно [10], что при выполнении этих условий существует единственное классическое решение задачи (1)-(4).

Формальная постановка задачи оптимального управления нагревом однородной пластины в целях выведения её температуры в конечный момент времени на заданный температурный режим заключается в следующем: необходимо минимизировать функционал

$$J(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) = \left\| u(x, y, T; \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) - z(x, y) \right\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(u(x, y, T; \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}) - z(x,y) \right)^2 dxdy \qquad (5)$$

при условии, что $u = u(x, y, t) = u(x, y, t; \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu})$ является решением начально-краевой задачи (1)-(4).

Предполагается, что $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1(y, t), \nu_2(y, t))$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1(x, t), \mu_2(x, t))$ – управления, принадлежащие множеству

$$M = \{\boldsymbol{\nu} \in L_2(Q_T^y) \times L_2(Q_T^y), \boldsymbol{\mu} \in L_2(Q_T^x) \times L_2(Q_T^x),$$

$$\nu_1^{\min} \le \nu_1(y, t) \le \nu_1^{\max}, \ \nu_2^{\min} \le \nu_2(y, t) \le \nu_2^{\max}$$

почти всюду на $\overline{Q}_T^y$,

$$\mu_1^{\min} \le \mu_1(x, t) \le \mu_1^{\max}, \ \mu_2^{\min} \le \mu_2(x, t) \le \mu_2^{\max}$$

почти всюду на $\overline{Q}_T^x\}$, (6)

где

$$Q_T^x = (0, a) \times (0, T), \ Q_T^y = (0, b) \times (0, T);$$

$$\nu_1^{\min} < \nu_1^{\max}, \ \nu_2^{\min} < \nu_2^{\max}, \ \mu_1^{\min} < \mu_1^{\max}, \ \mu_2^{\min} < \mu_2^{\max}.$$

На управления $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\mu}$ можно накладывать и другие ограничения, аналогичные рассмотренным в [1, 11] для одномерного случая.

Исследование разрешимости задачи (1)-(6) проводится аналогично одномерному случаю, рассмотренному в [4].

2. Построение оптимального управления

На первом этапе необходимо получить решение задачи (1)-(4) методом Фурье. Для этого сделаем замену

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + v(x, y, t), \qquad (7)$$

где $v(x, y, t)$ – новая неизвестная функция, а

$$w(x, y, t) =$$

$$= \frac{1}{(a-x)(b-y)x + xy(b-y) + xy(a-x) + (a-x)(b-y)y} \times$$

$$\times \big[(a-x)(b-y)x\mu_1(x, t) + xy(b-y)\nu_2(y, t) +$$

$$+ xy(a-x)\mu_2(x, t) + (a-x)(b-y)y\nu_1(y, t) \big]. \qquad (8)$$

Функция $w(x, y, t)$ выбрана так, чтобы удовлетворять неоднородным краевым условиям (3), (4).

Тогда функция $v(x, y, t)$ будет решением начально-краевой задачи с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \qquad (9)$$

$$v\big|_{t=0} = \psi(x, y), \ (x, y) \in \overline{\Omega}, \qquad (10)$$

$$v\big|_{x=0} = 0, \ v\big|_{x=a} = 0, \ t \ge 0, \qquad (11)$$

$$v\big|_{y=0} = 0, \ v\big|_{y=b} = 0, \ t \ge 0, \qquad (12)$$

где

$$f(x, y, t) = k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad (13)$$

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) - w(x, y, 0). \qquad (14)$$

Собственные значения задачи (9)-(12) есть [7] $\lambda_{nm} = \pi^2\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]$, $n, m = 1, 2, \ldots$, а соответствующие им собственные функции $\Phi_{nm}(x)$ имеют вид [7]:

$$\Phi_{nm}(x, y) = \sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b},\ n, m = 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что $\|\Phi_{nm}\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{ab}{4}$.

Решение задачи (9)-(12) будем искать в виде ряда:

$$v(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nn}(t)\Phi_{nm}(x, y). \quad (15)$$

Подставив ряд (15) в уравнение (9) и начальное условие (10), получим, что функции $T_{nm}(t)$, $n, m = 1, 2, \ldots$, являются решением задач Коши

$$T'_{nm}(t) + \lambda_{nm}k^2 T_{nm}(t) = f_{nm}(t),$$

$$T_{nm}(0) = \psi_{nm},$$

где

$$\psi_{nm} = \frac{\left(\psi, \Phi_{nm}\right)_{L_2(\Omega)}}{\|\Phi_{nm}\|^2_{L_2(\Omega)}}, \quad (16)$$

$$f_{nm}(t) = \frac{\left(f, \Phi_{nm}\right)_{L_2(\Omega)}}{\|\Phi_{nm}\|^2_{L_2(\Omega)}}, \quad (17)$$

и имеют вид:

$$T_{nm}(t) = \psi_{nm}e^{-\lambda_{nm}k^2 t} + \int_0^t f_{nm}(\tau)e^{-\lambda_{nm}k^2(t-\tau)}d\tau, \quad (18)$$

где $n, m = 1, 2, \ldots$

С учетом (7), (15) и (18) решение задачи (1)-(4) имеет вид:

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) + \sum_{n,m=1}^{\infty} \psi_{nm}e^{-\lambda_{nm}k^2 t}\Phi_{nm}(x, y) +$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty}\int_0^t f_{nm}(\tau)\, e^{-\lambda_{nm}k^2(t-\tau)}d\tau \cdot \Phi_{nm}(x, y). \quad (19)$$

Для упрощения дальнейших выкладок положим, что $\nu_1(y, t) = 0$, $\nu_2(y, t) = 0$, $\mu_2(x, t) = 0$. Тогда процесс нагрева сторон пластины сводится к нагреву только одной из ее сторон (а именно, нижней стороны). При этом функцию $w(x, y, t)$ можно взять в виде:

$$w(x, y, t) = g(x, y)\mu_1(x, t),$$

где $g(x, y) = \frac{(a - x)(b - y)x}{y + (a - x)(b - y)x}$.

Будем считать, что функция $z(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$z(0, y) = z(a, y) = z(x, b) = 0.$$

Аппроксимацию функции $\mu_1(x, t)$ будем искать в виде

$$\mu_1(x, t) = \sum_{j=1}^{r} q_j Q_j(x, t), \quad (20)$$

где $\{Q_j\}$ – система базисных функций в $L_2(Q_T^x)$.

При этом

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) - \sum_{j=1}^{r} q_j g(x, y)Q_j(x, 0),$$

$$f(x, y, t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} q_j\left[k^2\Delta\left(g(x, y)\cdot Q_j(x, t)\right) - g(x, y)\frac{\partial Q_j(x, t)}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} q_j\left[k^2\left(Q_j\Delta g + g\frac{\partial^2 Q_j}{\partial x^2} + 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial Q_j}{\partial x}\right) - g\frac{\partial Q_j}{\partial t}\right].$$

Тогда с учетом (16), (17) получим

$$\psi_{nm} = \varphi_{nm} - \sum_{j=1}^{r} q_j \Psi^{(j)}_{nm},\ n, m = 1, 2, \ldots, \quad (21)$$

$$f_{nm}(t) = \sum_{j=1}^{r} q_j F^{(j)}_{nm}(t),\ n, m = 1, 2, \ldots, \quad (22)$$

где

$$\varphi_{nm} = \frac{4}{ab}\iint_\Omega \varphi(x, y)\Phi_{nm}(x, y)dxdy,$$

$$\Psi^{(j)}_{nm} = \iint_\Omega g(x, y)Q_j(x, 0)\Phi_{nm}(x, y)dxdy,$$

$$F^{(j)}_{nm}(t) =$$

$$= \frac{4k^2}{ab}\iint_\Omega\left(Q_j\Delta g + g\frac{\partial^2 Q_j}{\partial x^2} + 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial Q_j}{\partial x}\right)\Phi_{nm}(x, y)dxdy -$$

$$- \frac{4}{ab}\iint_\Omega g\frac{\partial Q_j}{\partial t}\Phi_{nm}(x, y)dxdy.$$

Подставив (21)-(22) в (19), получим

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm}e^{-\lambda_{nm}k^2 t}\Phi_{nm}(x, y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} q_j\left[g(x, y)Q_j(x, t) + \right. \quad (23)$$

$$\left. + \sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\int_0^t F^{(j)}_{nm}(\tau)e^{\lambda_{nm}k^2\tau}d\tau - \Psi^{(j)}_{nm}\right)e^{-\lambda_{nm}k^2 t}\Phi_{nm}(x, y)\right].$$

При $t=T$ выражение (23) принимает вид:

$$u(x,y,T)=A(x,y)+\sum_{j=1}^{r}q_jB_j(x,y), \qquad (24)$$

где

$$A(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{nm}e^{-\lambda_{nm}k^2T}\Phi_{nm}(x,y),$$

$$B_j(x,y)=g(x,y)Q_j(x,T)+$$

$$+\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\int_0^T F_{nm}^{(j)}(\tau)e^{\lambda_{nm}k^2\tau}d\tau-\Psi_{nm}^{(j)}\right)e^{-\lambda_{nm}k^2T}\Phi_{nm}(x,y).$$

С учетом выражения (24) задача (5)-(6) оптимального управления нагревом однородной пластины в целях установления в ней в конечный момент времени температуры, как можно более близкой к заданному температурному режиму $z(x,y)$, сводится к задаче оптимизации:

$$J(\nu,\boldsymbol{\mu})=\iint_{\Omega}\left(A(x,y)+\sum_{j=1}^{r}q_jB_j(x,y)-z(x,y)\right)^2dxdy=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}q_j^2\delta_j+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=j+1}^{r}q_jq_i\gamma_{ji}+\sum_{j=1}^{r}q_j\sigma_j+\eta\to\min_{q_j,\,j=\overline{1,r}}, \qquad (25)$$

где

$$\delta_j=\iint_{\Omega}B_j^2dxdy,\quad j=\overline{1,r},$$

$$\gamma_{ji}=2\iint_{\Omega}B_jB_idxdy,\quad j=\overline{1,r},\quad i=\overline{j+1,r},$$

$$\sigma_j=2\iint_{\Omega}(A(x,y)-z(x,y))B_jdxdy,\quad j=\overline{1,r},$$

$$\eta=\iint_{\Omega}(A(x,y)-z(x,y))^2dxdy.$$

Задачу оптимизации (25) нужно дополнить ограничениями на управление (6) или другими [1, 11].

3. Вычислительный эксперимент

Будем считать, что начальное распределение температур в пластине $\varphi(x,y)=0$.

Управление $\mu_1(x,t)$ будем искать в виде отрезка двойного ряда Фурье:

$$\mu_1(x,t)=\sum_{i+j=0}^{L}\left(q_{ij}^{(1)}\cos\frac{\pi ix}{a}\cos\frac{\pi jt}{T}+\right.$$

$$+q_{ij}^{(2)}\sin\frac{\pi ix}{a}\cos\frac{\pi jt}{T}+q_{ij}^{(3)}\cos\frac{\pi ix}{a}\sin\frac{\pi jt}{T}+$$

$$\left.+q_{ij}^{(4)}\sin\frac{\pi ix}{a}\sin\frac{\pi jt}{T}\right).$$

На управление $\mu_1(x,t)$ накладываются следующие ограничения:

$$\mu_1(0,t)=0,\quad \mu_1(a,t)=0,$$

$\mu_1(x,0)=0$ почти всюду на $[0,a]$,

$$0\le\mu_1(x,t)\le 30,\quad t\in(0,a)\times(0,T].$$

Вычислительный эксперимент в задаче оптимального управления (5)-(6) был проведен при следующих значениях параметров: $a=1$, $b=1$, $T=1$, $k=1$.

Выражение $\mu_1(x,t)$ аппроксимировалось отрезками двойного ряда Фурье при $L=1$, $L=2$, $L=3$. При $L=1$ функция нагрева $\mu_1(x,t)$ строилась в виде:

$$\mu_1(x,t)= \qquad (26)$$

$$=q_{00}^{(1)}+q_{01}^{(1)}\cos\pi t+q_{01}^{(3)}\sin\pi t+q_{10}^{(1)}\cos\pi x+q_{10}^{(2)}\sin\pi x,$$

при $L=2$ – в виде:

$$\mu_1(x,t)= \qquad (27)$$

$$=q_{00}^{(1)}+q_{01}^{(1)}\cos\pi t+q_{01}^{(3)}\sin\pi t+q_{10}^{(1)}\cos\pi x+q_{10}^{(2)}\sin\pi x+$$

$$+q_{02}^{(1)}\cos2\pi t+q_{02}^{(3)}\sin2\pi t+q_{20}^{(1)}\cos2\pi x+q_{20}^{(2)}\sin2\pi x+$$

$$+q_{11}^{(1)}\cos\pi x\cos\pi t+q_{11}^{(2)}\sin\pi x\cos\pi t+$$

$$+q_{11}^{(3)}\cos\pi x\sin\pi t+q_{11}^{(4)}\sin\pi x\sin\pi t,$$

а при $L=3$ – в виде:

$$\mu_1(x,t)= \qquad (28)$$

$$=q_{00}^{(1)}+q_{01}^{(1)}\cos\pi t+q_{01}^{(3)}\sin\pi t+q_{10}^{(1)}\cos\pi x+q_{10}^{(2)}\sin\pi x+$$

$$+q_{02}^{(1)}\cos2\pi t+q_{02}^{(3)}\sin2\pi t+q_{20}^{(1)}\cos2\pi x+q_{20}^{(2)}\sin2\pi x+$$

$$+q_{03}^{(1)}\cos3\pi t+q_{03}^{(3)}\sin3\pi t+q_{30}^{(1)}\cos3\pi x+q_{30}^{(2)}\sin3\pi x+$$

$$+q_{11}^{(1)}\cos\pi x\cos\pi t+q_{11}^{(2)}\sin\pi x\cos\pi t+$$

$$+q_{11}^{(3)}\cos\pi x\sin\pi t+q_{11}^{(4)}\sin\pi x\sin\pi t+$$

$$+q_{12}^{(1)}\cos\pi x\cos2\pi t+q_{12}^{(2)}\sin\pi x\cos2\pi t+$$

$$+q_{12}^{(3)}\cos\pi x\sin2\pi t+q_{12}^{(4)}\sin\pi x\sin2\pi t+$$

$$+q_{21}^{(1)}\cos2\pi x\cos\pi t+q_{21}^{(2)}\sin2\pi x\cos\pi t+$$

$$+q_{21}^{(3)}\cos2\pi x\sin\pi t+q_{21}^{(4)}\sin2\pi x\sin\pi t.$$

Случай 1. Желаемое распределение температур в конечный момент времени $T=1$ имеет вид: $z(x,y)=xy(1-x)(1-y)$. График функции $z(x,y)$ приведен на рис. 1. Для оптимальной функции нагрева в виде (26) качество оптимизации оценивается значениями

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}62\cdot 10^{-1},$$

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0{,}33\cdot 10^{-1},$$

в виде (27) – значениями

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}51\cdot 10^{-2},$$

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0{,}27\cdot 10^{-2},$$

а в виде (28) – значениями

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}16\cdot 10^{-2},$$

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0{,}89\cdot 10^{-3}.$$

Результат сравнения желаемой и фактической температур в пластине в конечный момент времени $T=1$ для случая, когда оптимальное управление ищется в виде (27), приведен на рис. 2.

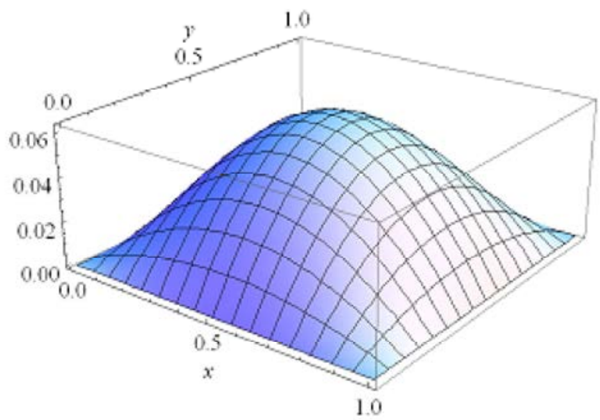

Рис. 1. График функции $z(x,y)=xy(1-x)(1-y)$

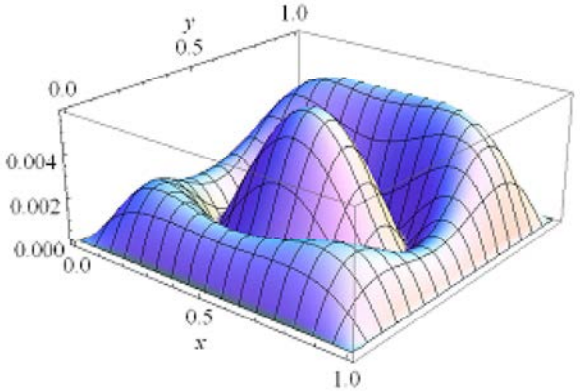

Рис. 2. График разности $|u(x,y,T)-z(x,y)|$

На рис. 3 приведен график оптимального выражения для функции $\mu_1(x,t)$ нагрева нижней стороны пластины вида (27) при $t\in[0,1]$. Графики этой функции при разных фиксированных значениях t из отрезка $[0,1]$ приведены на рис. 4.

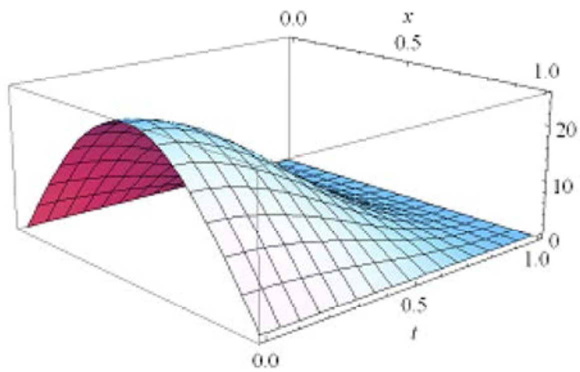

Рис. 3. График функции $\mu_1(x,t)$ оптимального управления нагревом нижней стороны пластины вида (27)

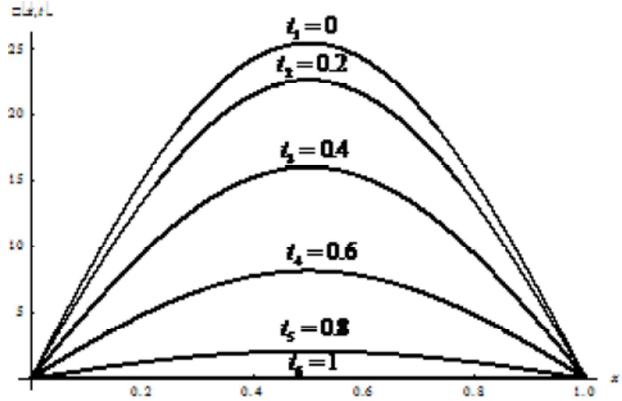

Рис. 4. Графики функций $\mu_1(x,t_k)$ вида (27) в разные моменты времени $t_k\in[0,1]$

Случай 2. Желаемое распределение температур в конечный момент времени $T=1$ имеет вид: $z(x,y)=x(1-x)(1-y)$. График функции $z(x,y)$ приведен на рис. 5. Для оптимальной функции нагрева в виде (26) качество оптимизации оценивается значениями

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}79\cdot 10^{-1},$$

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0{,}42\cdot 10^{-1},$$

а в виде (27) – значениями

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}87\cdot 10^{-2},$$

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0{,}58\cdot 10^{-2},$$

а в виде (28) – значениями

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}17\cdot 10^{-2},$$

$$\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0{,}49\cdot 10^{-2}.$$

Результат сравнения желаемой и фактической температур в пластине в конечный момент времени $T = 1$ для случая, когда оптимальное управление ищется в виде (27), приведен на рис. 6.

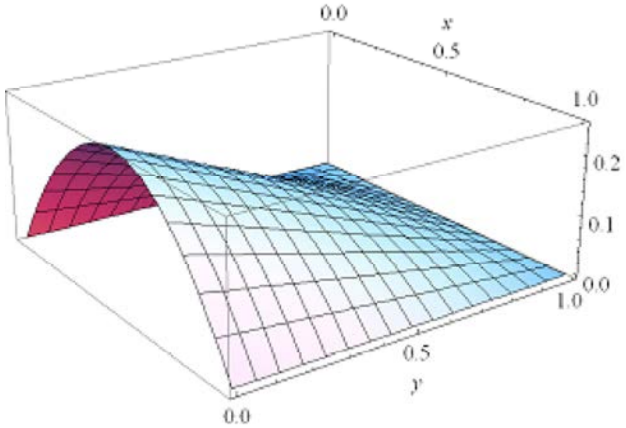

Рис. 5. График функции $z(x, y) = x(1 - x)(1 - y)$

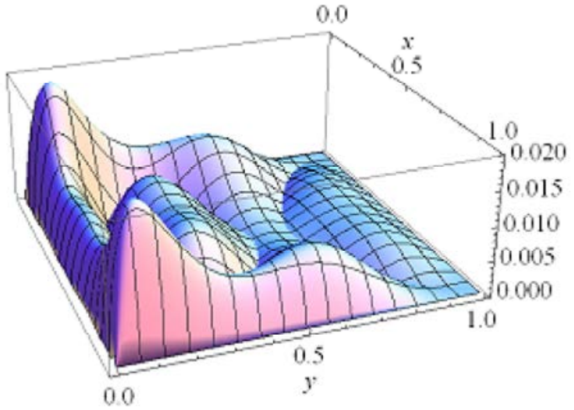

Рис. 6. График разности $|u(x, y, T) - z(x, y)|$

На рис. 7 приведен график оптимального выражения для функции $\mu_1(x,t)$ нагрева нижней стороны пластины вида (27) при $t \in [0,1]$. Графики этой функции при разных фиксированных значениях t из отрезка $[0,1]$ приведены на рис. 8.

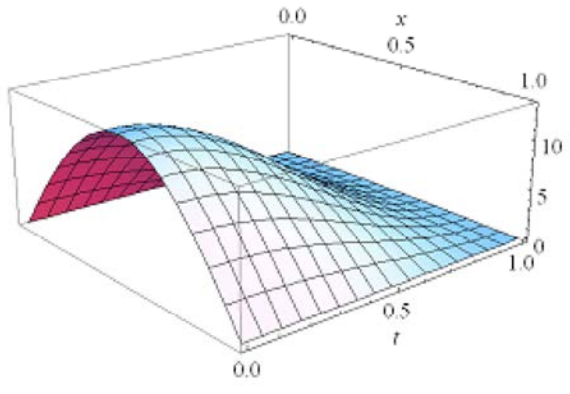

Рис. 7. График функции $\mu_1(x,t)$ оптимального управления нагревом нижней стороны пластины вида (27)

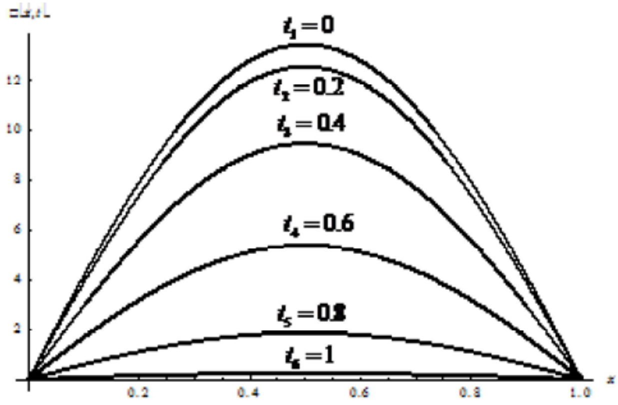

Рис. 8. Графики функций $\mu_1(x, t_k)$ вида (27) в разные моменты времени $t_k \in [0,1]$

Выводы

Предложен метод оптимального управления нагревом сторон однородной пластины в целях установления в конечный момент времени в ней такого температурного режима, который будет как можно более близким к желаемому распределению температур. В качестве управляющего воздействия рассмотрена температура нижней грани пластины. Управляющую функцию предложено аппроксимировать отрезком двойного ряда Фурье. Проведены вычислительные эксперименты для различных температурных режимов $z(x, y)$ в конечный момент времени T. Результаты вычислительного эксперимента показали, что с увеличением числа слагаемых в аппроксимирующем выражении погрешность уменьшается. Выбор аппроксимирующего выражения для управляющего воздействия определяется техническими возможностями производственного процесса.

Преимуществом предложенного метода оптимального управления является то, что начально-краевая задача теплопроводности решается аналитически и оптимальное управление также ищется в аналитическом виде. Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчете оптимальных программ управления температурным режимом в производственных технических процессах, например, [13]. Это и определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

Литература: **1.** *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. **2.** *Бутырин В.И., Фильштинский Л.А.* Оптимальное управление температурным полем в стержне при программном изменении зоны управления // Прикладная механика. 1976. Т. 12, №8. С. 115 – 118. **3.** *Вабищевич П.Н.* Вычислительные методы математической физики. Обратные задачи и задачи управления. М.: Вузовская книга, 2009. 268 с. **4.** *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. Ч. II. Мн.: МНЦНМО, 2011. 434 с. **5.** *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с. **6.** *Лисковец О.А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. М.: Наука и техника, 1981. 344 с. **7.** *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с. **8.** *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с. **9.** *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004. 416 с. **10.** *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с. **11.** *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с. **12.** *Гибкина Н.В., Подусов Д.Ю., Сидоров М.В.* Оптимальное управление конечным температурным состоянием однородного стержня // Радиоэлектроника и информатика. 2014. №2. С. 9-15. **13**. *Клопотов В.Д., Нестеренко В.П.* Математическое моделирование тепловых процессов в режущем инструменте // Изв. Томского политехнического университета. 2005. Т. 308, № 3. С.125-128. **14.** *Коновалов В.И., Пахомов А.Н., Гатапова Н.Ц., Колиух А.Н.* Методы решения задач тепломассопереноса. Теплопроводность и диффузия в неподвижной среде: учеб. пособие. Тамбов: Издво ТГТУ, 2005. 80 с.

Поступила в редколлегию 20.05.2015

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Гибкина Надежда Валентиновна, канд. техн. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, оптимальное управление и его приложения, математическая физика, актуарная и финансовая математика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Мартыненко Михаил Сергеевич, студент группы СА-11-1 факультета прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование и оптимальное управление, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

УДК519.713

ПРО ПОБУДОВУ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ДОДАТНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЕЛІПТИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЮ МАЖОРАНТОЮ

ЛУХАНІН В.С.

Розглядаються питання існування, єдиності та побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку однієї еліптичної крайової задачі з експоненціальною нелінійністю. Описуються умови, яким мають задовольняти параметри, що входять до нелінійності, щоб двосторонні наближення можна було побудувати.

Ключові слова: двосторонні наближення, інваріантний конусний відрізок, додатний розв'язок.

Key words: two-sided approximations, invariant cone segment, positive solution.

Вступ

Разом із зростанням можливостей обчислювальної техніки сьогодні збільшується зацікавленість до процесів, які відбуваються у нелінійних середовищах. Математичними моделями процесів у таких середовищах є нелінійні крайові задачі математичної фізики, оскільки лінійні не зовсім адекватно описують фізичну реальність. Досить часто такі моделі мають вигляд

$$-\Delta u = f(\mathbf{x},u) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \quad u > 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Метод двосторонніх наближень належить до ітераційних методів та дозволяє отримати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації. Ще однією з переваг цього методу у порівнянні з іншими є відносна простота реалізації алгоритму, який в свою чергу вимагає менше обчислювальних ресурсів.

1. Постановка задачі та побудова двосторонніх наближень

Дослідимо можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку еліптичної крайової задачі [1]

$$-\Delta u = \lambda\left(e^{u} + e^{\gamma u}\right) \text{ в } \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\lambda, \gamma - \text{const}). \tag{2}$$

Відомо [2], що задача (1), (2) у класі неперервних функцій еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s},$$

де $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω, $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m)$, $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_m)$.

На конусі K невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій введемо в розгляд нелінійне операторне рівняння

$$u = Tu,$$

де

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\lambda\left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right)d\mathbf{s}. \tag{3}$$

Відомо, що конус невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій є нормальним, крім того, оскільки

$$f(\mathbf{x},u) = \lambda\left(e^{u(\mathbf{x})} + e^{\gamma u(\mathbf{x})}\right) \tag{4}$$

неперервна за u, оператор T, відображаючи простір $C(\Omega)$ в себе, цілком неперервний [2, 3].

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (3).