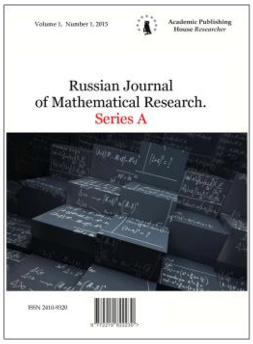
Copyright © 2015 by Academic Publishing House *Researcher*

Published in the Russian Federation
Russian Journal of Mathematical Research. Series A
Has been issued since 2015.
ISSN: 2410-9320
Vol. 2, Is. 2, pp. 58-61, 2015

DOI: 10.13187/rjmr.a.2015.2.58
www.ejournal30.com




UDC 519.21

# Around the Model GI|G|s|∞

Arsen R. Simonyan

Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Street 26 a 354000
PhD (physics and mathematical), Associate Professor
E-mail: oppm@mail.ru

**Abstract**

We consider the least studied queuing system - model GI | G | s | ∞. In the case of the Poisson distribution for the incoming flow of the system is sufficiently studied in the works of classical queuing theory. The absence of this assumption complicates the study of the model, so we were limited to the results of the existence of limiting stationary distribution for the main characteristics and the rate of convergence to limit processes.

**Keywords:** queuing system, the distribution function, the waiting time, the downtime.

**Модель GI|G|s|∞:** В s-канальную систему обслуживания с ожиданием в случайные моменты времени $\{t_n\}$, где $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots$, поступают одиночные вызовы. Вызовы пронумерованы в порядке поступления числами $1, 2, \cdots$ . Пусть $v_n$ $(n \ge 1)$ – время обслуживания $n-$ го вызова и $u_n = t_n - t_{n-1},\ t_0 = 0$.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ неотрицательных случайных величин (СВ) определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ образуют последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) СВ с функциями распределения (ФР) $A(x)$ и $B(x)$ соответственно.

По классификации Кедалла, описана модель GI|G|s|∞.

**Предположения. [1]**

1. $A(+0) = 0, B(+0) = 0$.
2. $0 < \alpha_1 = \mathbf{E}u_1 < +\infty,\ 0 < \beta_1 = \mathbf{E}v_1 < +\infty$, где $\mathbf{E}$ – знак математического ожидания.

Частные случаи данной модели M|M|s|∞[см. например 2] и M|G|1|∞[3] хорошо изучены. Первая модель процессами размножения и гибели, вторая модель методом введения дополнительного события.

Для модели GI|G|s|∞ нахождение точных формул сложная и, за редким исключением, нерешенная проблема.

В рамках модели GI|G|s|∞ рассмотрим дисциплину FIFO.

Пусть $w_n -$ время ожидания (ВО) начала обслуживания $n -$го вызова $(n \ge 1), w_0 = 0$, а $w_{n,i}$ $-$СВ с момента $t_n$ до момента освобождения $i$ $-$го прибора (канала) от вызовов поступивших до момента $t_n$. Приборы пронумерованы. Очевидно

$$w_n = \min_{1 \le i \le s} w_{n,i} \ (n \ge 1). \qquad (1)$$

Запишем формулы для $w_{n,i}$ $(n \ge 1, i = \overline{1,s})$:

$$w_{n,i} = \max(0, w_{n-1,i} + v_{n-1,i} - u_n), \qquad (2)$$

где

$$v_{n,i} = \begin{cases} v_n, & w_n = w_{n,i}, \\ 0, & w_n < w_{n,i}. \end{cases}$$

В [4] доказана следующая теорема стационарности, которая основана на уравнениях (1) и (2).

**Теорема Кифера и Вольфовица.** Пусть имеют место предположения 2. Тогда:

1) если $\rho = \frac{\beta_1}{\alpha_1} < s$, то для $\{w_n\}$ существует стационарная ФР, т.е. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(w_n < x) = \mathbf{P}(w < x), \quad x \in R^+, \quad \mathbf{P}(w < +\infty)$;

2) если $\rho \ge s$, то $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(w_n < x) = 0, \quad x \in R^+$.

Данная теорема дает надежду, что можно обобщить для модели GI|G|s|∞ аналоги следующих результатов, которые получены для модели GI|G|1|∞.

Рассмотрим следующие основные характеристики модели GI|G|1|∞:

$w(t)$ –виртуальное ВО вызова, который поступил бы в системы в момент времени $t$;

$w_n$ –ВО начала обслуживания $n$ –го вызова $(n \ge 1)$;

$I(t)$ –суммарное время простоя системы в интервале времени $[0, t]$;

$I_n$ –суммарное время простоя системы в интервале времени $[0, t_n]$.

Пусть $\rho = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ – загрузка системы.

Приведем несколько результатов для основных характеристик GI|G|1|∞.

Введем обозначения:

$W(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(w_n < x)$, $I(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(I_n < x)$,

$W^*(x) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(w(t) < x)$, $I^*(x) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(I(t) < x)$.

**Теорема 1.** $W(+\infty) = \begin{cases} 1 \text{ при } \rho < 1, \\ 0 \text{ при } \rho \ge 1 \end{cases}$ и $I(+\infty) = \begin{cases} 1 \text{ при } \rho > 1, \\ 0 \text{ при } \rho \le 1. \end{cases}$

**Теорема 1*.** $W^*(+\infty) = \begin{cases} 1 \text{ при } \rho < 1, \\ 0 \text{ при } \rho \ge 1 \end{cases}$

и $I^*(+\infty) = \begin{cases} 1 \text{ при } \rho > 1, \\ 0 \text{ при } \rho \le 1. \end{cases}$

Доказательства этих теорем приведены в [1].

Обозначим $X_n = v_n - u_{n+1}$.

Ниже приведены результаты о скорости сходимости $w_n$ к $w$ при $n \to \infty$ и $w(t)$ к $w$ при $t \to \infty$ в случае $\rho < 1$.

Пусть при $\rho < 1$ $\xi_n = X_n + \delta$ $(n \ge 1)$, $\delta = \beta_1 - \alpha_1 > 0$. Так как $\xi_n$ НОР СВ, то при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ предположим выполнение условия

$$m_{2+\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}|\xi_1|^{2+\varepsilon} < +\infty. \qquad (3)$$

**Теорема 2.** Пусть $\rho < 1$ и выполняется условие (3). Тогда при $x > 0$ и $n \ge 1$

$$0 \le \mathrm{P}(w_n < x) - \mathrm{P}(w < x) \le \frac{m_{2+\varepsilon} \cdot (1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon \cdot \delta^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\left(n + \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

**Теорема 2*.** Пусть $\rho > 1$ и выполняется условие (3). Тогда при $x > 0$ и $n \ge 1$

$$0 \le \mathrm{P}(I_n < x) - \mathrm{P}(I < x) \le \frac{m_{2+\varepsilon} \cdot (1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon \cdot (-\delta)^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\left(n - \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

**Доказательство теоремы 2.** Пусть
$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \quad k \ge 1, \qquad S_0 = 0.$
Обозначим
$\overline{S_n} = \max\limits_{0 \le k \le n} S_k, \quad n \ge 1, \qquad \bar{S} = \sup_{k\ge 0} S_k.$
При $x > 0$ и $n \ge 1$ имеем

$$0 \le \mathrm{P}(w_{n+1} < x) - \mathrm{P}(\overline{S_n} < x) = \mathrm{P}(\overline{S_n} \ge x) - \mathrm{P}(w_{n+1} \ge x) = \\ = \mathrm{P}(\overline{S_n} < x, \bar{S} \ge x). \tag{4}$$

Записанная справа в (4) вероятность при каждом $x$ не убывает по $n$. Далее при $x > 0$ и $n \ge 1$, по формуле полной вероятности,

$$\mathrm{P}(\overline{S_n} < x, \bar{S} \ge x) = \sum_{k>n} \mathrm{P}(\overline{S_{k-1}} < x, S_k \ge x) \le \sum_{k>n} \mathrm{P}(S_k \ge x).$$

С учетом $\delta = \beta_1 - \alpha_1 > 0$, по неравенству Чебышева, при $x > 0$ и $n \ge 1$ имеем

$$\mathrm{P}(\overline{S_n} < x, \bar{S} \ge x) = \frac{1}{\delta^{2+\varepsilon}} \sum_{k>n} \frac{\mathrm{E}|\zeta_n|^{2+\varepsilon}}{\left(k + \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{2+\varepsilon}}, \tag{5}$$

где обозначено $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. По теореме 20, §6, гл.3, с.80 и задаче 31, §6, гл.3, с.98 [5], справедлива оценка

$$E|\zeta_n|^{2+\varepsilon} \le (1+\varepsilon) \cdot \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \cdot m_{2+\varepsilon}. \tag{6}$$

Подставив оценку (6) в правую часть неравенства (5), при $x > 0$ и $n \ge 1$ приходим к оценке

$$\mathrm{P}(\overline{S_n} < x, \bar{S} \ge x) = (1+\varepsilon) \cdot \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{m_{2+\varepsilon}}{\delta^{2+\varepsilon}} \sum_{k>n} \frac{1}{\left(k + \frac{x}{\delta}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

По интегральному признаку Маклорана – Коши для рядов с положительными членами (см. [6], §2, глава 11, с.281-285), последнее неравенство влечет оценку

$$\mathrm{P}(\overline{S_n} < x, \bar{S} \ge x) = \frac{(1+\varepsilon) \cdot (4+\varepsilon)}{\varepsilon \cdot \delta^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\left(n + \frac{x}{\delta}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}},$$

откуда и из (4) получаем

$$0 \le \mathrm{P}(w_n < x) - \mathrm{P}(w < x) \le \frac{m_{2+\varepsilon} \cdot (1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon \cdot \delta^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\left(n + \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Теорема доказана.
Теорема 2* доказывается аналогично.

**Заключение**

В работе сделана попытка показать сложность исследования моделей типа GI|G|s|∞. Исследованы поведение в бесконечности основных характеристик модели. Частный случай, когда входящий поток имеет распределение Пуассона, а длительности обслуживания распределены по показательному закону, хорошо изучены в работах [7,8]. А модель GI|G|s|∞ при $s = 1$ рассмотрен также в работах [9,10].

**Примечания**:

1. Даниелян Э.А., Симонян А.Р. Введение в теорию очередей. Ереван, РАУ, 2005, 196 с.

2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966, 301 с.
3. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А. и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973, 447 с.
4. Kifer J., Wolfowitz J. On the theory of queues with many servers// Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 1-18.
5. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1969, 800 с.
7. Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I. Waiting Time In The Elementary Multichannel Queue System With Different Intensity Service Of Calls And With Expectation// European researcher. 2011. № 5-1 (7). С. 533-536.
8. Симонян А.Р, Симонян Р.А., Улитина Е.И. Длина очереди в простейшей многоканальной системе массового обслуживания с монотонными интенсивностями и с ожиданием // Вестник СГУТиКД. 2010. №4. С. 60-65.
9. Симонян А.Р., Улитина Е.И. О дискретных характеристиках в модели GI|G|1|∞// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. № 4. С. 762-763.
10. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Вокруг теоремы Боровкова-Коэна// Известия Сочинского государственного университета. 2013. № 3 (26). С. 140-144.

**References:**

1. Danielyan E.A., Simonyan A.R. Vvedenie v teoriyu ocheredei. Erevan, RAU, 2005, 196 c.
2. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya. M.: Nauka, 1966, 301 c.
3. Gnedenko B.V., Danielyan E.A. i dr. Prioritetnye sistemy obsluzhivaniya. M.: MGU, 1973, 447 c.
4. Kifer J., Wolfowitz J. On the theory of queues with many servers// Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 1-18.
5. Petrov V.V. Predel'nye teoremy dlya summ nezavisimykh sluchainykh velichin. M.: Nauka, 1987, 317 s.
6. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T.2. M.: Nauka, 1969, 800 s.
7. Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I. Waiting Time In The Elementary Multichannel Queue System With Different Intensity Service Of Calls And With Expectation// European researcher. 2011. № 5-1 (7). S. 533-536.
8. Simonyan A.R, Simonyan R.A., Ulitina E.I. Dlina ocheredi v prosteishei mnogokanal'noi sisteme massovogo obsluzhivaniya s monotonnymi intensivnostyami i s ozhidaniem // Vestnik SGUTiKD. 2010. №4. S. 60-65.
9. Simonyan A.R., Ulitina E.I. O diskretnykh kharakteristikakh v modeli GI|G|1|∞// Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2008. T. 15. № 4. S. 762-763.
10. Simonyan A.R., Ulitina E.I. Vokrug teoremy Borovkova-Koena// Izvestiya Sochinskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. № 3 (26). S. 140-144.

УДК 519.21

## Вокруг модели GI|G|s|∞

Арсен Рафикович Симонян

Сочинский государственный университет, Российская Федерация
ул. Советская, 26 а 354000
Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: oppm@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается меньше всех изученная система массового обслуживания – модель GI|G|s|∞. В случае распределения Пуассона для входящего потока эта система достаточно изучена в трудах классиков теории массового обслуживания. Отсутствие данного предположения усложняет изучение данной модели, поэтому мы ограничились результатами существования предельного стационарного распределения для основных характеристик и скоростью сходимости к предельным процессам.

**Ключевые слова:** Система массового обслуживания, функция распределения, время ожидания, время простоя.