SOLUTION OF THE ZERO PROBLEM AND ADJACENT PROBLEMS OF MATHEMATICS

A. Kudryavtsev, Associate Professor
Higher School of Social Technologies, Latvia

The author demonstrates the relationship between problems of math and the dogmatic faith in unattainable zero accuracy of calculations. The author shows the way to solve math problems by switching to actually required accuracy. The concepts of conditional zero, conditional-actual infinity and limitlessness, which eliminate math problems of main, were introduced.

Keywords: problems of mathematics, paradoxes, accuracy of calculations, conditional zero, conditional-actual infinity, limitlessness.

Conference participant, National championship in scientific analytics, Open European and Asian research analytics championship

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ НУЛЯ И СМЕЖНЫХ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИКИ

Кудрявцев А.В., доцент
Высшая школа социальных технологий, Латвия

Показана связь проблем математики с догматической верой в недостижимую нулевую точность вычислений. Указан путь разрешения основных проблем математики за счёт перехода к реально требуемой точности. Введены понятия условного нуля, условно-актуальной бесконечности и беспредельности, устраняющие основные проблемы математики.

Ключевые слова: Проблемы математики, парадоксы, точность вычислений, условный нуль, условно-актуальная бесконечность, беспредельность

Участник конференции, Национального первенства по научной аналитике, Открытого Европейско-Азиатского первенства по научной аналитике

1. Постановка задачи

К сожалению, ключевые понятия «непрерывной» математики, сформированные ещё в глубокой древности, не выдержали проверку временем и вошли в противоречие с современными знаниями. Прежде всего, это касается математических абстракций точки, непрерывности, линейности и бесконечности. Именно они служат источником всё новых и новых парадоксов [1], чем снижают доверие к научным наработкам в сфере так называемой непрерывной математики, ставят под сомнение их адекватность, а также препятствуют правильному пониманию и математическому представлению свойств многомерности реального мира..

Поскольку главным препятствием на пути к преодолению обнаруженных фундаментальных противоречий является *безразмерность* первокирпичика всех математических объектов – математической точки, – начнём разговор с обсуждения проблем другой противоречивой математической абстракции – *нуля* – «правопреемника» всех проблем безразмерной точки.

С одной стороны, нуль рассматривается в математике как число, поскольку он участвует в математических операциях наряду с остальными числами. С другой стороны, нуль обладает свойствами, которые несвойственны числам, в частности, в математике запрещается (без объяснения первопричин) использование нуля в роли делителя.

Для начала вычленим класс математических задач, связанных с появлением и применением нуля в качестве числа.

2. Нуль как число

Единственным источником, или причиной появления нуля в задачах этого класса является потребность вычитания числа из самого себя, либо её эквивалент, связанный с использованием так называемых отрицательных чисел, например:

$$x – x = 0;$$
$$x + (-x) = 0.$$

При этом важно иметь в виду, что объекты реального мира, сопоставленные с абстрактным понятием нуля, никуда не исчезают, они остаются во Вселенной!

Например, если у вас было 2 рубля, и вы заплатили 2 рубля, то эти деньги просто перешли к другому владельцу. Даже если вы сожгли какие-то бумажные деньги, то они как физический объект не исчезли, а изменили своё состояние, превратившись в пепел и энергию. И в первом, и во втором примере нуль как число будет означать отсутствие денег лично у вас, но вовсе не их исчезновение из Вселенной.

Можно указать две сферы применения нуля в качестве числа, или цифры. Во-первых, нуль применяется в различных математических операциях, как-то:

$$0 + 0 = 0;$$
$$0 - 0 = 0;$$
$$0 + x = x;$$
$$0 - x = -x;$$
$$0 - (-x) = x;$$
$$0 \cdot x = 0;$$
$$0 / x = 0;$$
$$0 \cdot 0 = 0;$$
$$0^x = 0;$$
$$x^0 = 1;$$
$$0! = 1;$$
$$\sqrt{0} = 0.$$

Во-вторых, нуль находит применение для указания пустого разряда в позиционных системах счисления, например:

101_{10} – в десятичном числе «сто один» *0* обозначает отсутствие разряда десятков;

1010_2 – в двоичном числе «десять» левый *0* обозначает отсутствие разряда с весом *4*.

3. Нуль как *ничто*

Определим теперь класс задач, где нуль выступает в совершенно другой роли:

• прежде всего, отнесём сюда задачи, в которых нуль обозначает предел убывающей числовой последовательности, например, задачу последовательного деления отрезка или числа;

• сюда же следует отнести и задачу деления произвольного числа на нуль;

• и, наконец, использование нуля для обозначения размера математической точки.

Фактически, все эти задачи сводятся к одной, причём термину «нуль» здесь соответствует уже ни цифра, ни число, а совершенно иное понятие, синонимом которого может служить термин «*ничто*», то есть полное отсутствие «нечто». В этих задачах «нечто» последовательно уменьшается вплоть до своего бесследного исчезновения из Вселенной и превращения в несуществующее «*ничто*», не имеющее даже геометрического образа.

Разумеется, такое использование нуля означает пренебрежение законами сохранения материи, энергии и информации. Впрочем, *беспредельное линейное* продолжение числовой последовательности ещё раньше вошло в противоречие с законом перехода количественных изменений в качественные.

Ранее автор пытался отразить двойственный характер нуля путём разграничения частных понятий: «ноль» и «нуль» [2]. Однако подход, основанный на сохранении в неизменном виде противоречивого исходного понятия «безразмерной точки», вряд ли можно признать оправданным. В связи с этим, ниже предлагается понятию «нуля» условно придать смысл заданной точности вычислений.

4. Нуль как точность вычислений

Предварительно примем некоторые *допущения*.

4.1. Пусть математика – наука о вычислениях.

4.2. Пусть цель вычислений – получение результата с требуемой точностью.

4.3. Пусть все числовые данные представлены в показательной форме с нормализованной мантиссой m:

$$x = m \cdot 10^{n},$$

где

$$1 \leq m < 10.$$

4.4. Пусть вычисление числа с точностью ε означает необходимость сохранения верной значащей цифры, стоящей в n-м разряде дробной части числа:

$$\varepsilon = 10^{-n}.$$

4.5. Пусть «*условный нуль*» 0_ε численно равен требуемой точности или меньше:

$$0_\varepsilon \leq 10^{-n}.$$

4.6. Пусть графический образ «условного нуля» – элементарный (наимельчайший) шар.

4.7. Пусть графический образ точности» – предельный размер элементарного шара. Из последнего выражения следует также, что шары могут иметь размер и меньше предельного.

В классической математике расчёты ведутся с использованием бесконечных дробей, иррациональных чисел, бесконечных пределов, то есть с сохранением якобы бесконечно большого количества разрядов вещественных чисел, что теоретически, казалось бы, обеспечивает нулевую точность:

$$\varepsilon = 10^{-\infty} = 0.$$

Однако столь высокая декларируемая точность недостижима в принципе, во-первых, потому, что требует бесконечно больших временных затрат, а, во-вторых, в связи с тем, что не учитывает переходы количественных изменений в качественные.

В свете вышесказанного, следует рассматривать введённую в рассмотрение ограниченную точность 0_ε не как издержки предлагаемого подхода, а как реально достижимую точность вычислений!

Как известно, физическое тело не изменяет своих размеров в результате приобретения (потери) одного атома. Точно также любое число не изменяет своей величины от добавления (удаления) нуля. Распространим это правило на «условный нуль» [3]:

$$x = x \pm 0_\varepsilon.$$

Таким образом, вычисления можно осуществлять с «условно-нулевой» точностью, или геометрически – с точностью до одной точки текущего пространства.

Возможность осуществления вычислений с «условно-нулевой», то есть с любой наперёд заданной точностью позволяет не только преодолеть противоречивый характер классического «нуля-ничто», но и решить также ряд других неразрешимых прежде проблем математики, в частности, – проблему деления на нуль.

5. Устранение проблемы деления на нуль

В самом деле, если условно принять за нуль требуемую точность вычислений 0_ε, то результатом деления числа x на такой «условный нуль» будет конкретное число (например, $x \cdot 10^{9}$), а не мифическая бесконечность, как было раньше при использовании «нуля-ничто».

Таким образом, арифметические операции, включая деление, не только «уравниваются в правах», но и устраняются все связанные с прежним нулём парадоксы [1], к примеру, парадоксы так называемой актуальной бесконечности.

6. Решение проблемы актуальной «бесконечности»

Как было показано в [3], неограниченное повышение точности вычислений лишено смысла, поскольку обычно при количественных изменениях на *восемь порядков* в исследуемом объекте происходят *качественные* изменения, что влечёт за собой переход на кардинально новый цикл вычислений с обязательной сменой математической модели, расчётных формул, системы отсчёта и масштаба.

Сказанное можно наглядно проиллюстрировать путём сопоставления линейных размеров материальных объектов, чередующихся в примере, что дан ниже, с шагом в восемь порядков: электрон → атом → физическое тело → космическое тело → звёздная система → галактическая система.

Следует отметить, что количественные изменения на восемь порядков соответствуют 30-му шагу процедуры удвоения размеров или обратной процедуры деления объекта пополам. Например, удваивая размеры атома, мы уже через 30 шагов придём к размерам бильярдного шара, а 30-ти кратное деление десятисантиметрового *отрезка* пополам приведёт нас к качественно иному объекту – математической *точке*.

Будем называть *условно-актуальной*, то есть реальной бесконечностью величину æ, обратную условному нулю, или точности вычислений

$$æ = 1/0_\varepsilon,$$

значение которой для многих задач будет находиться в границах следующего диапазона:

$$æ = 10^{8} \div 10^{9}.$$

При этом классический символ бесконечности ∞ предлагается сохранить за потенциальной бесконечностью, переименовав её для исключения неоднозначной терминологии в *беспредельность*. Такой приём позволит нам называть условно-актуальную бесконечность кратко – *бесконечностью*.

Выразив показатели условного нуля и условной бесконечности в общем виде

$$0 = 10^{-p};$$

$$æ = 10^{p},$$

где p – десятичный порядок, можно легко раскрыть классические *неопределённости*:

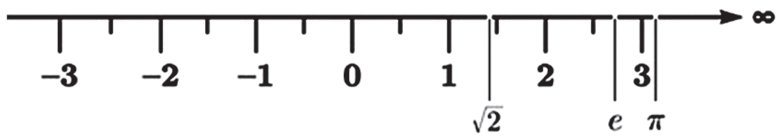

Рис. 1. Классическая числовая ось.

$\mathbf{0 \cdot æ} = 10^{-p} \cdot 10^{p} = 1;$

$\mathbf{æ\,/\,0} = 10^{p} / 10^{-p} = 10^{2p} = æ^{2};$

$\mathbf{æ\,/\,æ} = 10^{p} / 10^{p} = 1;$

$\mathbf{0\,/\,0} = 10^{-p} / 10^{-p} = 1;$

$\mathbf{1\,/\,0} = 1 / 10^{-p} = 10^{p} = æ;$

$\mathbf{1\,/\,æ} = 1 / 10^{p} = 10^{-p} = 0;$

Новые показатели позволяют также по-новому взглянуть на математическую абстракцию числовой оси.

7. Решение проблем числовой оси

Классическая числовая ось (рис. 1) неадекватна реальности по трём основным причинам:

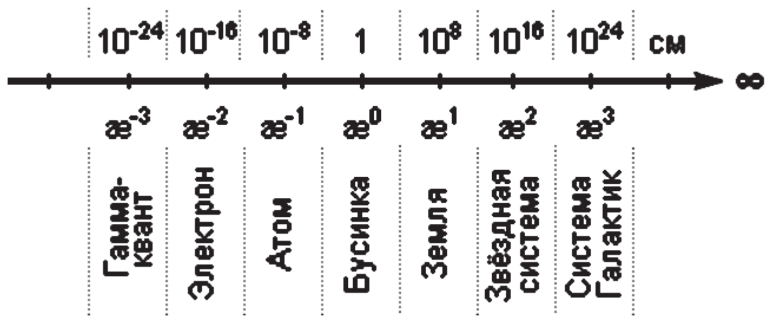

Рис. 2. Связь между бесконечностью и беспредельностью.

- из-за наличия бесконечного количества якобы бесконечно делимых числовых интервалов;
- из-за невозможности зафиксировать положение бесконечных дробей;
- из-за отсутствия связи между количеством и качеством числовых интервалов и чисел.

Представление о соотношении понятий бесконечности æ и беспредельности ∞ можно получить из рис. 2.

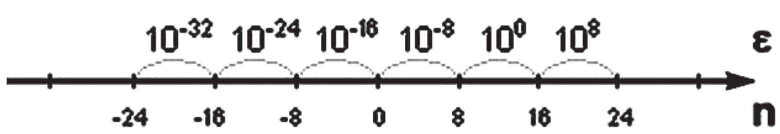

Рис. 3. Связь условной бесконечности с точностью.

Поскольку условно-бесконечные числовые интервалы на рис. 2 связаны с *качественно* разными объектами, то изменение точности вычислений для этих интервалов также будет сопровождаться качественными скачками, например, таким образом, как показано на рис. 3.

8. Решение проблемы бесконечных дробей и бесконечно малых

Самой большой проблемой бесконечных дробей является то, что их вычисление требует бесконечно больших временных затрат, то есть не может быть завершено никогда. Примером может служить число π, которое удалось вычислить пока (по состоянию на 2011 год) только до 10 триллионов знаков.

Из-за того, что бесконечные дроби в ходе вычислений постоянно изменяют своё значение, их точное положение на числовой оси не может быть определено, поскольку точность их представления бесконечно улучшается во времени. Следовательно, у таких чисел нет постоянного места на числовой оси.

В третьих, никакие количественные изменения чисел не могут происходить бесконечно, ибо это противоречит закону диалектики о переходе количественных изменений в качественные.

Все перечисленные проблемы бесконечных дробей легко устраняются простым переходом от якобы точного их представления к условно-точному, например, бесконечные дроби

1/3 = 0,333333333333333333333333333333...,

1/7 = 0,14285714285714285714285714285 7...,

π = 3,14159265358979323846264 3383279...

приводятся к конечному виду простым округлением с заданной точностью (в приведенном примере – 9 знаков):

1/3 = 0,333333333,

1/7 = 0,142857143,

π = 3,141592654.

Аналогичный приём может быть применён и к решению проблемы пределов, или бесконечно малых числовых величин. Для этого любая бесконечно убывающая числовая последовательность должна прерываться при достижении заданной точности вычислений.

9. Решение проблемы несоизмеримости отрезков

Проблема несоизмеримости отрезков была порождена противоречивой абстракцией безразмерной математической точки и вытекающими из неё столь же противоречивыми абстракциями нуля-ничто, непрерывности и актуальной бесконечности. Таким образом, замена принципиально недостижимой нулевой точности на реально достижимую условно-нулевую точность 0_ε элементарно «маскирует» любую несоизмеримость за счёт допустимой точности.

Если обе части тождества $x = x \pm 0_\varepsilon$ умножить на ½, то станет понятной также надуманность несуществующей проблемы несоизмеримости половин дискретного отрезка, содержащего нечётное количество точек.

Поскольку появление иррациональных чисел явилось откликом на «открытие» несоизмеримости отрезков, то с решением надуманной проблемы несоизмеримости становятся ненужными введённые для работы «в условиях несоизмеримости» иррациональные числа.

10. Выводы

1. В работе показано, что современные мировоззренческие проблемы математики кроются в многотысячелетних попытках удержать в неприкосновенности древние заблуждения, в частности, противоречивую абстракцию безразмерной точки.

2. Указан путь разрешения всех базовых противоречий математики, вытекающих из ничем не обоснованной **веры** в недостижимую точность вычислений, за счёт отказа от устаревших абстракций и перехода к реально требуемой точности.

3. Введены новые понятия условного нуля, условной бесконечности и беспредельности, позволяющие легко устранить все противоречия и парадоксы классической непрерывной математики, а также дающие ключ к решению проблемы учёта количественно-качественных числовых изменений.

4. Предложенный подход к разрешению проблем непрерывной математики позволяет обойтись без внесения изменений в основы математики и сохранить в неизменном виде все уже имеющиеся фундаментальные наработки.

5. Для устранения тысячелетних математических проблем достаточно придать новый смысл таким привычным для всех нас понятиям, как точка, нуль, бесконечность, вещественные числа, числовая ось.

References:

1. Kudryavtsev A.V. Fundamental'nye paradoksy matematiki [Fundamental paradoxes of mathematics]. Yesterday-today-tomorrow: historical and philosophical comprehension as the basis of the scientific world view: Materials digest of the LXVII International Research and Practice Conference and III stage of the Championship in Historical and Philosophical sciences. – London, October 10-15, 2013. International Academy of Science and Higher Education. – London., IASHE, 2013., pp. 81-83.

2. Kudryavtsev A.V. Adaptatsiya osnov matematiki k zadacham novoi epokhi [Adaptation of foundations of math to tasks of the new epoch], Theory and Practice in the Physical, Mathematical and Technical Sciences: Materials digest of the XXIV International Scientific and Practical Conference and the I stage of Research Analytics Championship in the physical, mathematical and technical sciences. – London, May 3–May 13, 2012., pp. 18-21.

3. Kudryavtsev A.V. Osnovy matematiki – dogma ili paradigma? [Foundations of math - dogma or paradigm?]., Models and methods of solving formal and applied scientific issues in physico-mathematical, technical and chemical research: Materials digest of the XXXII International Research and Practice Conference and the II stage of Research Analytics Championship in physico-mathematical and technical sciences. – London, September 20-25, 2012. International Academy of Science and Higher Education. – London., IASHE, 2012., pp. 90-93.

Литература:

1. Кудрявцев А. В. Фундаментальные парадоксы математики. // Yesterday-today-tomorrow: historical and philosophical comprehension as the basis of the scientific world view: Materials digest of the LXVII International Research and Practice Conference and III stage of the Championship in Historical and Philosophical sciences. – London, October 10-15, 2013. International Academy of Science and Higher Education. – London: IASHE, 2013. – pp. 81-83.

2. Кудрявцев А.В. Адаптация основ математики к задачам новой эпохи // Theory and Practice in the Physical, Mathematical and Technical Sciences: Materials digest of the XXIV International Scientific and Practical Conference and the I stage of Research Analytics Championship in the physical, mathematical and technical sciences. – London, May 3–May 13, 2012. – pp. 18-21.

3. Кудрявцев А.В. Основы математики – догма или парадигма? // Models and methods of solving formal and applied scientific issues in physico-mathematical, technical and chemical research: Materials digest of the XXXII International Research and Practice Conference and the II stage of Research Analytics Championship in physico-mathematical and technical sciences. – London, September 20 - 25, 2012. International Academy of Science and Higher Education. – London: IASHE, 2012. – pp. 90-93.

Information about author:

1. Alexander Kudryavtsev - Associate Professor, Higher School of Social Technologies; address: Latvia, Riga city; e-mail: avk@sta-edu.lv