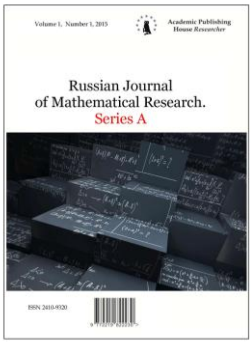

Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
Vol. 1, Is. 1, pp. 31-36, 2015

DOI: 10.13187/rjmr.a.2015.1.31
www.ejournal30.com

UDC 519.2

Measurable Cantor Group in R^1

Arsen R. Simonyan

Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Street 26a, Sochi city, 354000
PhD (physics and mathematical), Associate Professor
E-mail: oppm@mail.ru

Abstract

The article focuses on the criteria of convergence of series of independent random variables and regularly varying functions. The author examines the convergence of sums of independent random variables in many of the classical limit theorems of probability theory. Limit laws are derived using characteristic functions (or integral Laplace transform). That is, in the transition to the characteristic functions, the transition from a group with addition (and subtraction) to a group with multiplication (and division). This factor is the basis for the research of measurable Cantor groups.

Keywords: measurable functions; Lebesgue measure; random variable; group with the generating set; Cantor group.

В условиях перехода к характеристической функции, переход из группы с добавлением (и вычитание) в группе с умножением (и деления).

Введение

Во многих классических предельных теоремах теории вероятностей применяется аппарат характеристических функций или интегрального преобразования Лапласа [1-4]. Постановка задач в настоящей статье вызвана критериями сходимости рядов независимых случайных величин (СВ) и правильного изменения функций.

Пусть $G(s)$ – группа в R^1 ($G^+(S^+)$ – группа в R^+) с обычными сложением и вычитанием (умножением и делением) и с порождающим множеством S *(с порождающим множеством* S^+).

Отображение $\exp x, x \in \mathrm{R}^1$ создает взаимно-однозначное соответствие между S и S^+ и соответствующими им группами.

а) Рассмотрим ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ независимых СВ. Пусть $f_n, n \geq 1$ - характеристическая функция СВ ξ_n . Бесконечное произведение $\prod_{n\geq 1} f_n$ имеет смысл, если существует предел

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} g_n(t) = \prod_{n\geq 1} f_n(t), \qquad t \in \mathrm{R}^1, \tag{1}$$

где $g_n = \prod_{k=1}^{n} f_k, \quad n \geq 1.$

Существование предела (1) в точке t с $f(t) \neq 0$ влечет его существование в точке $(-t)$ с $f(-t) \neq 0$. Действительно,

$$f(-t) = \prod_{n\geq 1} f_n(-t) = \prod_{n\geq 1} \overline{f_n(t)} = \overline{\prod_{n\geq 1} f_n(t)} = \overline{f(t)} \neq 0,$$

где $\bar{g}$ – функция, сопряженная с g.

Известно [5] :

Ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ независимых СВ сходится тогда и только тогда, когда верно (1) и $f \neq 0$ на некотором $S \subset \mathrm{R}^1$ с $m(S) > 0$, где m-мера Лебега.

Можно считать, что

$$(-S) = \{x:\ -x \in S\} = S. \tag{2}$$

Критерий усилен в [6].

Ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ независимых СВ сходится тогда и только тогда, когда верно (1) и $f \neq 0$ на некотором $S \subset \mathrm{R}^1$ с $G(S) = \mathrm{R}^1$.

Первый критерий выводится из второго на базе теоремы Штейнхауза [7].

Если $S \subset \mathrm{R}^1$ и $m(S) > 0$, то найдется

$$[a, b] = \{x + y: x \in S, y \in S\},\ -\infty < a < b < +\infty.$$

Для S вида (2) с $m(S) > 0$ найдется $[c, d]$, $-\infty < a < b < +\infty$, такое, что

$$I \stackrel{\text{def}}{=} [-d, -c] \cup [c, d] \subset \{x + y: x \in S, y \in S\}.$$

Тогда $\mathrm{R}^1 = G(\mathrm{R}^1) = G(\cup_{n\geq 1}[-nd, nd]) = G([-d, d]) = G(I) \subset G(S)$.

Второй критерий представляет интерес в случае $m(S) = 0$. Речь идет о несчетном S, поскольку в противном случае $G(S)$ не более чем счетно и $G(S) \neq \mathrm{R}^1$.

б) Пусть задана измеримая на R^+ функция $R(t) > 0$.

Известен следующий критерий Сенеты [8]:

Если на некотором $S^+ \subset \mathrm{R}^+$ с $m(S^+) > 0$ выполнены условия:

$$1)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{R(xt)}{R(t)} = \varphi(x); \qquad 2)\ 0 < \varphi(x) < +\infty,$$

то $R(t)$ правильно меняется при $t \to +\infty$.

Следующее простое предложение усиливает критерий Сенеты:

Если 1)-2) имеют место на некотором $S^+ \subset \mathrm{R}^+$ с $G^+(S^+) = \mathrm{R}^+$, то $R(t)$ правильно меняется при $t \to +\infty$.

Интерес представляет случай несчетного S^+ с $m(S^+) = 0$.

Отметим, что первый критерий усилен в [6], а второй – в случае $m(S^+) = 0$ в [9].

Постановка задачи

Для несчетного $S \subset \mathrm{R}^1$ с $m(S) = 0$ вопрос измеримости даже множества

$$\{x + y : x \in S, y \in S\} \tag{3}$$

к настоящему времени не изучен. С другой стороны, в теории групп и в смежных областях несчетные порождающие множества S групп $G(S)$ не являются объектами анализа.

Пример неизмеримого множества (3) построен в [10]. Общие теоремы типа теоремы Штейнхауза в случае несчетного S с $m(S) = 0$ неизвестны.

Известны примеры несчетных множеств S с $m(S) = 0$, для которых справедлива теорема Штейнхауза. Например, таковы канторовы множества (см. [2] и [7])

$$[-1,1] \subset S_k = \{x : x = \sum_{n \geq 1} 3^{-n} \cdot x_n,\ \ x_n = 0 \ \text{или}\ x_n = k\}, \quad k = 1,2. \tag{4}$$

Тогда очевидно, $G(S_k) = \mathrm{R}^1, \quad k = 1,2.$

Возникает вопрос: какова структура измеримых групп $G(S)$ в R^+?

Имеет место следующее простое предложение:

Если группа $G(S)$ в R^1 измерима, то либо $G(S) = \mathrm{R}^1$, либо $m(G(S)) = 0$.

Действительно, если $m(S) > 0$, то по теореме Штейнхауза $G(S) = \mathrm{R}^1$. Если $G(S)$ измеримо, то либо $m(G(S)) = 0$, либо $m(G(S)) > 0$. Во втором случае в качестве S можно взять $G(S)$. Тогда $G(G(S)) = G(S) = \mathrm{R}^1$.

Известен способ построения несчетных, совершенных, нигде не плотных канторовых множеств, содержащих (4) (см.[12]).

Пусть $1 < n_1 < n_2 < \cdots$ - последовательность целых чисел. Разделим отрезок $[0,\ k^m]$, где $k \geq 3,\ m \geq 0$ - целые числа, на k^{m+n_1-1} последовательные непересекающиеся отрезки равной длины. Каждый из них разобьем на k равных частей, первую и последнюю из которых (или либо две) оставим, а остальные $k-2$ части выкинем так, чтобы выбранные два отрезка были замкнуты. Оставшееся множество замкнуто и состоит из $2 \cdot k^{m+n_1-1}$ замкнутых отрезков с суммарной длиной $(2/k) \cdot k^m$. После операции каждый отрезок рассматривается отдельно.

Повторяя операцию, делим каждый отрезок уже на $k^{n_2-n_1}$ равных частей. Операция сохраняет конечное число отрезков с общей длиной $(2/k)^2 \cdot k^m$.

Счетная процедура выкидывает из отрезка $[0, k^m]$ счетное число открытых интервалов с суммарной лебеговой мерой k^m.

Оставшееся замкнутое несчетное множество S имеет нулевую лебеговую меру и является искомым канторовым множеством.

Элементы S представлены в -ичной системе. Именно, для $m \geq 0$

$$[0, k^m] = \{x : x = \sum_{n \geq -m+1} k^{-n} \cdot x_n,\ \ x_n = 0,1,\cdots,k-1,\quad n \geq -m+1\},$$

а для элементов S:

$$x_{n_s} = 0 \text{ или } x_{n_s} = k-1 \text{ при всех } s \geq 1\,, \tag{5}$$

остальные x_n принимают значения $0,1,\cdots,k-1$ (если поменять (5) на условие $x_{n_s}=0$ для всех $s\geq 1$, то опять получим канторово множество).

Можно получить взаимно-однозначное соответствие между точками S и их -ичными представлениями, если для $x\in S$ с двумя представлениями видов

$$x=\sum_{n=-m+1}^{r} k^{-n}\cdot x_n+\sum_{n>r} k^{-n}\cdot(k-1),$$

и

$$x=\sum_{n=-m+1}^{r-1} k^{-n}\cdot x_n+k^{-r}\cdot(x_r+1),$$

где $x_r=0,1,\cdots,k-2$. Необходимо выбирать лишь одно, скажем, первое.

Определение. Группа $G(S)$ в R^1 называется канторовой группой, если S – канторово множество.

Теперь, в связи с вышесказанным и (4) возникает вопрос существования канторовых групп с нулевой лебеговой мерой.

В работе построено семейство канторовых групп $G(S)$ таких, что $m\big(G(S)\big)=0$.

Основной результат. Пусть $1<\varphi_1<\varphi_2<\cdots$ - последовательность целых чисел и для любого $m\geq 1$ найдется $r_m>1$ такое, что

$$\varphi_r-\varphi_{r-1}>2m+1 \text{ при } r>r_m. \qquad (6)$$

Для заданного $k\geq 3$ введем множества

$$S_0=S_0(\{\varphi_n\})=\{x\colon\ x=\sum_{n\geq 1} k^{-\varphi_n}\cdot x_n,\ \ x_n=0,1,\cdots,k-1,\ \ n\geq 1\},$$

Теорема. Множества$G(S_0)$ образуют семейство канторовых групп с $m\big(G(S_0)\big)=0$.

Доказательство. S_0 - несчетное канторово множество с $m(S_0)=0$, поскольку в -ичных представлениях его элементов не равны нулю разве лишь коэффициенты с индексами $\varphi_n,\ \ n\geq 1$.

Определим множество $B_m^+\subset[0,k^m]$ следующим образом.

Для каждого $m\geq 1$ в -ичных представлениях точек B_m^+ в цифрах с индексами $\varphi_r\pm i$ коэффициенты пробегают значения от 1 до $k-1$ и равны нулю в остальных цифрах (ненулевыми могут быть разве лишь коэффициенты “массивов” $[\varphi_r-m,\varphi_r+m]$).

Массивы $[\varphi_r-m,\varphi_r+m]$, начиная с индекса r_m “отделены” друг от друга, и, в силу (6),

$$\varphi_{r-1}+m<\varphi_r-1-m \text{ при } r\geq r_m.$$

Полагаем

$$B_m^+=\Big\{x\colon x=\sum_{n=-m+1}^{l_m} k^{-n}\cdot y_n+\sum_{r\geq r_m}\sum_{i=-m}^{m} k^{-\varphi_r-1}\cdot y_{r,i},$$
$$y_n,y_{r,i}=0,1,\cdots,k-1,\quad n=\overline{-m+1,l_m},\ \ r\geq r_m,\ \ i=\overline{-m,m}\Big\},$$

где $l_m=\varphi_r+m$. Как показано ранее, $B_m^+,\ m\geq 1$ – несчетные канторовы множества и $m(B_m^+)=0$. Таковы же множества

$$B_m^-=\{x\colon\ -x\in B_m^+\} \text{ и } B_m=B_m^-\cup B_m^+,\ m\geq 1.$$

Пусть $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел. С помощью S_0 построим множества

$$S_{n,j} = \{x: x = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i,\ \ x_i \in S_0,\ \ p_i \in \mathbb{Z},\ \ |p_i| \le k^j,\ \ i = \overline{1,n}\},\ \ n,j \ge 1$$

и покажем, что

$$S_{n,j} \subset B_{n+j-1} \text{ при всех } n,j \ge 1. \tag{7}$$

Любое $x \in S_{n,j}$ представимо в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = \sum_{r\ge1} k^{-\varphi_r} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i,$$

где $x_{i,r} = 0,1,\cdots,k-1,\quad p_i \in \mathbb{Z},\ |p_i| \le k^j,\ i = \overline{1,n},\ r \ge 1$. Поскольку для любого $r \ge 1$

$$k^{-\varphi_r} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i < n \cdot k^{j+1} \cdot k^{-\varphi_r} < k^{-\varphi_r+n+j-1},$$

то $x \in B_{n+j+1}^{+}$ при $x \ge 0$. Таким образом, установлено, что

$$S_{n,j}^{+} = \{x \ge 0: x \in S_{n,j}\} \subset B_{n+j+1}^{+},\ \ n,j \ge 1.$$

Аналогично, получаем

$$S_{n,j}^{-} = \{x \le 0: x \in S_{n,j}\} \subset B_{n+j+1}^{-} \text{ и } S_{n,j} = S_{n,j}^{-} \cup S_{n,j}^{+} \subset B_{n+j+1},\ \ n,j \ge 1.$$

В силу (7), $0 \le m(S_{n,j}) \le m(B_{n+j+1})$, т.е. $m(S_{n,j}) = 0$.

Поэтому для множества $G = \bigcup_{n\ge1} \bigcup_{j\ge1} S_{n,j}$ имеем $0 \le m(G) \le \sum_{n\ge1}\sum_{j\ge1} m(S_{n,j}) = 0$, откуда следует $m(G) = 0$. Так как $G = G(S_0)$, то теорема доказана.

Примечания:

1. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Вокруг теоремы Боровкова-Коэна // Известия Сочинского государственного университета, 2013, № 3(26), с. 140-144.
2. Симонян А.Р., Улитина Е.И. О параметрических моделях массового обслуживания // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. С. 184.
3. Danielyan E.A., Simonyan A.R., Ulitina E.I. Regular Variation of the Tail of Distribution of the Sum of the Random Number of Independent Random Variables // European Researcher, 2012, No 5-1. P. 440-447.
4. Simonyan A.R., Ulitina E.I., A Theorem on the Convergence to a Stable Law in the M|G|1|∞ Model // Russian Mathematical Surveys. 2004. Т. 59. № 3. С. 589-590.
5. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 449 с.
6. Arakelian A.Z. An Application of Steinhaus Theorem to Regularly Varying Functions // Journal of Contemporary Analysis, vol.33, No5, 1998, p. 73-77.
7. Steinhaus H. Sur les Distances des Points de Mesure Positive // Fund. Math., 1920, p. 93-104.
8. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 144 с.
9. Danielyan E., Danielian I., Agaian S. Generalization of the Concept Regular Variation // Tampere: TICSP Series, №12, 2001, p. 33-51.
10. Rubel L.A. Pathological Lebesque-Measurable Function // J.LMS, 1963, 38, p. 1-4.
11. Партарасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983, 336 с.
12. Гельбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, 252 с.

References:

1. Simonyan A.R., Ulitina E.I. Vokrug teoremy Borovkova-Koena // Izvestiya Sochinskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013, № 3(26), s. 140-144.
2. Simonyan A.R., Ulitina E.I. O parametricheskikh modelyakh massovogo obsluzhivaniya // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2005. T. 12. S. 184.
3. Danielyan E.A., Simonyan A.R., Ulitina E.I. Regular Variation of the Tail of Distribution of the Sum of the Random Number of Independent Random Variables // European Researcher, 2012, No 5-1. P. 440-447.

4. Simonyan A.R., Ulitina E.I., A Theorem on the Convergence to a Stable Law in the M|G|1|∞ Model // Russian Mathematical Surveys. 2004. T. 59. № 3. S. 589-590.
5. Loev M. Teoriya veroyatnostei. M.: IL, 1962, 449 s.
6. Arakelian A.Z. An Application of Steinhaus Theorem to Regularly Varying Functions // Journal of Contemporary Analysis, vol.33, No5, 1998, p. 73-77.
7. Steinhaus H. Sur les Distances des Points de Mesure Positive // Fund. Math., 1920, p. 93-104.
8. Seneta E. Pravil'no menyayushchiesya funktsii. M.: Nauka, 1985, 144 s.
9. Danielyan E., Danielian I., Agaian S. Generalization of the Concept Regular Variation // Tampere: TICSP Series, №12, 2001, p. 33-51.
10. Rubel L.A. Pathological Lebesque-Measurable Function // J.LMS, 1963, 38, p. 1-4.
11. Partarasarati K.R. Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i teoriyu mery. M.: Mir, 1983, 336 s.
12. Gel'baum B., Olmsted Dzh. Kontrprimery v analize. M.: Mir, 1967, 252 s.