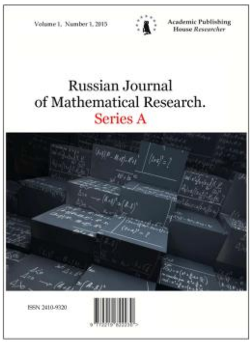
Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
Vol. 1, Is. 1, pp. 20-30, 2015

DOI: 10.13187/rjmr.a.2015.1.20
www.ejournal30.com



UDC 517.95

Multidimensional Inverse Problem for the System of Parabolic Equations in Unbounded Domain

[1] M.A. Quliyev
[2] U.V. Qurbanova

[1] Baku State University, Azerbaijan
[2] Ganja State University, Azerbaijan
E-mail: Ulya1812@mail.ru

Abstract

In the paper we investigate the multidimensional inverse problem for the system of parabolic equations in an unbounded domain. The proposed problem is reduced to a boundary value problem of infinite elliptic equations and the method of successive approximations allows one to prove the existence and uniqueness theorems for solutions of systems of these elliptic.

Keywords: inverse problem; existence and uniqueness; unbounded domain; parabolic equations.

Введение

В работе рассматривается вопрос разрешимости обратных задач для систем параболических уравнений в неограниченной области.

В области $Q = D \times (-\infty, \infty)$ рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Au(x,t) = a(x)u(x,t) + b(x)v(x,t) + h(x)f(x,t)\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - Av(x,t) = a_1(x)u(x,t) + b_1(x)v(x,t) + q(x)g(x,t), \tag{2}$$

$$u(x',t) = F(x',t), v(x',t) = G(x',t), (x',t) \in \Gamma = S \times (-\infty, \infty), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), v(x,0) = \psi(x), x \in \overline{D}, \tag{4}$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x), v(x,T) = \psi_1(x), x \in D\,, \tag{5}$$

где D ограниченная область в R^n, $S = \partial D \in C^2$, $n \le 3$, $Au = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$,

$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^4(\overline{D})$ и $\forall\xi\in R^n\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\ \geq\ \mu_0|\xi|^2$, $\mu_0=const>0$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $a(x)$, $b_1(x)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ - заданные, а $b(x)$, $a_1(x)$, $a_1(x)$, $h(x)$, $q(x)$ - искомые функции.

Определение. Систему $\{u(x,t)$, $v(x,t)$, $b(x)$, $a_1(x)$, $h(x)$, $q(x)\}$ назовем решением задачи (1)-(5), если они удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $b(x)$, $a_1(x)$, $h(x)$, $q(x)\in W_2^2(D)$.

2. $u(x,t), u_{tx}(x,t), u_{x_i}(x,t)\ (i=\overline{1,n}),\ u_{x_ix_j}(x,t)\ (i,j=\overline{1,n}),\ u_{tt}(x,t)\ (i=\overline{1,n})\in L_2(Q)$.

3. $E(\tilde{u})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{D}(1+|\lambda|)^{2(p-1)}[|\tilde{u}(x,\lambda)|(1+|\lambda|)^2+A|\tilde{u}(x,\lambda)|^2]dxd\lambda<\infty$, $p>\dfrac{3}{2}$,

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)d\lambda .$$

4. $v(x,t), v_{tx}(x,t), v_{x_i}(x,t)\ (i=\overline{1,n}),\ v_{x_ix_j}(x,t)\ (i,j=\overline{1,n}),\ v_{ttx_i}(x,t)\ (i=\overline{1,n})\in L_2(Q)$.

5. $E(\tilde{v})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{D}(1+|\lambda|)^{2(p-1)}[|\tilde{v}(x,\lambda)|^2(1+|\lambda|)^2+|A\tilde{v}(x,\lambda)|^2]dxd\lambda<\infty$,

$$v(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{v}(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)d\lambda .$$

6. Условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Предположим, что функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)\in W_2^4(D)$,

$$\varphi(x)\big|_S=F(x,t)\big|_{t=0},\ \psi(x)\big|_S=G(x,t)\big|_{t=0},$$

$$\varphi_1(x)\big|_S=F(x,t)\big|_{t=T},\ \psi_1(x)\big|_S=G(x,t)\big|_{t=T} .$$

2) $f(x,t),\dfrac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\in L_2(Q),\ f(x,0)\in W_2^2(D)$,

$$g(x,t),\frac{\partial^p g(x,t)}{\partial t^p}\in L_2(Q),\ g(x,0)\in W_2^2(D).$$

3) $F(x,t),\dfrac{\partial^{p+2}F(x,t)}{\partial t^{p+2}}\in L_2(-\infty,\infty;W_2^{7/2}(S))$,

$$G(x,t),\frac{\partial^{p+2}G(x,t)}{\partial t^{p+2}}\in L_2(-\infty,\infty;W_2^{7/2}(S)) .$$

4) $\left|\Delta\right| = \left|\psi(x) f(x,T) - \psi_1(x) f(x,0)\right| \ge \delta > 0, \ \forall x \in \bar{D}$

$\left|\Delta\right|_1 = \left|\psi(x) g(x,T) - \psi_1(x) g(x,0)\right| \ge \delta_1 > 0, \ \forall x \in \bar{D}.$

Приведём следующую лемму

Лемма 1. Пусть $\tilde{u}(x,\lambda), \tilde{v}(x,\lambda)$ - решение задачи

$$-i\lambda\tilde{u}(x,\lambda) - A\tilde{u}(x,\lambda) = a(x)\tilde{u}(x,\lambda) + \frac{1}{\Delta(x)}\left\{-f(x,T)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)d\lambda + f(x,0)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)d\lambda\right\} +$$

$$+Q_1(x) + \frac{1}{\Delta(x)}\left\{-\psi(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda + \psi_1(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)d\lambda\right\} + Q_2(x),$$

$$-i\lambda\tilde{v}(x,\lambda) - A\tilde{v}(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta_1(x)}\left\{\varphi(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda + \varphi_1(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)d\lambda\right\} + Q_3(x) +$$

$$+\frac{1}{\Delta_1(x)}\left\{-g(x,T)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)d\lambda + g(x,0)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda\right\} + Q_4(x) + b_1(x)\tilde{v}(x,\lambda), \quad (6)$$

$$\tilde{u}(x,\lambda)\big|_S = \tilde{F}(x,\lambda), \tilde{v}(x,\lambda) = \tilde{G}(x,\lambda) \qquad (7)$$

из класса $E(u) < \infty$.

Тогда функции

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)d\lambda, \quad v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{v}(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)d\lambda,$$

$$b(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left(-f(x,T)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)d\lambda - f(x,0)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda + Q_1(x),\right.$$

$$h(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left(-\psi(x)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda + \psi_1(x)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{u}(x,\lambda)d\lambda + Q_2(x),\right.$$

$$a_1(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left(-\varphi(x)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)d\lambda\exp(-i\lambda T)d\lambda + \varphi_1(x)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)d\lambda\right) + Q_3(x)$$

$$q(x) = \frac{1}{\Delta_1(x)}\left(-g(x,T)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)d\lambda + g(x,0)i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde{v}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda\right) + Q_4(x)$$

являются решением обратной задачи (1)-(5), где

$$Q_1(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left[f(x,T)(-A\varphi(x) - a(x)\varphi(x)) - f(x,0)(-A\varphi_1(x) - a(x)\varphi_1(x))\right],$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left[\psi(x)(-A\varphi_1(x)-a(x)\varphi_1(x))+\psi_1(x)(A\varphi(x)+a(x)\varphi(x))\right],$$

$$Q_3(x)=\frac{1}{\Delta_1(x)}\left[g(x,T)(-A\psi(x)-b_1(x)\psi(x))-g(x,0)(-A\psi_1(x)-b_1(x)\psi(x))\right],$$

$$Q_4(x)=\frac{1}{\Delta_1(x)}\left[g(x,0)(-A\psi_1(x)-b_1(x)\psi_1(x))+g(x,T)(A\psi(x)+b_1(x)\psi(x))\right].$$

Доказательство леммы 1 следует из разрешимости задачи (6),(7) указанном в классе и того, что

$u(x,0)=\varphi(x)$, $v(x,0)=\psi(x)$ и $u(x,T)=\varphi_1(x)$, $v(x,T)=\psi_1(x)$.

Теперь установим разрешимость задачи (6),(7). Обозначим через $\kappa(x,\lambda)$ и $w(x,\lambda)$ функции

$$A\kappa(x,\lambda)=0,\ \ \kappa(x,\lambda)\big|_S=\tilde F(x,\lambda)$$

$$\left\|\kappa(x,\lambda)\right\|^2_{W_2^4(D)}\le C_1^2\left\|\tilde F(x,\lambda)\right\|^2_{W_2^{7/2}(S)} \tag{8}$$

и

$$Aw(x,\lambda)=0,\ \ w(x,\lambda)\big|_S=\tilde G(x,\lambda)$$

$$\left\|w(x,\lambda)\right\|^2_{W_2^4(D)}\le C_1^2\left\|\tilde G(x,\lambda)\right\|^2_{W_2^{7/2}(S)}. \tag{9}$$

Для разрешимости задачи (6)-(7) применим метод последовательных приближений

$$-i\lambda\tilde u^{(m)}(x,\lambda)-A\tilde u^{(m)}(x,\lambda)=a(x)\tilde u^{(m-1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\Delta(x)}\left\{-f(x,T)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)d\lambda+\right.$$

$$\left.+f(x,0)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde u^{(m-1)}(x,\lambda)d\lambda+\tilde Q_1(x)\right\}\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\Delta(x)}\left\{-\psi(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde u^{(m-1)}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda+\right.$$

$$\left.+\psi_1(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde u^{(m-1)}(x,\lambda)d\lambda+\tilde Q_2(x)+i\lambda\kappa(x,\lambda)+a(x)\kappa(x,\lambda)\cdot\tilde f(x,\lambda)\right\};$$

$$-i\lambda\tilde v^{(m)}(x,\lambda)-A\tilde v^{(m)}(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta_1(x)}\left\{\varphi(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda+\right.$$

$$\left.+\varphi_1(x)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)d\lambda+\tilde Q_3(x)\right\}\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\Delta_1(x)}\left\{-g(x,T)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)d\lambda+\right.$$

$$\left.+g(x,0)\cdot i\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda)\exp(-i\lambda T)d\lambda+\tilde Q_4(x)+i\lambda w(x,\lambda)+b_1(x)w(x,\lambda)\right\}\tilde g(x,\lambda)+$$

$$+b_1(x)\tilde v^{(m-1)}(x,\lambda) \tag{10}$$

$$\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\Big|_S = 0, \quad \tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\Big|_S = 0, \qquad m = 0,1,2,\dots, \tag{11}$$

где

$$\tilde{Q}_1(x) = Q_1(x) - \frac{f(x,T)}{\Delta(x)} i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, w(x,\lambda) d\lambda + \frac{f(x,0)}{\Delta(x)} i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \kappa(x,\lambda) d\lambda,$$

$$\tilde{Q}_2(x) = Q_2(x) - \frac{\psi(x)}{\Delta(x)} i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \kappa(x,\lambda) d\lambda + \frac{\psi_1(x)}{\Delta(x)} i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \kappa(x,\lambda) d\lambda,$$

$$\tilde{Q}_3(x) = Q_3(x) + \frac{1}{\Delta_1(x)} \varphi(x) i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda w(x,\lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda + \frac{\varphi_1(x)}{\Delta_1(x)} i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, w(x,\lambda) d\lambda,$$

$$\tilde{Q}_4(x) = Q_4(x) - \frac{1}{\Delta_1(x)} g(x,T) i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda w(x,\lambda) d\lambda + \frac{g(x,0)}{\Delta_1(x)} i \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, w(x,\lambda) \exp(-i\lambda T) d\lambda$$

Установим сначала априорные оценки для решения задачи (10)-(11).

Отметим следующие вспомогательные леммы:

Лемма 2 (См.[2]). Пусть

$$\|\Phi_l\|_{L^\infty(0,T)} \le \gamma_0 + \gamma_1 T \|\Phi_{l-1}\|_{L^\infty(0,T)} + \gamma_2 T \|\Phi_{l-1}\|^2_{L^\infty(0,T)}$$

Если $2T\gamma_1 + 4T\gamma_2\gamma_0 \le 1$ и $\|\Phi_0\|_{L^\infty(0,T)} \le 2\gamma_0$, то $\|\Phi_l\|_{L^\infty(0,T)} \le 2\gamma_0$, ..., где $\gamma_i > 0 (i = \overline{0,2})$ некоторые постоянные.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1–4 и

$$\frac{12Z_0}{\mu_0}\Bigg[\|a(x)\|^2_{C(\bar{D})} + \frac{N_0^2}{2p-3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\|\tilde{f}(x,\lambda)\|^2_{C(\bar{D})} d\lambda + 2N_0^2 + \|b(x)\|^2_{C(\bar{D})} + \frac{N_0^2}{2p-3}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\|\tilde{g}(x,\lambda)\|^2_{C(\bar{D})} d\lambda\Bigg] C_1^2 + \frac{12Z_0}{\mu_0}\Big(\frac{N_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|f(x,\lambda|^2 dx d\lambda + (1+N_0^2)\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|F(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)} d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|\tilde{f}(x,\lambda)\|^4 dx d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+N_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\|\tilde{g}(x,\lambda)\|^2 dx d\lambda + (1+N_0^2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|F(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)} d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|\tilde{f}(x,\lambda)\|^4 dx d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}} + N_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\|\tilde{g}(x,\lambda)\|^2 dx d\lambda +$$

$$+(1+N_0^2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\times\|G(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}\,d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2|\tilde{g}(x,\lambda|^4\,dxd\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{N_0^2}{2p-3}\cdot\frac{2z_0}{\mu_0}\cdot C_2^4\cdot Z_0^{\frac{4-n}{2}}\leq\frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Тогда для последовательных приближений, определяемых (10),(11), справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\nabla\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\nabla\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dx\,d\lambda\leq\frac{2Z_0}{\mu_0}\left[\frac{N_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|f(x,\lambda)|^2\,dxd\lambda+\right.$$

$$+(1+N_0^2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|F(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}\,d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\left\|\tilde{f}(x,\lambda)\right\|^4\,dxd\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+N_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\tilde{g}(x,\lambda|^2\,dxd\lambda+(1+N_0^2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|G(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}\,d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2|\tilde{g}(x,\lambda|^4\,dxd\lambda\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

где

$$C_1:\|y\|^2_{C(D)}\leq C_1^2\|y\|^2_{W_2^{7/2}(S)},\; C_2:\|y\|_{L_4(D)}\leq C_2^2\|y\|^{\frac{n}{4}}_{W_2^1(D)}\cdot\|y\|^{\frac{4-n}{2}}_{L_2(D)},$$

$$N_0=\max\left\{\left\|\frac{\varphi(x)}{\Delta_1(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\varphi_1(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\psi(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\psi_1(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{f(x,T)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{f(x,0)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\right.$$

$$\left.\left\|\frac{g(x,T)}{\Delta_1(x)}\right\|_{C(\bar{D})}+\left\|\frac{g(x,0)}{\Delta_1(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\tilde{Q}_1(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\tilde{Q}_2(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\tilde{Q}_3(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})},\left\|\frac{\tilde{Q}_4(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\bar{D})}\right\},$$

$0\neq\frac{1}{Z_0}$ - наименьшее собственное число задачи $-\Delta u=\frac{1}{Z}u,\; u|_S=0$.

Доказательство. Из (10), (11), применяя неравенство $ab\leq\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{b^2}{2\varepsilon},\quad\forall\varepsilon>0$ получаем

$$\mu_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\nabla\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\nabla\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dx\,d\lambda\leq$$

$$\le \frac{13\varepsilon Z_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_D \left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\nabla\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\nabla\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dxd\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\Big[\|a(x)\|^2_{C(\bar{D})}+\frac{N_0^2}{2p-3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\|\tilde{f}(x,\lambda)\|^2_{C(\bar{D})}\,d\lambda+2N_0^2+\|b(x)\|^2_{C(\bar{D})}+$$

$$+\frac{N_0^2}{2p-3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\|\tilde{g}(x,\lambda)\|^2_{C(\bar{D})}\,d\lambda\Big]\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2\right)dxd\lambda+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\frac{N_0^2}{2p-3}C_2^4 Z_0^{\frac{4-n}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\nabla\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\nabla\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dxd\lambda\right]^2+$$

$$+\frac{N_0^2}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|f(x,\lambda)|^2\,dxd\lambda+\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|F(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}\,d\lambda\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2|f(x,\lambda|^4\,dxd\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}(1+N_0^2)+\frac{N_0^2}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left|g^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2dxd\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}(1+N_0^2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|G(x,\lambda)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}\,d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}|\lambda|^2\|\tilde{g}(x,\lambda)\|^4\,dxd\lambda\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Тогда, взяв (14) $\varepsilon=\dfrac{\mu_0}{14}$ и, применяя лемму 2, получим оценки (13).

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для последовательных приближений, определяемых (10), (11), справедливы оценки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\left(\left|A\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|A\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dx\,d\lambda\le C_0(\gamma_0)\,, \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\Big[\left(1+|\lambda|\right)^2\left|\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2+$$

$$+\left|A(\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2\Big]d\,x\,d\lambda\le const\;q^m,\;q<1, \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\Big[\left(1+|\lambda|\right)^2\left|\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2+$$

$$+\left|A(\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2\Big]d\,x\,d\lambda\le const\;q^m,\;q<1. \quad (17)$$

Доказательство. Умножая соотношение (10) соответственно на

$\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2} A\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)$, $\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2} A\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)$ и, применяя « ε -неравенство», имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D \left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\left(\left|A\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|A\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dx\,d\lambda \le$$

$$\le \frac{\mu_0}{12Z_0}\left[\left\|a(x)\right\|^2_{C(\bar{D})}+\frac{N_0^2}{2p-3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\left\|\tilde{f}(x,\lambda)\right\|^2_{C(\bar{D})}d\lambda+2N_0^2+\left\|b(x)\right\|^2_{C(\bar{D})}+\right.$$

$$\left.+\frac{N_0^2}{2p-3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\left\|\tilde{g}(x,\lambda)\right\|^2_{C(\bar{D})}d\lambda\right]C_1^2 Z_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\nabla\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\nabla\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2\right)dxd\lambda+$$

$$+\frac{\mu_0}{6Z_0}\frac{N_0^2}{2p-3}\cdot Z_0^{\frac{4-n}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left(\left|\nabla\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2+\left|\nabla\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2\right)dx\,d\lambda\right]^2+$$

$$+\frac{\mu_0}{12Z_0}\Big[N_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}|f(x,\lambda)|^2\,dxd\lambda+\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}|\lambda|^2\left\|F(x,\lambda)\right\|^2_{W_2^{7/2}(S)}d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}|\lambda|^2\,|f(x,\lambda|^4\,dxd\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}(1+N_0^2)+$$

$$+N_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\left|\tilde{g}(x,\lambda)\right|^2dxd\lambda+(1+N_0^2)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}|\lambda|^2\left\|G(x,\lambda)\right\|^2_{W_2^{7/2}(S)}d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}|\lambda|^2\left|\tilde{g}(x,\lambda)^4\,dxd\lambda\right|\Bigg\} \tag{18}$$

Тогда, учитывая оценку (13), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p-2}\left(\left|A\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2+\left|A\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)\right|^2\right)dx\,d\lambda\le C_0(\gamma_0)\,. \tag{19}$$

Аналогично, как и выше, для разности $\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)$ и $\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)$ из (10),(11), с учётом оценки из леммы 3, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_D\left(1+|\lambda|\right)^{2p}\left[\left(1+|\lambda|\right)^2\left|\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\left|A(\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{u}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^2\right]d\,x\,d\lambda\le const\;q^m,\;\; q<1, \tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{D}(1+|\lambda|)^{2p}\Big[(1+|\lambda|)^{2}\left|\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^{2}+$$

$$+\left|A(\tilde{v}^{(m)}(x,\lambda)-\tilde{v}^{(m-1)}(x,\lambda)\right|^{2}\Big]d\,x\,d\lambda\leq const\;q^{m},\; q<1. \qquad (21)$$

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда при каждом фиксированном m существует единственное решение задачи (10),(11) из класса

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{D}(1+|\lambda|)^{2p-2}\Big[(1+|\lambda|)^{2}\left|\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^{2}+(1+|\lambda|)^{2}\left|\nabla\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^{2}+$$

$$+\left|A\tilde{u}^{(m)}(x,\lambda)\right|^{2}\Big]d\,x\,d\lambda<\infty.$$

Доказательство этой леммы проводится методом Галёркина.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 3 и

$$Z_0-\sqrt{3}2Z_0\left[\|Q_1(x)\|_{C(\bar{D})}+\|Q_3(x)\|_{C(\bar{D})}+\|a(x)\|_{C(\bar{D})}+\|b_1(x)\|_{C(\bar{D})}\right]\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2p-1}}\sqrt{C_0(\mu_0)}>0 \qquad (22)$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(5).

Доказательство. Разрешимость задачи (6),(7) следует из лемм 3, 4. Нам осталось доказать, что

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\; u(x,t)\big|_{t=T}=\varphi_1(x) \quad \text{и} \quad v(x,t)\big|_{t=0}=\psi(x),\; v(x,t)\big|_{t=T}=\psi_1(x).$$

Пусть $u(x,t)\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x)$, $v(x,t)\big|_{t=0}=\tilde{\psi}(x)$. Рассмотрим функции $\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)$, $\tilde{\psi}(x)-\psi(x)$. Обозначим $\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)=Z(x)$, $\tilde{\psi}(x)-\psi(x)=Z_1(x)$.

Тогда для функции $Z(x)$ и $Z_1(x)$ из (1),(2) и (4) имеем

$$\begin{aligned} AZ(x)&=a(x)Z(x)+l(x)Z_1(x),\\ AZ_1(x)&=K(x)Z(x)+b_1(x)Z_1(x), \end{aligned} \qquad (23)$$

$$Z(x)\big|_S=0,\; Z_1(x)\big|_S=0, \qquad (24)$$

где
$$|l(x)|^2\leq 3\left[\|Q_1(x)\|^2_{C(\bar{D})}+\frac{N_0^2}{2p-1}C_0(\mu_0)\right],$$

$$|K(x)|^2\leq 3\left[\|Q_1(x)\|^2_{C(\bar{D})}+\frac{N_0^2}{2p-1}C_0(\mu_0)\right].$$

Умножая соотношение (23) соответственно на $Z(x)$, $Z_1(x)$ и интегрируя по области D, имеем:

$$\mu_0 \int_D \left|\nabla Z(x)\right|^2 dx \le \left(\| l(x)\|_{C(\bar{D})} + \| a(x)\|_{C(\bar{D})} \right) \cdot 2Z_0 \left(\int_D \left(\left|\nabla Z(x)\right|^2 + \left|\nabla Z_1(x)\right|^2 \right) dx \right),$$

$$\mu_0 \int_D \left|\nabla Z_1(x)\right|^2 dx \le \left(\| K(x)\|_{C(\bar{D})} + \| b_1(x)\|_{C(\bar{D})} \right) \cdot 2Z_0 \left(\int_D \left(\left|\nabla Z(x)\right|^2 + \left|\nabla Z_1(x)\right|^2 \right) dx \right).$$

Отсюда, в силу условий теоремы, следует, что $Z(x) = 0, Z_1(x) = 0$.

Аналогично доказывается, что

$$u(x,T) = \varphi_1(x),\ v(x,T) = \psi_1(x).$$

Примечания:

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1967, 150 с.
2. Бубнов Б.А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений. Препринт. 714. Новосибирск, 1990, 44 с.
3. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для уравнения параболического типа в неограниченной области // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-мат., 2002, № 2, с. 122-129.
4. Multidimensional inverse boundary value problem for the system of hyperbolic equations // Applications and Applied Mathematics, vol.6, Issue 11 (June 2011), p. 2094-2109.
5. Кулиев М.А., Эл-Хадиди А.М. Многомерная обратная краевая задача для квазилинейной системы гиперболических уравнений в ограниченной области // Нелинейные граничные задачи. НАН Украины, Инс. Прик. матем. и механики, т.20 (2011). С. 91-103.

References:

1. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G. Mnogomernye obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii. Novosibirsk: Nauka, 1967, 150 s.
2. Bubnov B.A. K voprosu o razreshimosti mnogomernykh obratnykh zadach dlya parabolicheskikh uravnenii. Preprint. 714. Novosibirsk, 1990, 44 s.
3. Kuliev M.A. Mnogomernaya obratnaya kraevaya zadacha dlya uravneniya parabolicheskogo tipa v neogranichennoi oblasti // Vestnik Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta, seriya fiz.-mat., 2002, № 2, s. 122-129.
4. Multidimensional inverse boundary value problem for the system of hyperbolic equations // Applications and Applied Mathematics, vol.6, Issue 11 (June 2011), p. 2094-2109.
5. Kuliev M.A., El-Khadidi A.M. Mnogomernaya obratnaya kraevaya zadacha dlya kvazilineinoi sistemy giperbolicheskikh uravnenii v ogranichennoi oblasti // Nelineinye granichnye zadachi. NAN Ukrainy, Ins. Prik. matem. i mekhaniki, t.20 (2011). S. 91-103.

УДК 517.95

Об одной обратной задаче для систем параболических уравнений в неограниченной области

[1] М.А. Кулиев
[2] У.В. Гурбанова

[1] Бакинский государственный университет, Азербайджан
[2] Гянджинский государственный университет, Азербайджан
E-mail: Ulya1812@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается вопрос разрешимости обратных задач для систем параболических уравнений в неограниченной области. Предлагается метод, который основан на сведении обратной задачи к некоторым нелинейным бесконечным системам эллиптических уравнений. Данный метод позволяет доказать теоремы существования, устойчивости и единственности решения многомерных обратных задач в классах функций конечной гладкости.

Ключевые слова: обратные задачи; существование и единственность; неограниченная область; параболические уравнения.