

# Ruta más corta: soluciones algorítmicas para movilidad eficiente en la malla vial de Cundinamarca. Programación dinámica

JAIR EDUARDO ROCHA GONZÁLEZ<sup>1</sup>  
CÉSAR FERNANDO GÓMEZ TRIANA<sup>2</sup>  
PEDRO JOSÉ SÁNCHEZ CAIMÁN<sup>3</sup>

## RESUMEN

Este documento presenta la metodología y los resultados parciales del estudio para establecer un modelo de ruta más corta (SPP) para la conexión terrestre entre puntos geográficos de Cundinamarca con relevancia económica con el fin de mejorar las decisiones tácticas en materia de ruteo. Para este propósito, se establecen diferencias significativas en cuanto al desempeño computacional que emplean algunas técnicas matemáticas, las cuales surgen de una revisión sistemática de problemas similares realizados en contextos nacionales e internacionales, por medio de un análisis de contraste entre las diferentes técnicas.

**Palabras clave:** ruta más corta, eficiencia algorítmica, movilidad regional, optimización de rutas.

<sup>1</sup> Ingeniero industrial. Magíster en Ingeniería Industrial. Profesor de la Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jair.rocha@unimilitar.edu.co

<sup>2</sup> Ingeniero mecatrónico. Asistente de Investigación de la Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: cesar.gomez@unimilitar.edu.co

<sup>3</sup> Ingeniero industrial. Magíster en Logística. Candidato a doctor en Ingeniería. Profesor de la Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: pedro.sanchez@unimilitar.edu.co

FECHA DE RECEPCIÓN: 20 DE DICIEMBRE DE 2013 • FECHA DE APROBACIÓN: 28 DE MARZO DE 2014

Cómo citar este artículo: Rocha González, J. E., Gómez Triana, C. F. y Sánchez Caimán, P. J. (2014). Ruta más corta: soluciones algorítmicas para movilidad eficiente en la malla vial de Cundinamarca. Programación dinámica. *Épsilon* (23), 63-84.

## *Shortest Path: Algorithmic solutions for efficient mobility in the road network of Cundinamarca. Dynamic programming*

### ABSTRACT

This paper presents the methodology and partial results of the study to establish a model of the Shortest Path Problem (SPP) for terrestrial connection between geographical points of economic importance in Cundinamarca in order to improve tactical routing decisions. For this purpose, significant differences are established in terms of the computational performance of some mathematical techniques, which arise from a systematic review of similar problems in national and international contexts, through a contrast analysis between different techniques.

**Keywords:** shortest path, algorithmic efficiency, regional mobility, route optimization.

---

### *Rota mais curta: soluções algorítmicas para mobilidade eficiente na rede rodoviária de Cundinamarca. Programação dinâmica*

### RESUMO

Este documento apresenta a metodologia e os resultados parciais do estudo para estabelecer um modelo de rota mais curta (SPP) para a conexão terrestre entre pontos geográficos de Cundinamarca com relevância econômica com a finalidade de melhorar as decisões táticas no que se refere ao sistema de rotas. Para este propósito, se estabelecem diferenças significativas em quanto ao desempenho computacional que empregam algumas técnicas matemáticas, e que surgem de uma revisão sistemática de problemas similares realizados em contextos nacionais e internacionais, por meio de uma análise de contraste entre as diferentes técnicas.

**Palavras chave:** rota mais curta, eficiência algorítmica, mobilidade regional, otimização de rotas.

## Introducción

De acuerdo con los estudios gubernamentales y regionales sobre competitividad desarrollados en Cundinamarca, las necesidades al respecto hacen referencia al bajo desarrollo e investigación en temáticas como la optimización de procesos, la renovación tecnológica, los sistemas de monitoreo, la innovación en productos y la implementación de nuevas tecnologías para optimización de procesos (Observatorio de Competitividad de Cundinamarca, 2011). Adicionalmente, Bogotá se constituye como el principal mercado interno y la plataforma de despacho o recepción en materia de comercio internacional con negocios que ascienden en 2009 a US\$4300 millones, con origen y destino en la región de Cundinamarca (Gobernación de Cundinamarca, 2010). De igual manera, los municipios del Departamento han sido clasificados según su vocación económica, con lo cual es primordial la inclusión de estos en la consolidación de una red logística eficiente, que permita la mejora de la competitividad y la toma de decisiones en el ruteo y transporte de mercancía o personas entre las localidades de la región, para contribuir a la consolidación e integración regional enmarcada desde los principios de la organización de economías locales globalizadas (Gobernación de Cundinamarca, 2010).

Por esta razón, este estudio partió de la definición del SPP (Dijkstra, 1959; Dantzig, 1960; Floyd, 1962), para posteriormente realizar una recopilación de las técnicas empleadas en la solución de problemas de este tipo (Daskin, 1995; Magnanti y Wong, 1984). Aquí se analizarán cuáles técnicas presentan ventajas en el contexto del problema para ser seleccionadas como métodos de solución a la formulación de un modelo de ruteo que contribuya a la movilidad regional entre los diversos municipios de Cundinamarca, con el fin de analizar las oportunidades que brindan cada una de las técnicas para encontrar las fortalezas de cada una a partir de un análisis de contraste estadístico (Santos, Coutinho-Rodrigues y Current, 2007) en cuanto al tiempo de ejecución y error sobre la solución óptima del problema, con el objetivo de determinar cuáles técnicas permiten establecer una ruta con corto tiempo de ejecución y con mínimo error sobre la solución óptima al problema.

## Antecedentes

En los últimos años, una de las preocupaciones del Gobierno colombiano y sus regiones ha sido la formulación de planes de competitividad y productividad dentro

de una conciencia de sostenibilidad en las actuaciones de los agentes implicados en los procesos económicos y de generación de valor agregado en los territorios con vocación industrial, agrícola o comercial disponibles. De esta manera, la incorporación en el Plan Nacional de Competitividad y Productividad de políticas de aplicación de tecnología e incorporación de conocimiento útil al sector productivo (Departamento Nacional de Planeación [DNP], 2008) adquiere relevancia, en especial en el desarrollo de técnicas que contribuyan a alcanzar las metas económicas propuestas por la región de Bogotá, Cundinamarca, en exportaciones, inversión, promoción de cadenas y clústeres productivos y proyectos de impacto regional (Consejo Regional de Competitividad [CRC], 2009).

De acuerdo con lo dicho, esta investigación busca contribuir al plan maestro de movilidad regional para Bogotá, Cundinamarca, mediante la determinación de una estrategia de mejora de la movilidad regional en la malla vial que comunica los diferentes municipios, veredas y corregimientos del Departamento, permitiendo la sostenibilidad ambiental y social e indirectamente la desconcentración de población y actividad económica (Universidad del Rosario, Centro de Pensamiento en Estrategias Competitivas, 2011).

Esta estrategia enfocada a la movilidad regional se fundamenta en la solución del problema de ruta más corta (SPP por sus siglas en inglés, *Shortest Path Problem*) (Dijkstra, 1959; Dantzig, 1960; Floyd, 1962), en el que se identifica una ruta con mínimo costo en una red de flujo para conectar un nodo de inicio con un nodo de finalización, definidos con antelación, atravesando —de ser necesario— nodos intermedios conectados por arcos de comunicación, los cuales simbolizan la conexión entre dos nodos de la red (Santos, Coutinho-Rodrigues y Current, 2007); aquí el costo mínimo para el caso previsto representa la distancia mínima por recorrer entre dos puntos o nodos (Cervantes Castaños, 2004). Desde su formulación a finales de los años cincuenta, el SPP, por ser un problema de flujo en redes, es considerado como un problema de tipo NP-completo. A pesar de esto, es uno de los pocos problemas de este tipo para el cual existen algoritmos eficientes con tiempo de solución polinómico (Daskin, 1995; Magnanti y Wong, 1984).

Así mismo, el SPP se ha resuelto por medio de aproximaciones que van desde métodos heurísticos clásicos como el algoritmo de Dijkstra, en el cual se halla la ruta con mínima longitud total entre dos nodos, utilizando una técnica de búsqueda con bifurcación en el árbol de la red (Dijkstra, 1959); este es uno de los métodos

eficientes en cuestión de tiempo polinómico de solución (Yu y Yang, 1998). También se usa el algoritmo de Bellman-Ford, que resuelve el problema de ruta más corta para longitudes de arco negativas. Del mismo modo, el problema SPP se ha resuelto utilizando programación dinámica, en aplicaciones con perspectivas en procesos teóricos (Bellman, 1966; Byers y Waterman, 1984), programación de viajes y destinos turísticos (Rojas y Rodríguez, 2012), problemas SPP con ventanas de tiempo y costos lineales (Ioachim, Gélinas, Suomis y Desrosiers, 1998), SPP con flujos bidireccionales y restricción de recursos (Righini y Salani, 2006, 2008). Otro enfoque de solución hace referencia a la técnica de algoritmos de búsqueda A, los cuales resuelven el SPP utilizando algoritmos de aproximación seudopolinomiales (Hassin, 1992) y los algoritmos de Floyd-Warshall y de Johnson (Floyd, 1962), que resuelven el SPP para todos los vértices de un grafo orientado.

En la actualidad se ha llegado a usar métodos metaheurísticos modernos como la combinación del algoritmo de Dijkstra con un algoritmo de inteligencia artificial conocido como *colonia de hormigas* (ACO por sus siglas en inglés, *Ant Colony Optimization*) (Ayed, Galvez, Habbas y Khadraoui, 2011), la solución propuesta para redes no determinísticas con la aplicación del algoritmo de Dijkstra y los principios de la teoría de incertidumbre en la longitud de los arcos de una red (Gao, 2011).

## Metodología

Tomando como base las técnicas referidas, este artículo presenta la metodología y los resultados parciales en la realización de un análisis de eficiencia algorítmica, que pretende contrastar algunas técnicas de solución de SPP, para un caso contextual en el cual se espera determinar el tiempo de ejecución y la desviación sobre la solución óptima, que son considerados como factores críticos en los procesos de toma de decisión en actividades logísticas en Cundinamarca, usando para esto algoritmos desarrollados por los autores. De esta manera, la estructura metodológica que se ha llevado a cabo en el desarrollo de la investigación puede sintetizarse en la figura 1, en la cual se presenta la metodología empleada a través de un diagrama de flujo.

### *Determinación de la red vial del departamento de Cundinamarca*

En la primera fase se identificaron los municipios, las veredas y los corregimientos con relevancia económica de Cundinamarca, los cuales se establecieron como

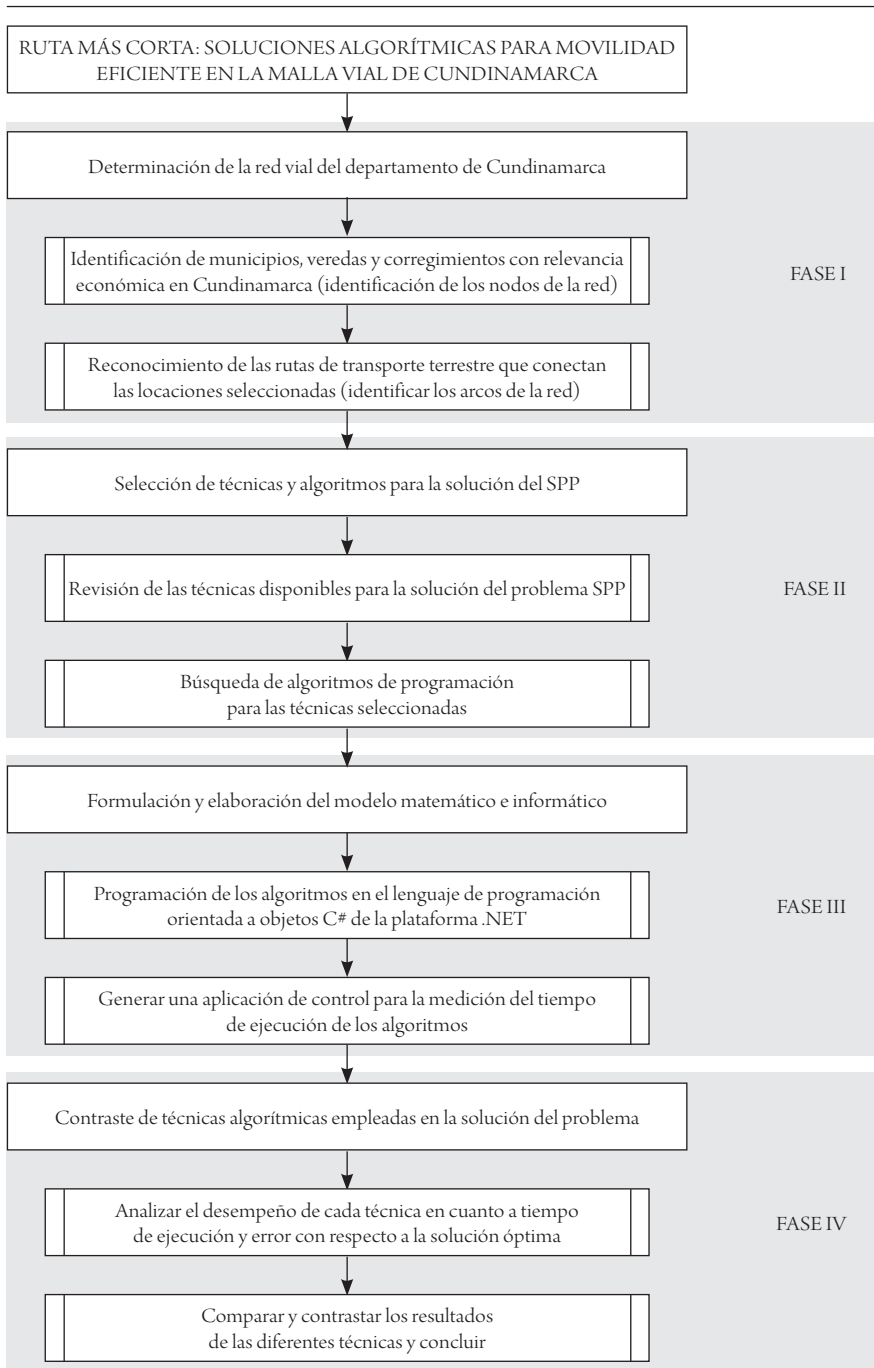


Figura 1. Estructura metodológica empleada en el desarrollo investigativo

Fuente: elaboración propia.

nodos en la red; de igual forma, las vías terrestres establecidas en la malla vial disponible consideradas arcos entre nodos para la conformación de la red de acuerdo con los principios de la teoría de redes, principios elementales contenidos en el problema SPP.

### ***Selección de técnicas matemáticas para la solución del problema SPP en la red vial de Cundinamarca***

La segunda fase consistió en seleccionar algunas técnicas matemáticas y algorítmicas para la solución del SPP, mediante un análisis de adaptabilidad de la técnica seleccionada al problema SPP, considerando qué restricciones, ventajas y desventajas maneja cada una de las técnicas de procesamiento de datos, y cuáles de ellas proporcionan un mejor desempeño frente a las características del caso en análisis.

### ***Formulación y elaboración del modelo matemático e informático para el problema SPP en la red vial de Cundinamarca***

Esta etapa consiste en la implementación de algoritmos de programación dinámica, Dijkstra, algoritmos A y colonia de hormigas, en el lenguaje de programación orientada a objetos C# perteneciente a la plataforma .NET. Estos algoritmos han sido desarrollados por los autores, quienes han implementado las técnicas anteriormente descritas desde aspectos conceptuales de la literatura. En otro aspecto también se está realizando la implementación de un modelo de programación entera en el lenguaje General Algebraic Modeling System, para la obtención de la solución óptima al problema SPP en la malla vial de Cundinamarca. Adicionalmente, esta fase incluye la generación de aplicaciones de control para la medición de algunos factores considerados en un estudio de eficiencia algorítmica, necesarios para su implementación en la consolidación de aplicaciones a futuro para usuarios reales que requieran de estos modelos.

### ***Contraste estadístico de técnicas para la solución del modelo SPP en la red vial de Cundinamarca***

Por último, la cuarta fase está enfocada en la realización de un proceso de contraste estadístico usando un modelo de diseño experimental de las técnicas seleccionadas respecto al tiempo de ejecución y error sobre la solución óptima del problema,

con el objetivo de determinar una técnica eficiente para la toma de decisión en tiempos reducidos y con error mínimo en la estimación de la distancia en el problema SPP en análisis.

## Resultados

Los avances realizados en el desarrollo del proyecto se detallan en los siguientes apartes, los cuales muestran la correspondencia entre la metodología propuesta y los productos obtenidos, lo que permite establecer esta propuesta metodológica como adecuada para la realización de un proyecto de investigación de este tipo.

### ***Construcción de la matriz de distancias para la malla vial de Cundinamarca***

El problema SPP requiere para su desarrollo la construcción de una matriz que represente la conexión y longitud desde un nodo inicial hasta los nodos vecinos vinculados de forma directa, lo cual se logra en este estudio mediante la consolidación de una matriz de distancia, que establece cuándo se tiene un valor superior a cero, la existencia de la conectividad y por tanto la distancia expresada en kilómetros entre dos nodos cualquiera de la red vial en análisis. La construcción de la matriz de distancias referenciada se realizó siguiendo varias actividades, las cuales incluyeron procesos de selección de fuentes de información y puntos geográficos, medición de vías en fuentes secundarias, captura de información segmentada y, por último, consolidación de información total.

Una vez inicia el proceso de construcción de la matriz de distancias se seleccionan diversas fuentes de información bajo los criterios de fiabilidad y actualización frente a los requerimientos del problema SPP; aquí destacan el mapa del sistema de carreteras departamentales y la división política para Cundinamarca (Cundinamarca y Pabón, 2011), el Decreto 171 de 2003 relativo a la organización de la red vial del Departamento (Asamblea Departamental de Cundinamarca, 2003) y algunos documentos relativos a la ejecución del contrato PS 301 de 2010, en el que se incluyen aspectos relacionados con el primer producto ya referenciado (Pabón, 2010).

Por tanto, el uso del mapa de vías de Cundinamarca se fundamenta en que este producto de consolidación de cuatro estudios realizados por entes privados y el Ministerio de Transporte, en relación con el levantamiento del inventario vial



de las carreteras construidas y administradas por el ente administrativo regional. Cabe resaltar que estos estudios inician en 2004, y terminan con este mapa en el que se incluyen los 6397 kilómetros de malla vial disponible hasta 2011 en el Departamento (Pabón, 2010), establecidas por el Decreto 171 de 2003 (Asamblea Departamental de Cundinamarca, 2003).

Durante la actividad de selección de puntos geográficos se encontró en una revisión previa que Cundinamarca está integrado por 116 municipios, organizados en 16 provincias más el Distrito Capital, lo cual insinuaba una matriz inicial de 117 por 117 datos, para un total de 13.689 datos, tamaño considerado como un problema pequeño o de ejemplo (Ramos, Sánchez, Ferrer, Barquín y Linares, 2010), en el caso de analizar el problema SPP propuesto como un modelo de programación lineal mixto, dado que cada nodo proporcionaría una restricción y cada conexión entre nodos una variable para este problema. Luego, al incluir el mapa vial de Cundinamarca como fuente principal de información, el número de puntos geográficos considerado inicialmente es ampliado, ya que en este se consideran veredas y corregimientos que forman parte integral de la red de vías como puntos de conexión, que no pueden ser despreciados del estudio, además de facilitar la medición de las distancias para la construcción de la matriz requerida.

Estos nuevos puntos hacen que el tamaño del problema aumente considerablemente al pasar de 117 a 792 puntos geográficos, cambiando el tamaño de la matriz a un tamaño de 792 por 792 elementos, lo que equivale a un campo de información de 627.264 datos, convirtiéndolo en un problema tamaño medio para el caso de análisis con programación lineal (Ramos *et al.*, 2010).

Ahora bien, estos 792 puntos fueron seleccionados porque cumplen la condición de estar conectados como mínimo a otros dos puntos directamente que también cumplan esta condición. De esta manera, se eliminan puntos con una sola vía de acceso y que posiblemente llevaban a zonas de baja relevancia tanto económica como poblacional. Un ejemplo claro de estas situaciones se presentaron en la provincia de Medina, mostrada en la figura 2, donde en el municipio de Paratebueno se tomaron en cuenta —además del mismo Paratebueno— los puntos El Japón, Santa Cecilia, Santa Inés y Maya, entre otros, debido a que cada uno de estos se conecta directamente con dos o más puntos que cumplen la misma condición. Por esta misma razón, puntos como Palomas, Los Mangos y El Guio, entre otros, no se tomaron en cuenta como nodos de la matriz, ya que tienen una sola vía de acceso y no proporcionan diferentes opciones de ruta.



Una vez seleccionados todos los puntos pertinentes, se procedió a construir la matriz de distancias en algunos tramos usando la información del Decreto 171 de 2003, en la cual se encontraban distancias entre algunos puntos vecinos de acuerdo con los conceptos del SPP. En otras ocasiones, la información disponible en el documento contenía datos de distancia en vías que unían puntos alejados sin tener en cuenta puntos intermedios y vecinos, ni distancias entre estos; para estos tramos intermedios fue necesario la medición de las longitudes de cada arco a lo largo de la geometría presentada en el mapa. Luego, usando la escala suministrada en el mapa, se calculó la distancia real en kilómetros de los arcos faltantes, para llegar a un total de 1 188 arcos bidireccionales que conectan los 792 nodos de la matriz.

Finalmente, el proceso de consolidación de información para la construcción de la matriz de distancias se hizo de forma segmentada, usando la división política del Departamento, con el fin de manejar matrices de menor dimensión y densidad de datos para tener un control eficiente sobre los datos y así permitir una depuración de inconsistencias más sencilla durante el proceso. Esta depuración es de vital importancia para el desarrollo del proyecto debido a que, en caso de presentarse errores en la matriz, ningún algoritmo o técnica que se le aplique funcionará de forma adecuada, ya que presentará tramos de ruta que no existen dejando de mostrar rutas reales.

En concordancia con lo anterior, el proceso de consolidación se realizó con la construcción de 117 matrices, una por cada municipio, en las cuales se tuvieron en cuenta no solo los puntos y arcos contenidos dentro de los límites territoriales del municipio, sino también los arcos que comunican los puntos del municipio con otros ubicados en municipios vecinos para el proceso de depuración de errores. Un ejemplo de lo nombrado anteriormente se puede observar en la tabla 1, que es la matriz de distancias obtenidas para el municipio de Vergara, de la provincia de Gualiva, el cual se puede visualizar en la figura 3.

Después de la construcción de las matrices de distancias para cada municipio, se procedió a agruparlas en una matriz por provincia con el propósito de unificar los datos, unificando las distancias de los arcos que comunican los diferentes municipios, y de esta manera se obtuvieron 17 matrices de distancia, las cuales, siguiendo el mismo procedimiento, fueron consolidadas en una sola matriz para todo Cundinamarca. En consecuencia, la matriz de distancias resultante para Cundinamarca tiene la particularidad de ser una matriz simétrica porque la distancia

Tabla 1. Matriz de distancias para el municipio de Vergara, provincia de Gualivera

PROVINCIA	REGIÓN														RIONEGRO												
	VERGARA	GUALIVERA	VERGARA	GUALIVERA	VERGARA	GUALIVERA	VERGARA	GUALIVERA	VERGARA	GUALIVERA	VERGARA	GUALIVERA	VERGARA	GUALIVERA		VERGARA	GUALIVERA	GUALIVERA	GUALIVERA	EL PEÑÓN	LA VEGA	SUPATÁ	NARANJAL	SUPATÁ	CHOAPAL	GUANACAS	
REGIÓN	PUNTO	ALTO DE BELTRÁN	ALTO DEL PERIQUITO	SANTA ROSA	LLANO GRANDE	SN/SANTA ROSA-VILLA OLARTE	FLORIDO	EL EMPALME	NOCAIMA	SUPATÁ	SUPATÁ	NARANJAL	SUPATÁ	LA VEGA	SUPATÁ	CHOAPAL	GUANACAS										
Gualivera	Vergara	0	3,5	8,2	2,3	0	3,2	0	6,3	29	7,9	0	6,3	29	9,2												
Gualivera	Vergara			0	8,2																					11	
Gualivera	Vergara			8,2	0	2,3	10,5																				
Gualivera	Vergara		3,5	2,3	0																						
Gualivera	Vergara			10,5		0	3,2																				
Gualivera	Vergara					3,2	0																				
Gualivera	Vergara		2,3																								
Gualivera	Nocaima		7,9																								
Gualivera	Supatá																										
Gualivera	Supatá					29																					
Gualivera	La Vega																										
Rionegro	El Peñón																										
	Guanacas																										
Fuente: elaboración propia.																											

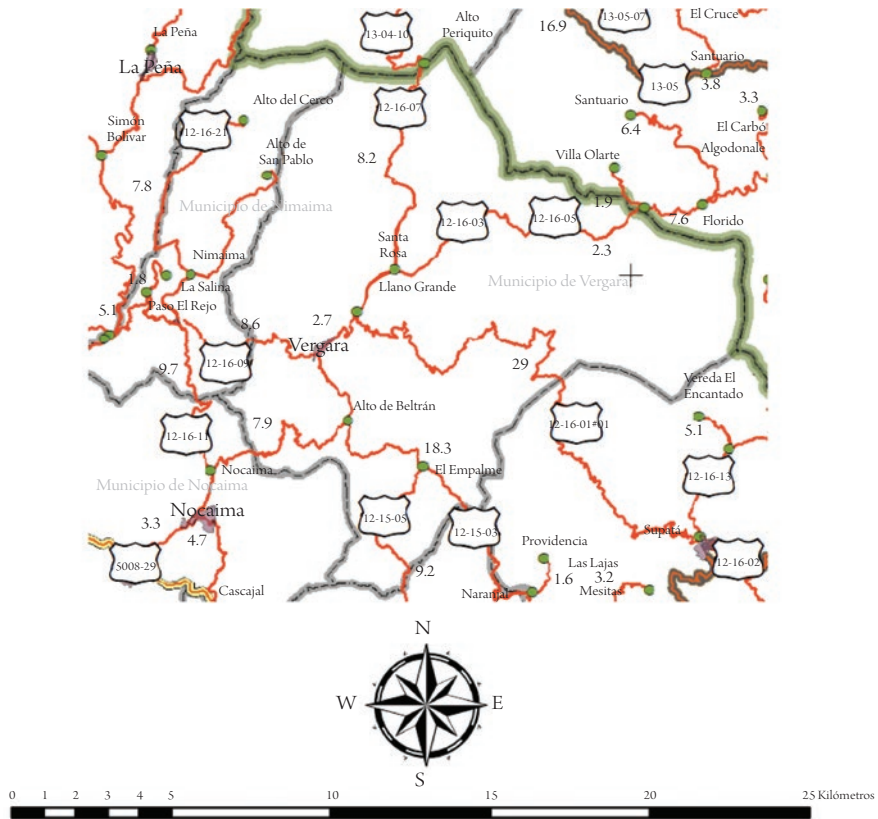


Figura 3. Municipio de Vergara, provincia de Gualiva

Fuente: Cundinamarca y Pabón (2011).

de ir de un punto A hasta un punto B es la misma que ir del punto B al punto A, debido a que los arcos que integran la matriz son bidireccionales. Lo anterior se puede observar en la tabla 1.

En conclusión, el proceso para la construcción de una matriz de información para el problema SPP se puede resumir a través del diagrama de flujo descrito en la figura 4.

### ***Selección de técnicas para la solución del problema***

Al hacer la revisión bibliográfica de las diferentes técnicas para la solución del SPP, se analizaron varios tipos de métodos, incluidos tanto tradicionales como modernos. Pero debido a que los trabajos que comparan los desempeños de diferentes

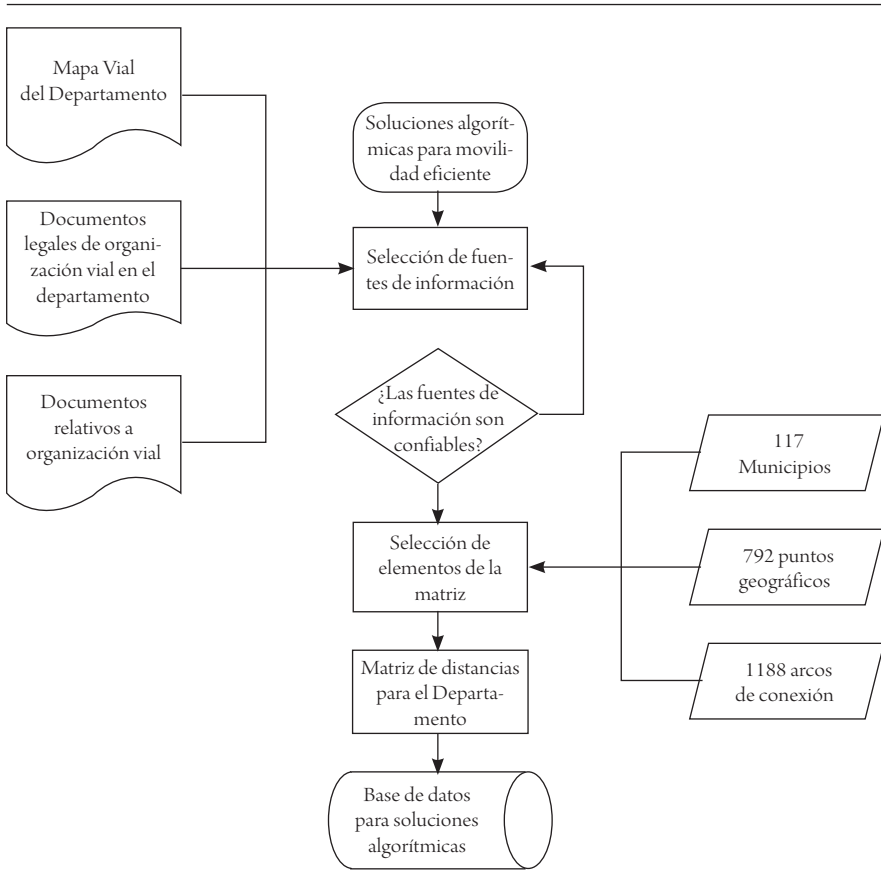


Figura 4. Proceso de creación de base de datos para la implementación de las soluciones algorítmicas en movilidad

Fuente: elaboración propia.

técnicas sobre el mismo problema son escasos, se decidió hacer el análisis de este proyecto sobre las cuatro técnicas tradicionales más conocidas e implementadas, como el algoritmo de Dijkstra, la *programación dinámica*, la *programación lineal entera* y el algoritmo A, además de una técnica metaheurística de inteligencia artificial conocida como colonia de hormigas. Esto se hizo con el fin de establecer una base de cuantificación de eficiencia algorítmica de las técnicas referidas para hacer una comparación y determinar el método más efectivo y de menor consumo de recursos para que pueda ser implementado desde estaciones de trabajo con alta capacidad de procesamiento, hasta dispositivos móviles para brindar soluciones

de movilidad, ya sea en un centro de control o directamente desde las carreteras. En la tabla 2 se presentan las principales características de las técnicas referidas.

Tabla 2. Selección de técnicas para la solución del problema

TÉCNICA SELECCIONADA	CARACTERÍSTICAS
Algoritmo de Dijkstra (Dijkstra, 1959)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Este método, aunque es una heurística, permite hallar la solución óptima de un problema SPP.</li> <li>• Consiste en la búsqueda del n-ésimo nodo más cercano al nodo de partida, incluyendo los valores anteriores calculados para otros nodos ya incluidos en la ruta.</li> </ul>
Programación dinámica (Bellman, 1966)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se utiliza para optimizar problemas que puedan ser discretizados y secuenciados.</li> <li>• Método para resolver problemas complejos dividiéndolos en subproblemas más simples mediante una subestructura óptima.</li> <li>• Usa soluciones óptimas de los subproblemas para encontrar la solución óptima del problema global en conjunto.</li> </ul>
Programación lineal entera (Kantorovich, 1940)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Este tipo de solución se emplea para lograr la solución óptima de un problema SPP, mediante el uso de variables binarias que identifican el uso de un arco de conexión entre dos nodos del problema.</li> <li>• Este tipo de solución propone como función objetivo la minimización de la suma de la distancia de cada arco que conecta arcos intermedios entre un arco inicial y uno final.</li> <li>• Las restricciones se establecen para que la suma del número de arcos de entrada y salida de un nodo sean iguales a cero o uno o menos uno, para simbolizar el nodo de origen o de salida.</li> </ul>
Algoritmo A (Hart, Nilsson y Raphael, 1968)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Método heurístico basado en el algoritmo de Dijkstra.</li> <li>• Algoritmo de búsqueda en grafos para encontrar una ruta que conecte dos puntos o nodos dentro de una red.</li> <li>• Tiene en cuenta tanto la “distancia estimada” desde la posición hasta el nodo de destino como la distancia recorrida desde el nodo de origen.</li> </ul>
Colonia de hormigas (Colomi, Dorigo, & Maniezzo, 1991)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algoritmo basado en el comportamiento de las hormigas.</li> <li>• Modelo de origen probabilístico para solucionar problemas computacionales de búsqueda.</li> <li>• Es un algoritmo de la familia de los algoritmos de enjambre.</li> </ul>

Fuente: elaboración propia.

### ***Modelación del problema SPP***

El problema SPP usualmente se formula como un modelo en el que se enumeran los múltiples arcos que conectan los diferentes nodos, cuyo propósito es determinar cuáles son los nodos y arcos que conectan un origen y un destino con mínima distancia (Dijkstra, 1959; Dantzig, 1960; Floyd, 1962):

$$\text{Min } F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ij} X_{ij}$$

S.A :

$$\sum_{j=1}^m X_{ij} = 1; i = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} - \sum_{i=1}^m X_{ij} = 0; i = 1, 2, 3 \dots m \wedge j = 1, 2, 3 \dots n; i \neq j \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = -1; j = n$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ y Binario} \tag{3}$$

Donde:

$d_{ij}$ : Magnitud o distancia del arco  $i - j$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots m \wedge j = 1, 2, 3, \dots n$ ;  $i \neq j$

$X_{ij}$ : Decisión de utilizar el arco  $i - j$  como tramo de ruta;  $i = 1, 2, 3, \dots$

$m \wedge j = 1, 2, 3 \dots n$ ;  $i \neq j$

La formulación anterior es la habitual para resolver SPP desde un enfoque de programación entera; es común encontrarla en diferentes textos académicos sobre el tema (Taha, 2011; Hillier y Lieberman, 2010), pero el inconveniente que presenta es que emplea la decisión sobre los arcos existentes, es decir, tendrían que conocerse todas las conexiones entre cada uno de estos sitios geográficos y determinar si estos son unidireccionales o bidireccionales, lo cual representa un inconveniente respecto a la base de datos disponible de la malla vial de Cundinamarca, que está definida por nodos y no por arcos como requiere esta forma de modelamiento.

Otro aspecto que genera inconvenientes en este tipo de modelo se presenta en las restricciones de flujo y transferencia —restricción (2)—, en la cual si las conexiones salen de un nodo asumirán un valor positivo. De igual forma, al entrar a un nodo en esta misma restricción tomará un valor negativo, lo cual implica que en los nodos de transferencia la suma de estas variables será cero, ya que se conservará el balance en cada una de las restricciones al ser igual la transferencia de



entrada y la de salida. Adicionalmente, esta formulación, al incluir una variable de índole binaria, requiere de un esfuerzo algorítmico significativo, al usar algoritmos de bifurcación y acotamiento o bifurcación y corte, los cuales se caracterizan por ser algoritmos de enumeración exhaustiva (Magnanti y Wong, 1984), que para el tipo de problema que en la actualidad se posee no será eficiente, ya que generará soluciones después de horas e inclusive días de procesamiento de información en un equipo de computación de alta capacidad de procesamiento. Por eso, el problema SPP descrito para la malla vial de Cundinamarca ha sido resuelto usando la programación dinámica, a través de un desarrollo de software descrito en los siguientes apartes del documento.

### **Implementación de algoritmos de programación**

El proyecto actualmente se encuentra en la fase de implementación de algoritmos de programación para la solución del SPP en estudio a través un software para computador, el cual se ha implementado en el lenguaje C# de la plataforma .NET. Este software consiste en una interfaz en la cual se carga la matriz de distancias desde un archivo de Microsoft Excel®, desde cualquier ubicación del computador, y permite elegir los puntos de origen y destino de la ruta que se va a calcular, como se puede observar en la figura 5.

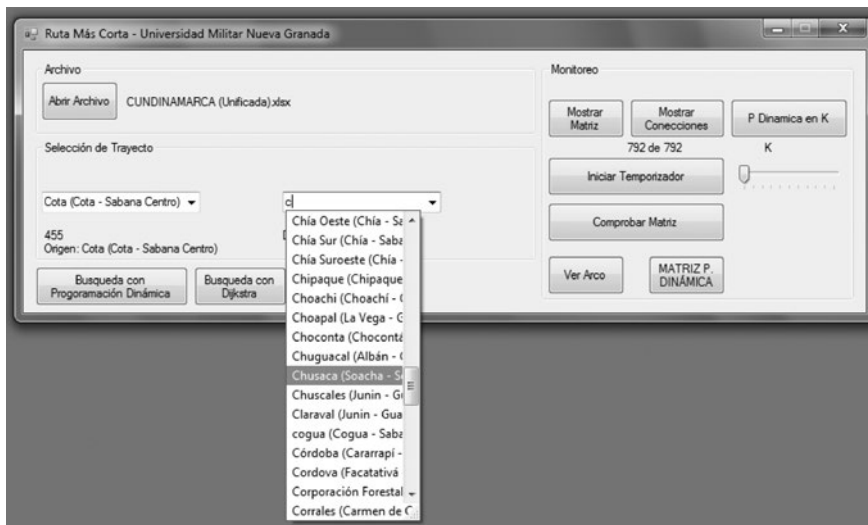


Figura 5. Captura de pantalla del software de búsqueda

Fuente: elaboración propia.

En otro aspecto, en la parte derecha de la figura 5 se observa un cuadro titulado *Monitoreo*, que consiste en unas rutinas con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento de los algoritmos para depurar errores y realizar correcciones al código. Este cuadro eventualmente se eliminará una vez los algoritmos funcionen de forma correcta. El desarrollo de la rutina de programación dinámica para este aplicativo denominado Ruta + 1,0 ha mostrado una relativa eficiencia para las 627.264 variables que tiene el modelo, las cuales representan los arcos que unen todos los nodos geográficos recopilados para la malla vial de Cundinamarca, a través del siguiente pseudocódigo computacional:

```

Elegir PuntoInicial y PuntoFinal;
Si (PuntoInicial != PuntoFinal)
{
    Iniciar Temporizador;
    Para cada k desde 0 hasta NumeroDePuntos
    {
        Para cada Punto desde 0 hasta NumeroDePuntos
        {
            Si (k == 0)
            {
                MatrizRuta.Distancia[Punto, k] = MatrizDistancia[Punto,
                PuntoFinal];
                MatrizRuta.Ruta[Punto, k][0] = PuntoFinal;
            }
            Si no
            {
                Si (Punto == PuntoFinal)
                {
                    MatrizRuta.Distancia[Punto, k] = 0;
                    MatrizRuta.Ruta[Punto, k][0] = PuntoFinal;
                }
                Si no
                {
                    MatrizRuta.Distancia[Punto, k] =
                    Minimo(MatrizDistancias[Punto,
                    Conecciones(Punto)] + MatrizRuta.
                    Distancia[Conecciones(Punto), k-1]);
                }
            }
        }
    }
}

```

```

MatrizRuta.Ruta[Punto,k][0] = ConexionMinima
    Distancia(Punto);
Para cada P desde 1 hasta Tamaño(MatrizRuta.
    Ruta[Punto,k])
{
MatrizRuta.Ruta[Punto,k][P] = MatrizRuta.
    Ruta[Punto,k-1][P-1];
}
}
}
}
}
Si (MatrizRuta.Columna[k] == MatrizRuta.Columna[k - 1])
{
    Break;
}
}
Finalizar Temporizador;
Mostrar Ruta;
}

```

El algoritmo de programación dinámica presentado realiza la búsqueda de la ruta entre dos nodos cualesquiera de la red de manera correcta en un tiempo máximo de 20 segundos. La ruta calculada se presenta al usuario como se muestra en la figura 6; este es hasta el momento el tiempo de ejecución promedio para un número de corridas pequeño realizado, mientras concluye la investigación descrita.



Figura 6. Captura de pantalla de la ruta calculada por programación dinámica

Fuente: elaboración propia.

## Conclusiones

- Mediante la implementación de nuevas técnicas para el mejoramiento de la movilidad es posible tener una respuesta positiva en la sostenibilidad ambiental y social, dado que estas ayudan a reducir considerablemente el uso de recursos (económicos, tecnológicos, ambientales, entre otros); de esta forma, presentan alternativas de bajo impacto que reemplacen las soluciones tradicionales de ampliación de infraestructura de mallas viales, lo cual permite también la desconcentración de población y las actividades económicas de una región indirectamente.
- El desarrollo de algoritmos de redes brinda herramientas al sector productivo de la región Bogotá, Cundinamarca, en un contexto rodeado por el riesgo integral de la cadena logística, en especial con apuestas productivas relacionadas con la agricultura y la extracción de minerales, las cuales son vitales para la economía de esta región.
- Las soluciones al problema SPP han sido desarrolladas por años por los investigadores del área de investigación de operaciones, pero su aplicabilidad en medios o sectores reales requiere o involucra la implementación de modelos con mayor número de restricciones y variables de análisis que permitan su implementación. Además, el proceso de levantamiento de la información es vital para el desarrollo de un algoritmo adecuado de solución, teniendo en cuenta el medio actual de aplicación e implementación de una herramienta de esta categoría.
- Las técnicas anteriores fueron seleccionadas por su versatilidad en la solución del problema SPP, además de ser implementadas en un lenguaje en diversas plataformas de manera sencilla, en el caso del algoritmo de Dijkstra, algoritmo A, colonia de hormigas y programación dinámica. En otro aspecto se acude a la programación lineal como parámetro de comparación en la solución óptima del problema SPP, siendo este el medio de contraste con las técnicas referidas.

## Referencias

- Asamblea Departamental de Cundinamarca. (26 de Junio de 2003). Organización de la red vial de segundo orden del departamento de Cundinamarca. *Decreto 171 de 2003*. Bogotá: Asamblea de Cundinamarca.
- Ayed, H., Galvez, C., Habbas, Z. y Khadraoui, D. (2011). Solving time-dependent multimodal transport problems using a transfer graph model. *Computers & Industrial Engineering*, 61(2), 391-401.
- Bellman, R. (1966). Dynamic programming. *Science*, 153(3731), 34-37.
- Byers, T. y Waterman, M. (1984). Determining all optimal and near-optimal solutions when solving shortest path problems by dynamic programming. *Operations Research*, 32, 1381-1384.
- Cervantes Castaños, A. (2004). *Elaboración de un algoritmo evolutivo para resolver el problema de ruta más corta incluyendo funciones de distribución probabilística*. Puebla, México: Universidad de las Américas Puebla.
- Colorni, A., Dorigo, M. y Maniezzo, V. (1991). Distributed optimization by ant colonies. *Proceedings of Ecal 91- European Conference on Artificial Life*, 134-142.
- Consejo Regional de Competitividad. (2009). *Plan regional de competitividad*. Recuperado de [http://www.bogotacundinamarcacompite.org.co/publicaciones.asp?cat\\_id=231&cat\\_tit=Plan%20Regional%20de%20Competitividad](http://www.bogotacundinamarcacompite.org.co/publicaciones.asp?cat_id=231&cat_tit=Plan%20Regional%20de%20Competitividad).
- Cundinamarca, S. D. y Pabón, C. (2011). *Mapa vial de Cundinamarca*. Recuperado de <https://sites.google.com/site/mapavialdecundinamarca/>
- Dantzig, G. (1960). On the shortest route through a network. *Management Science*, 6(2), 187-190.
- Daskin, M. (1995). *Network and discrete location*. Nueva York: John Wiley and Sons.
- Departamento Nacional de Planeación. (2008). *Documento Conpes 3527. Política Nacional de Competitividad*. Bogotá: Departamento Nacional de Planeación.
- Dijkstra, E. (1959). A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik* 1, 269-271.
- Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 345.
- Gao, Y. (2011). Shortest path problem with uncertain arc lengths. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(6), 2591-2600.
- Gobernación de Cundinamarca. (2010). *Estadísticas 2010, Cundinamarca*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos.
- Hart, P., Nilsson, N. y Raphael, B. (1968). A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *IEEE Transactions of Systems Science and Cybernetics*, 4(2), 100-107.

- Hassin, R. (1992). Approximation schemes for the restricted shortest path problem. *Mathematics of Operations Research*, 17(1), 36-42.
- Hillier, F. y Lieberman, G. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. México: McGraw-Hill.
- Ioachim, I., Gélinas, S., Suomis, F. y Desrosiers, J. (1998). A dynamic programming algorithm for the shortest path problem with time windows and linear node costs. *Networks*, 31(3), 193-204.
- Kantorovich, L. (1940). A new method of solving some classes of extremal problems. *Doklady Akad Sci USSR*, 211-214.
- Magnanti, T. y Wong, R. (1984). Network design and transportation planning: models and algorithms. *Transportation Science*, 18, 1-55.
- Observatorio de Competitividad de Cundinamarca. (2011). *Informe anual de competitividad de Cundinamarca 2011*. Bogotá: Universidad EAN.
- Pabón, C. (2010). *Informe inicial de mapa vial de Cundinamarca*. Cali: Colombia.
- Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J., Barquín, J. y Linares, P. (2010). *Modelos matemáticos en optimización*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.
- Righini, G. y Salani, M. (2006). Ymmetry helps: Bounded bi-directional dynamic programming for the elementary shortest path problem with resource constraints. *Discrete Optimization*, 255-273.
- Righini, G. y Salani, M. (2008). New dynamic programming algorithms for the resource constrained elementary shortest path problem. *Networks*, 155-170.
- Rojas, M. y Rodríguez, J. A. (2012). OGC la ruta, el destino, la libertad para planificar tu viaje con la diputación de Badajoz. *IV Jornadas de SIG libre*. Girona: Universidad de Girona.
- Santos, L., Coutinho-Rodrigues, J. y Current, J. (2007). An improved solution algorithm for the constrained shortest path problem. *Transportation Research Part B*, 756-771.
- Taha, H. (2011). *Introducción a la investigación de operaciones*. México: Pearson.
- Universidad del Rosario, Centro de Pensamiento en Estrategias Competitivas. (2011). *Plan de competitividad de la provincia de Sabana Occidente*. Bogotá: Universidad del Rosario; Fondo de Desarrollo de Proyectos de Cundinamarca.
- Yu, G. y Yang, J. (1998). On the robust shortest path problem. *Computers & Operations Research*, 25(6), 457-468.