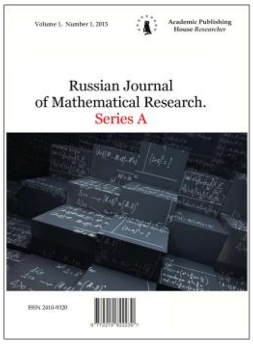
Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
Vol. 2, Is. 2, pp. 62-72, 2015

DOI: 10.13187/rjmr.a.2015.2.62
www.ejournal30.com



UDC 519.21

Properties of the Trajectories of Waiting Times and Downtime in Single-channel Models With Expectation

[1] Arsen R. Simonyan
[2] Elena I. Ulitina

[1-2] Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Street 26a, Sochi city, 354000
PhD (physics and mathematical), Associate Professor
[1] E-mail: oppm@mail.ru
[2] E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Abstract

The article discusses the single-channel queuing system with waiting. The basic assumption - the incoming flow of events is a Poisson distribution. A class of limit distributions for the basic functions of discrete and continuous performance under different constraints on the system load.

Keywords: queuing system, a random process, the probability, waiting time, the downtime.

Введение

В статье изучаются свойства траекторий последовательностей $\{w_n\}$ и $\{I_n\}$. Основное внимание уделяется УЗБЧ и законам повторного логарифма (ЗПЛ), являющемся примерами так называемых законов 0 и 1.

Пусть в одноканальную систему обслуживания с ожиданием вызовы поступают в случайные моменты времени $\{t_n\}_{n\geq 1}$, где $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$. Время обслуживания $n-$того вызова ($n \geq 1$) обозначим v_n и пусть $u_n = t_n - t_{n-1}$, $t_0 = 0$.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ неотрицательных случайных величин (СВ) определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ независимы (друг от друга) и образуют последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) СВ с функциями распределения (ФР) $A(t) = 1 - e^{-at}$ и $B(t)$ на R^+ соответственно.

Далее, предполагаем $0 < \alpha_1 = \dfrac{1}{a} = Mu_1 < +\infty$` и $0 < \beta_1 = Mv_1 < +\infty$, где M - знак математического ожидания, а также $B(+0) = 0$, что означает, что вероятность «мгновенного» обслуживания равна нулю.

По классификации Кендалла-Башарина данный класс систем обозначается M|G|1|∞.

Первый символ характеризует структуру входящего потока вызовов.

Второй указывает ФР времени обслуживания. Третий означает число обслуживающих приборов. Четвертый символ говорит о том, что число мест для ожидания неограниченно.

Дисциплина обслуживания ─ правило выбора вызовов из очереди на обслуживание.

Дисциплина обслуживания консервативна, если при ее использовании внутри модели работа не создается и не исчезает, а лишь привносится в модель извне поступлением вызовов.

Под работой понимается длительность обслуживания.

Возникновение новой работы внутри модели возможно, например, при ненадежном восстанавливаемом приборе. Это – время, затрачиваемое на восстановление прибора.

Исчезновение работы внутри модели возможно, например, при прерывании обслуживания вызова с удалением его из модели. Остаток невыполненного обслуживания соответствует величине исчезнувшей в модели работы.

Примером консервативной дисциплины является дисциплина обслуживания в порядке поступления – FIFO (first in – first out).

В моделях M|G|1|∞ оптимальный анализ характеристик зависит от удачного выбора начальных уравнений и методов исследования, что часто приводит к пересмотру и дополнению результатов в модели M|G|1|∞. При этом возникают новые постановки. В то же время, общие закономерности поведения характеристик в модели M|G|1|∞ зависят от загрузки $\rho_1 = a\beta_1$, где $\beta_1 = \int\limits_0^\infty t dB(t)$.

Случаи $\rho_1 < 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_1 > 1$ дифференцируют поведение процессов при неограниченном росте времени.

Особый случай, известный в литературе под названием “критической загрузки”, возникает, когда ρ_1 “близко” к единице ($\rho_1 \to 1$).

Основными характеристиками модели M|G|1|∞ являются:

$w(t)$ – виртуальное время ожидания вызова в момент t (время, которое ждал бы вызов, поступая в систему в момент времени t);

π – период занятости (промежуток времени, начинающийся с поступления в свободную систему вызова и завершающийся первым после этого момента освобождением системы от вызовов);

$I(t)$ – суммарное время простоя прибора до момента t .

Дискретными аналогами этих характеристик являются:

w_n – время ожидания n –го вызова;

θ – случайное число обслуженных за период занятости вызовов;

I_n – суммарное время простоя прибора до поступления n –го вызова.

Важными характеристиками системы являются также $\zeta_n, n \ge 1$ и $\zeta(t), t \ge 0$:

$\zeta_n, n \ge 1$ – длина очереди в момент поступления n –го вызова;

$\zeta(t), t \ge 0$ – длина очереди в момент времени t .

Основные результаты

На примере последовательности $\{X_n\}$ НОР СВ с ФР $K(x)$, $x \in R^1$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ сформируем два закона 0 и 1.

Пусть $\Im_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, $n \ge 1$ - σ – алгебра, порожденная СВ $X_n, X_{n+1}, \ldots$, и $\Im_\infty = \bigcap\limits_{n \ge 1} \Im_n$.

σ-алгебру $\Im_\infty$ и ее элементы (события) называют остаточными или хвостовыми.

Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \ n \geq 1.$$

Приведем примеры остаточных событий:

$$\left\{ \left\{ \frac{S_n}{n^\alpha} \right\} \text{ сходится} \right\}, \ \alpha \in R^+, \ \left\{ \limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n \ln \ln n}} = c \right\}, \ c \in R^1.$$

В то же время событие

$$\{ S_n = 0 \text{ бесконечно часто} \} \tag{1}$$

не является остаточным.

Для остаточных событий $A \in \Im_\infty$ действует следующий закон 0 и 1 Колмогорова (см., [1]):

$$P(A) = 0 \text{ или } P(A) = 1. \tag{2}$$

Взаимно однозначное отображение $Y = (y_1, y_2, \ldots)$ множества $\{1, 2, \ldots\}$ в себя называется конечной перестановкой, если $y_n = n$ для всех n за исключением разве лишь конечного их числа.

Обозначим

$$X = (X_1, X_2, \ldots), \ Y(X) = (X_{y_1}, X_{y_2}, \ldots).$$

Пусть $B(R^\infty)$- борелевская σ - алгебра в R^∞ и

$$Y(A) = \{ Y(X) \in B \}$$

при $A = \{ X \in B \}$ и $B \in B(R^\infty)$.

Событие $A = \{ X \in B \}$, где $B \in B(R^\infty)$ называется перестановочным, если для любой конечной перестановки Y событие $Y(A)$ совпадает с A.

Для перестановочных событий A действует закон 0 и 1 Хьюитта и Сэвиджа (см., [1]): имеет место (2).

В частности, событие (1) является перестановочным.

Более того, события из $\Im^\infty = \bigcap \Im^n$, где $\Im^n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$, являются перестановочными.

Усиленный закон больших чисел – пример законов 0 и 1.

Наша цель заключается в переносе УЗБЧ для $\{S_n\}$ на последовательности $\{w_n\}$ и $\{I_n\}$, которые, в отличие от первой последовательности, образуют цепи Маркова.

<u>Теорема 1</u>.

$$P\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{w_n}{n} = \max\left(0, \frac{\rho_1 - 1}{a} \right) \right) = 1, \tag{3}$$

$$P\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n} = -\min\left(0, \frac{\rho_1 - 1}{a} \right) \right) = 1. \tag{4}$$

<u>Доказательство</u>. Покажем, что из (3) следует (4). Обозначим через A, B, C события, на которых

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{w_n(\omega)}{n} = \max\left(0, \frac{\rho_1 - 1}{a} \right), \ \lim_{n \to +\infty} \frac{t_1}{n} = 0, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\rho_1 - 1}{a},$$

где $\omega \in \Omega$, соответственно. Так как t_1- собственна СВ, справедливо (3) и для $\{S_n\}$ имеет место УЗБЧ, то

$$P(A)=P(B)=P(C)=1$$

и, как следствие этого, $P(ABC)=1$.

Для любого $\omega \in ABC$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(w_n(\omega)+t_1(\omega)-S_{n-1}(\omega)\cdot\frac{n}{n-1}\right)=\max\left(0,\frac{\rho_1-1}{a}\right)-\frac{\rho_1-1}{a},$$

или, в силу $I_n=w_n+t_1-S_{n-1}$, $n\geq 2$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n(\omega)}{n}=-\min\left(0,\frac{\rho_1-1}{a}\right).$$

Выведем (3), рассматривая случаи: а) $\rho_1>1$; б) $\rho_1=1$; в) $\rho_1<1$.

а) Пусть $\rho_1>1$, т.е. $\beta_1-\alpha_1=\dfrac{\rho_1-1}{a}>0$. По УЗБЧ и равенства $w_{n+1}=\max\limits_{1\leq k\leq n+1}\left(\sum\limits_{i=k}^{n}X_i\right)$, которое справедливо, если в момент 0 модель свободна от вызовов, последовательность

$$w_{n+1}=S_n-\min_{0\leq k\leq n}S_k\geq S_n,\ n\geq 1$$

имеет конечное число положительных членов с вероятностью 1. Поэтому найдется собственная целочисленная СВ ν, принимающая значения $1,2,\ldots$, такая что на событии $\{\nu<n\}$, $n>1$ при всех $k\geq n$ выполнены соотношения

$$w_n>0,\ w_{k+1}=w_k+X_k=\cdots=w_n+X_n+\cdots+X_k.$$

Тогда для каждого n и $\omega\in\{\nu<n\}\bigcap C$, где событие C определено ранее, имеем

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{w_k(\omega)}{k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{w_n(\omega)}{k}+\lim_{k\to+\infty}\frac{X_n(\omega)+\cdots+X_{k-1}(\omega)}{k-n}\cdot\frac{k-n}{n}=\frac{\rho_1-1}{a}.$$

Поскольку $P(C)=1$ и $P\left(\bigcup\limits_{n\geq 1}\{\nu<n\}\right)=1$, то $P\left(\left(\bigcup\limits_{n\geq 1}\{\nu<n\}\right)\bigcap C\right)=1$, откуда следует утверждение.

б) Пусть $\rho_1=1$, т.е. $\beta_1-\alpha_1=0$.

Идея доказательства такова. Наряду с нашей моделью, рассмотрим последовательность моделей $\mathrm{M}|\mathrm{G}|1|\infty$, в k - той, $k\geq 1$ из которых:

сохраняем последовательность $\{u_n\}$; $\{v_n\}$ заменяем на $\{v_n^{(k)}\}$ вида $v_n^{(k)}=v_n+\xi_n^{(k)}$, $n\geq 1$.

Здесь v_n и $\xi_n^{(k)}$ при каждом $n\geq 1$ независимы и $\{\xi_n^{(k)}\}$ - последовательность положительных НОР СВ с $M\xi_1^{(k)}=\beta_1^{(k)}>0$.

Обозначим через $w_n^{(k)}$, $n\geq 1$, $k\geq 1$ время ожидания n - того поступившего вызова в k - той модели.

Очевидно, что $w_n^{(k)}\geq w_n$, $n\geq 1$, $k\geq 1$ и любом $\omega\in\Omega$.

В силу а),

$$P\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{w_n^{(k)}}{n}=\max\left(0,\beta_1^{(k)}\right)\right)=1,\ k\geq 1,$$

так как в k - той модели загрузка превосходит 1. Следовательно, при $k\geq 1$

$$P\left(\limsup_n \frac{w_n}{n} \le \beta_1^{(k)}\right) = 1. \tag{5}$$

Теперь, выбираем последовательности $\{\xi_n^{(k)}\}$ таким образом, чтобы $\lim\limits_{k\to+\infty} \beta_1^{(k)} = 0$.

Мы утверждаем, что переход к пределу $k \to +\infty$ под знаком вероятности в левой части (5) допустим.

Действительно, обозначим событие в левой части (5) под знаком вероятности через A_k, $k \ge 1$. Пусть

$$A = \bigcap_{k\ge1} A_k = \left\{\limsup_n \frac{w_n}{n} \le 0\right\}.$$

Так как $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, то, по аксиоме непрерывности, $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$, откуда и из (5) выводим

$$P\left(\limsup_n \frac{w_n}{n} \le 0\right) = 1. \tag{6}$$

Осталось заметить, что $P\left(\frac{w_n}{n} \ge 0, n \ge 1\right) = 1$, следовательно,

$$P\left(\limsup_n \frac{w_n}{n} \ge 0\right) = 1. \tag{7}$$

Равенства (6) - (7) доказывают утверждение.

в) При $\rho_1 < 1$ доказательство аналогично доказательству в случае а).

Теорема 1 доказана.

Законы повторного логарифма также являются примерами законов 0 и 1.

Пусть $\{X_n\}$- последовательность НОР СВ с ФР $K(x)$, $x \in R^1$.

Нужно заметить, что событие

$$0 < \liminf_n \frac{S_n}{n^\alpha} < +\infty \text{ с } 0 \le \alpha < 1 \tag{8}$$

не может происходить с вероятностью 1.

Чоу [2] уточнил, что для любой последовательности $\{b_n\}$, такой что

$$b_n > 0,\ n \ge 1 \text{ и } \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} = 0,$$

событие

$$0 < \liminf_n \frac{S_n}{b_n} < +\infty \tag{9}$$

не может происходить с вероятностью 1 (при $b_n = n^\alpha$ (9) переходит в (8)).

Аналогичные выводы верны для $\limsup\limits_n (S_n / b_n)$ (замена S_n, $n \ge 1$ на $(-S_n)$).

Для известных ЗПЛ характерен выбор $b_n = \sqrt{2n \ln\ln n}$, $n \ge 1$.

В начале произведем «грубую» классификацию: а) $DX_1 = c^2$, $c \in R^+$;

б) $DX_1 = +\infty$.

а) При $DX_1 = c^2$ имеет место ЗПЛ Хартмана-Винтнера в формулировке Штрассена (см. [3], [4]).

$$P\left(\limsup_n \zeta_n = c\right) = 1 \text{ и } P\left(\liminf_n \zeta_n = -c\right) = 1, \tag{10}$$

где $\zeta_n = \dfrac{S_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n\ln\ln n}}$, $n \geq 1$.

В [7] доказано, $w_n \Rightarrow w$ при $n \to +\infty$,

где $\Rightarrow -$знак слабой сходимости, $W(x) = P(w < x)$, $x > 0$; $I_n \Rightarrow I$ при $n \to +\infty$, $\hat{I}(x) = P(I < x)$, $x > 0$.

Теорема 2. $W(+\infty) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho_1 < 1, \\ 0 & \text{при } \rho_1 \geq 1 \end{cases}$ и $\hat{I}(+\infty) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho_1 > 1, \\ 0 & \text{при } \rho_1 \leq 1. \end{cases}$

Отсюда, из теоремы 2 и из равенств $I_n = w_n + t_1 - S_{n-1}$, $n \geq 2$ делаем следующие заключения.

1. При $\rho_1 > 1$

$$\begin{cases} P\left(\limsup_n \dfrac{w_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = c\right) = 1, \\ P\left(\liminf_n \dfrac{w_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -c\right) = 1. \end{cases} \tag{11}$$

2. При $\rho_1 < 1$

$$\begin{cases} P\left(\limsup_n \dfrac{I_n + n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = c\right) = 1, \\ P\left(\liminf_n \dfrac{I_n + n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -c\right) = 1. \end{cases} \tag{12}$$

б) При $DX_1 = +\infty$ имеет место ЗПЛ Штрассена (см. [3])

$$P\left(\limsup_n |\zeta_n| = +\infty\right) = 1. \tag{13}$$

При сравнении (13) с (10) возникает вопрос: что можно сказать о $\limsup\limits_n \zeta_n$ и $\liminf\limits_n \zeta_n$?

Допустим, найдется константа $c \in R^+$ такая, что выполнено одно из равенств (10). Мартикайнен [5] доказал, что в таком случае $DX_1 = c^2$. Тогда получаем противоречие с $DX_1 = +\infty$.

Таким образом, имеют место равенства (10) с $c = +\infty$. Отсюда, как и выше, делаем следующие заключения.

1. При $\rho_1 > 1$

$$\begin{cases} P\left(\limsup\limits_n \dfrac{w_n - n \cdot \dfrac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = +\infty\right) = 1, \\ P\left(\liminf\limits_n \dfrac{w_n - n \cdot \dfrac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\infty\right) = 1. \end{cases} \tag{14}$$

2. При $\rho_1 < 1$

$$\begin{cases} P\left(\limsup\limits_n \dfrac{I_n + n \cdot \dfrac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = +\infty\right) = 1, \\ P\left(\liminf\limits_n \dfrac{I_n + n \cdot \dfrac{\rho_1 - 1}{a}}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\infty\right) = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Возможно уточнение приведенных результатов при наличии дополнительной информации относительно поведения ФР $K(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пусть ФР $K(x)$, $x \in R^1$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1, 2)$. Тогда, очевидно, $DX_1 = +\infty$ ($MX_1 = \dfrac{\rho_1 - 1}{a} \in R^1$).

В этих условиях Микош доказал (см. [6]), что если

$$P(X_1 \geq x) = o(P(X_1 < -x)) \text{ при } x \to +\infty, \tag{16}$$

то найдется последовательность $\{b_n\}$ возрастающих положительных чисел, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$, такая что

$$P\left(\limsup_n \frac{S_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{b_n} = 1\right) = 1 \text{ и } P\left(\liminf_n \frac{S_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{b_n} = -\infty\right) = 1. \quad (17)$$

В нашем случае условия (16) можно трансформировать в следующие

$$1 - B(x) = o\left(e^{-ax}\right) \text{ при } x \to +\infty \quad (18)$$

и $A(x) = 1 - a^{-ax}$, $x \in R^{+}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1,2)$. Из (17) делаем следующие заключения.

1. При $\rho_1 > 1$

$$\begin{cases} P\left(\limsup_n \frac{w_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{b_n} = 1\right) = 1, \\ P\left(\liminf_n \frac{w_n - n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{b_n} = -\infty\right) = 1. \end{cases} \quad (19)$$

2.При $\rho_1 < 1$

$$\begin{cases} P\left(\limsup_n \frac{I_n + n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{b_n} = +\infty\right) = 1, \\ P\left(\liminf_n \frac{I_n + n\cdot\frac{\rho_1 - 1}{a}}{b_n} = -1\right) = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Сравнивая данный случай с «грубым» случаем $DX_1 = +\infty$ без дополнительных предположений, можно сказать, что в (19) - (20)
$b_n = o\left(\sqrt{n \ln\ln n}\right)$ при $n \to +\infty$.

К аналогичным результатам приводят предположения:

$$e^{-ax} = o(1 - B(x)) \text{ при } x \to +\infty \quad (21)$$

и $B(x)$, $x \in R^{+}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1,2)$. Теперь в правых частях (19) и (20) под знаком вероятности числа 1 и $-\infty$, $+\infty$ и -1 заменяются на $+\infty$ и -1, 1 и $-\infty$ соответственно.

Рассмотрим одно применение. Случай $\rho_1 = 1$ является непростым (тогда $\beta_1 = \alpha_1 = \frac{1}{a}$) и для него мы можем лишь утверждать, что при $DX_1 = +\infty$ сохраняются формулы (14) - (15).

Действительно, из неравенств $w_n \geq S_{n-1}$ и $S_{n-1} \geq -(I_n - t_1)$, $n \geq 1$ ЗПЛ (10) с $c = +\infty$ позволяют убедиться в справедливости первого равенства (14) и второго равенства (15), поскольку

$$\limsup_n \zeta_n \leq \limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}},\ \liminf_n \zeta_n \geq -\limsup_n \frac{I_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}.$$

В случае $\rho_1 = 1$ для доказательства теоремы 2 приведены специфические приемы, в то время как теорема 1.1 может быть выведена с помощью ЗПЛ для последовательности $\{S_n\}$.

Для осуществления этой идеи следует выявить связь между СВ

$\sup_n(S_n)$ ($\inf_n(S_n)$) и $\limsup_n S_n$ ($\liminf_n S_n$).

В теории суммирования независимых СВ для ФР первых СВ доказывают предельные теоремы, а вторые характеризуют свойства траекторий с вероятностью 1. Техника их анализа различна. В то же время, w и I определяются с помощью первых величин.

Покажем эквивалентность равенств

$$P\left(\sup_{k\geq 0} S_k = +\infty\right) = 1 \tag{22}$$

и

$$P\left(\limsup_n S_n = +\infty\right) = 1 \tag{23}$$

(отметим, что событие $\left\{\sup_{k\geq 0} S_k = +\infty\right\}$ является остаточным).

Действительно, обозначим

$$\overline{S} = \sup_{n\geq 0} S_n,\ \underline{S} == \limsup_n S_n.$$

Если A_n, $n \geq 1$- события и $P(A_n) = 1$, то $P\left(\bigcap_n A_n\right) = 1$, откуда следует

$$P(S_n \text{ конечны при всех } n \geq 1) = 1. \tag{24}$$

Теперь, пусть верно (22). Из (24) следует, что при всех $n \geq 1$

$$P(\overline{S} < +\infty) = P\left(\sup_{k\geq n} S_k < +\infty\right)$$

и

$$P\left(\bigcap_n \left\{\sup_{k\geq n} S_k < +\infty\right\}\right) = 1.$$

Для любого элементарного события $\omega \in \bigcap_n \left\{\sup_{k\geq n} S_k < +\infty\right\}$ имеем

$\sup_{k\geq n} S_k(\omega) \downarrow \underline{S}(\omega)$ при $n \to +\infty$.

Следовательно, $P(\underline{S} = +\infty) = 0$.

Пусть $P(\overline{S} = +\infty) > 0$. Тогда $P(\overline{S} = +\infty) = 1$ и аналогично выводим $P(\underline{S} = +\infty) = 1$.

Докажем теорему 2 при $\rho_1 = 1$ в случаях: а) $MX_1^2 = +\infty$ и б) $MX_1^2 = c^2$, $c \in R^+$.

а) Если $\rho_1 = 1$ и $MX_1^2 = +\infty$, то имеет место ЗПЛ Штрассена в форме (10) с $c = +\infty$, откуда следует (23).

б) Если $\rho_1 = 1$ и $MX_1^2 = c^2$, то имеет место ЗПЛ Хартмана-Винтнера (10) с $c \in R^+$, откуда опять следует (23).

Поскольку в случаях а)-б) верно (23), то имеет место (22), что означает $P(w = +\infty) = 1$.

Заключение

В данной подробно изучены траектории основных характеристик, которые представлены в виде случайных процессов. Продолжены обсуждения начатые в [8-10] и получены теоремы в виде классических предельных теорем теории вероятностей.

Примечания:

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 638 с.
2. Chow Y.S. On spitzer's fomula for the moment of ladder variables. 1997, Statistica Sinica, №7, pp. 149-157.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 470 с.
4. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
5. Мартикайнен А.И. Об одностороннем законе повторного логарифма // Теория вероятностей и её применения. 1985, №30, в.4. с. 694-705.
6. Mikosh T., Nagaev A.V., Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. v. 1, № 1. pp. 81-110.
7. Симонян А.Р., Улитниа Е.И. Об одной теореме сходимости к устойчивому закону в модели M|G|1|∞// Успехи математических наук, 2004, т.59, в.3 (357).
8. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Представления на языке медленно меняющихся функций в модели M|G|1|∞ в условиях критической загрузки // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. С. 745.
9. Danielyan E.A., Simonyan A.R., Ulitina E.I. Regular Variation Of The Tail Of Distribution Of The Sum Of The Random Number Of Independent Random Variables// European researcher. 2012. № 5-1 (20). С. 440-447.
10. Simonyan A.R., Ulitina E.I. A Theorem On The Convergence To A Stable Law In The M|G|1|∞ Model// Russian Mathematical Surveys. 2004. Т. 59. № 3. С. 589-590.

References:

1. Shiryaev A.N. Veroyatnost'. M.: Nauka, 1989. 638 s.
2. Chow Y.S. On spitzer's fomula for the moment of ladder variables. 1997, Statistica Sinica, N7. pp. 149-157.
3. Borovkov A.A. Teoriya veroyatnostei. M.: Editorial URSS, 1999. 470 s.
4. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. Teoriya sluchainykh protsessov. M.: Fizmatlit, 2003. 400 s.
5. Martikainen A.I. Ob odnostoronnem zakone povtornogo logarifma // Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya. 1985, №30, v.4. s. 694-705.
6. Mikosh T., Nagaev A.V., Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. v. 1, N 1. pp. 81-110.
7. Simonyan A.R., Ulitnia E.I. Ob odnoi teoreme skhodimosti k ustoichivomu zakonu v modeli M|G|1|∞ // Uspekhi matematicheskikh nauk, 2004, t.59, v.3 (357).
8. Simonyan A.R., Ulitina E.I. Predstavleniya na yazyke medlenno menyayushchikhsya funktsii v modeli M|G|1|∞ v usloviyakh kriticheskoi zagruzki // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2003. T. 10. S. 745.
9. Danielyan E.A., Simonyan A.R., Ulitina E.I. Regular Variation Of The Tail Of Distribution Of The Sum Of The Random Number Of Independent Random Variables // European researcher. 2012. № 5-1 (20). S. 440-447.

10. Simonyan A.R., Ulitina E.I. A Theorem On The Convergence To A Stable Law In The M|G|1|∞ Model// Russian Mathematical Surveys. 2004. T. 59. № 3. S. 589-590.

УДК 519.21

Свойства траекторий времен ожидания и времен простоя в одноканальной модели с ожиданием

[1] Арсен Рафикович Симонян
[2] Елена Ивановна Улитина

[1-2] Сочинский государственный университет, Российская Федерация
ул. Советская, 26А, г. Сочи, 354000
Кандидат физико-математических наук, доцент
[1] E-mail: oppm@mail.ru
[2] E-mail: ulitinaelena@mil.ru

Аннотация. В статье рассматривается одноканальная система массового обслуживания с ожиданием. Основное предположение – входящий поток событий имеет пуассоновское распределение. Получен класс предельных функций распределения для основных дискретных и непрерывных характеристик при разных ограничениях на загрузку системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, случайный процесс, вероятность, время ожидания, время простоя.