

## REDUCTION OF A BENT PLATE, WITH CONCURRENT EDGES

## REDUCEREA UNEI PLĂCI OMOGENE ÎNDOITE, CU MUCHIILE CONCURENTE

Lecturer PhD. Eng. Orășanu N., Assoc. Professor PhD. Eng. Craifaleanu A.

„Politehnica” University of Bucharest, Department of Mechanics / Romania

Tel: 021-4029503; E-mail: norasanu62@yahoo.com

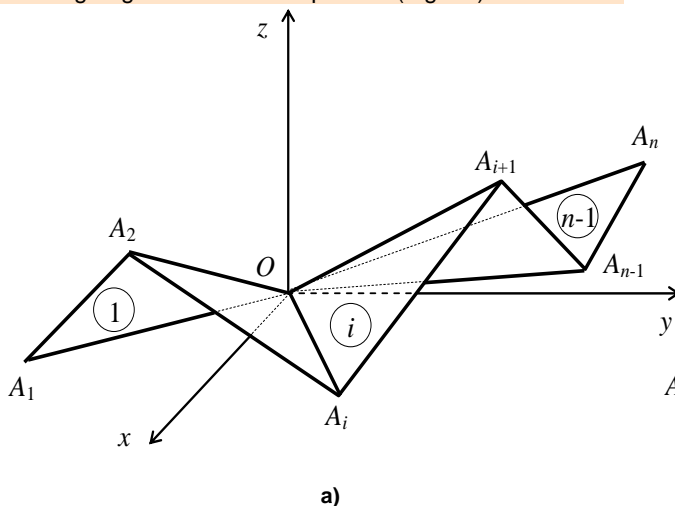
**Abstract:** The paper presents a method to determine the inertial characteristics (coordinates of the mass center, moments and products of inertia) of a plate with concurrent bending edges, each face representing a homogeneous triangle. By generalising a method previously published by the first author, the plate is assimilated, from the inertial point of view, with a discrete system of material points, applied in the corners and in the mass centres of the faces. The results are particularised for several cases frequently found in practice: homogeneous bent plate, plane plate with the shape of an arbitrary polygon, of a quadrilateral and of a right-angled trapezoid, respectively. Two applications are also presented.

**Keywords:** bent plate, mass center, moment of inertia, product of inertia.

## INTRODUCTION

In references [2] and [3] a calculation method is presented for the inertial characteristics of simple bodies, based on their assimilation with finite systems of material points. It is shown that, in the case of a homogeneous triangular plate of mass  $m$ , the equivalent system is composed of three points of mass  $\frac{m}{12}$  applied in the corners and one of mass  $\frac{3m}{4}$  applied in the mass center.

Let  $OA_1A_2 \dots A_iA_{i+1} \dots A_{n-1}A_n$  be a plate of mass  $m$ , with bending edges concurrent in point  $O$  (Fig. 1a).



**Rezumat:** Lucrarea prezintă o metodă de calcul al caracteristicilor inerțiale (coordonatele centrului de masă și momente de inerție mecanice) ale unei plăci cu muchii de îndoire concurente, fiecare dintre fețele acesteia reprezentând un triunghi omogen. Generalizând o metodă publicată anterior de către primul autor, placa este echivalată, din punct de vedere inerțial, cu un sistem discret de puncte materiale, aplicate în colțuri și în centrele de masă ale fețelor. Rezultatele sunt particularizate pentru mai multe cazuri frecvent întâlnite în practică: placă îndoită omogenă, placă plană având forma unui poligon oarecare, respectiv al unui patrulater și al unui trapez dreptunghic. Sunt prezentate, de asemenea, două aplicații.

**Cuvinte cheie:** centru de masă, momente de inerție, placă îndoită.

## INTRODUCERE

În lucrările [2] și [3] este prezentată o metodă de calcul al caracteristicilor inerțiale ale unor corpuri simple pe baza echivalării acestora cu anumite sisteme finite de puncte materiale. Se arată că în cazul unei plăci omogene triunghiulare de masă  $m$ , sistemul echivalent se compune din trei puncte de masă  $\frac{m}{12}$  aplicate în colțuri și unul de masă  $\frac{3m}{4}$  aplicat în centrul de masă.

Fie placa  $OA_1A_2 \dots A_iA_{i+1} \dots A_{n-1}A_n$  de masă  $m$ , cu muchiile de îndoire concurente în punctul  $O$  (fig. 1a).

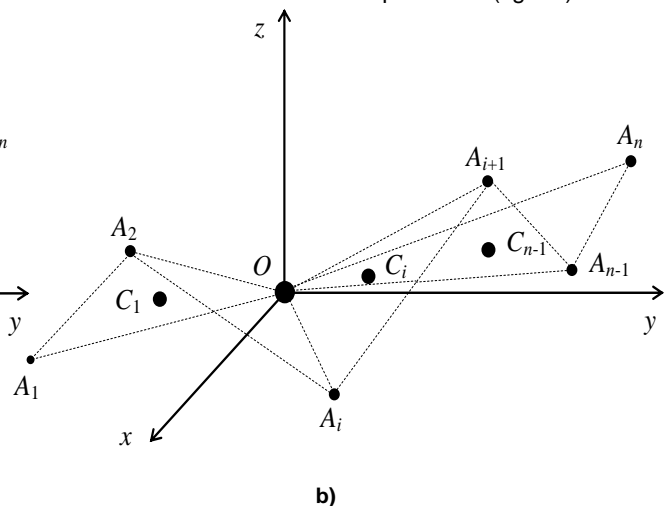


Fig. 1 - Bent plate, with concurrent edges

## MATERIALS AND METHODS

The orthogonal reference system  $Oxyz$  is considered, with the origin in point  $O$ . External edges  $OA_1$  and  $OA_n$  are supposed to pass also through the corner  $O$ , which is the concurrence point of all visible edges of the plate. On the figure, the bending edges are drawn with solid line:  $OA_2, OA_3, \dots, OA_{n-1}$ .

## MATERIALE ȘI METODE

Se consideră sistemul de referință ortogonal  $Oxyz$ , cu originea în punctul  $O$ . Se presupune că muchiile de tăiere exterioare,  $OA_1$  și  $OA_n$  trec, de asemenea, prin vârful  $O$ , care este punctul de concurență al tuturor muchiilor vizibile ale plăcii. Pe figură, muchiile de îndoire sunt desenate cu linie continuă:  $OA_2, OA_3, \dots, OA_{n-1}$ .

The coordinates of all corners are also considered known:  $O(0, 0, 0)$ ,  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ .

It is also supposed that all triangles  $OA_1A_2$ ,  $OA_2A_3, \dots, OA_{i-1}A_i, \dots, OA_{n-1}A_n$ , which define the faces of the body, are homogeneous plates. The coordinates of the mass center of an arbitrary triangle,  $OA_iA_{i+1}$ , can be easily calculated:

$$C_i \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{3}, \frac{y_i + y_{i+1}}{3}, \frac{z_i + z_{i+1}}{3} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

Taking into account the above mentioned equivalence theorem, it results that the plate can be reduced to a system of material points with the following masses (fig. 1b):

$$O \left( \frac{m}{12} \right), A_1 \left( \frac{m_1}{12} \right), A_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{12} \right), \dots, A_i \left( \frac{m_{i-1} + m_i}{12} \right), \dots, A_{n-1} \left( \frac{m_{n-2} + m_{n-1}}{12} \right), A_n \left( \frac{m_{n-1}}{12} \right), C_1 \left( \frac{3m_1}{4} \right), C_2 \left( \frac{3m_2}{4} \right), \dots, C_i \left( \frac{3m_i}{4} \right), \dots, C_{n-1} \left( \frac{3m_{n-1}}{4} \right).$$

**RESULTS**

**Calculation of the inertial characteristics of an arbitrary bent plate**

The abscissa of the mass center is:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{12} (x_i + x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3m_i}{4} \frac{x_i + x_{i+1}}{3}}{12m} \quad (2)$$

By arranging this expression and by proceeding in the same manner for the other coordinates, it follows:

$$x_c = \frac{1}{3m} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_i + x_{i+1}), \quad y_c = \frac{1}{3m} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (y_i + y_{i+1}), \quad z_c = \frac{1}{3m} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (z_i + z_{i+1}) \quad (3)$$

The calculation relations of the moments and products of inertia are based on the definition formulae of these quantities, for discrete systems of material points [1]. Thus,

$$J_x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{12} [(y_i^2 + z_i^2) + (y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2)] + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3m_i}{4} \left[ \left( \frac{y_i + y_{i+1}}{3} \right)^2 + \left( \frac{z_i + z_{i+1}}{3} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{12} (x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{3m_i}{4} \frac{x_i + x_{i+1}}{3} \frac{y_i + y_{i+1}}{3} \quad (5)$$

By arranging these expressions and by proceeding in the same manner for the other moments and products of inertia, it follows:

$$\begin{cases} J_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2 + z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2) \\ J_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2 + x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) \\ J_z = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2), \end{cases} \quad (6)$$

Se consideră cunoscute coordonatele vârfurilor plăcii:  $O(0, 0, 0)$ ,  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ .

Se presupune că toate triunghiurile  $OA_1A_2$ ,  $OA_2A_3, \dots, OA_{i-1}A_i, \dots, OA_{n-1}A_n$ , care constituie fețele corpului, sunt plăci omogene. Coordonatele centrului de masă al unui triunghi oarecare,  $OA_iA_{i+1}$ , pot fi ușor calculate:

Având în vedere teorema de echivalență menționată mai sus, rezultă că orice placa poate fi redusă la un sistem de puncte materiale cu următoarele mase (fig. 1

$$b): O \left( \frac{m}{12} \right), A_1 \left( \frac{m_1}{12} \right), A_2 \left( \frac{m_1 + m_2}{12} \right), \dots, A_i \left( \frac{m_{i-1} + m_i}{12} \right), \dots, A_{n-1} \left( \frac{m_{n-2} + m_{n-1}}{12} \right), A_n \left( \frac{m_{n-1}}{12} \right), C_1 \left( \frac{3m_1}{4} \right), C_2 \left( \frac{3m_2}{4} \right), \dots, C_i \left( \frac{3m_i}{4} \right), \dots, C_{n-1} \left( \frac{3m_{n-1}}{4} \right).$$

**REZULTATE**

**Calculul mărimilor inerțiale în cazul unei plăcii îndoită oarecare**

Abscisa centrului de masă este:

Prelucrând această expresie și procedând asemănător pentru celelalte coordonate, rezultă:

Relațiile de calcul ale momentele de inerție axiale și centrifugale se bazează pe formulele de definiție ale acestor mărimi, în cazul sistemelor discrete de puncte materiale [1]. Astfel,

Prelucrând aceste expresii și procedând asemănător pentru celelalte momente de inerție, rezultă:

$$\begin{cases} J_{xy} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (2x_i y_i + 2x_{i+1} y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i) \\ J_{yz} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (2y_i z_i + 2y_{i+1} z_{i+1} + y_i z_{i+1} + y_{i+1} z_i) \\ J_{zx} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} m_i (2z_i x_i + 2z_{i+1} x_{i+1} + z_i x_{i+1} + z_{i+1} x_i) \end{cases} \quad (7)$$

**Calculation of the inertial characteristics of a homogeneous plate**

If the bent plate is homogeneous, its superficial density,  $\rho_s$ , is constant and has the expression:

$$\rho_s = \frac{m}{S} \quad (8)$$

The total area,  $S$ , can be obtained by adding the areas of the composing triangles:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_i + \dots + S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} S_i \quad (9)$$

As it is known, the modulus of the vector product of two position vectors equals twice the area of the triangle determined by the vectors:

$$S_i = \frac{1}{2} |\vec{OA}_i \times \vec{OA}_{i+1}| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i)^2 + (z_i x_{i+1} - z_{i+1} x_i)^2 + (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)^2} \quad (10)$$

where:

unde:

$$\vec{OA}_i \times \vec{OA}_{i+1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} \quad (11)$$

The masses of the triangular plates have the expressions:

Masele plăcilor triunghiulare au expresiile:

$$m_1 = \rho_s \cdot S_1 = m \frac{S_1}{S}, \quad m_2 = \rho_s \cdot S_2 = m \frac{S_2}{S}, \dots, \quad m_i = \rho_s \cdot S_i = m \frac{S_i}{S}, \dots, \quad m_{n-1} = \rho_s \cdot S_{n-1} = m \frac{S_{n-1}}{S} \quad (12)$$

It follows that, in the case of a homogeneous plate, formulae (4)-(7) can be brought to simpler forms:

Rezultă de aici că, în cazul unei plăci omogene, formulele (4)-(7) pot fi aduse la forme mai simple:

$$x_c = \frac{1}{3S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (x_i + x_{i+1}), \quad y_c = \frac{1}{3S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (y_i + y_{i+1}), \quad z_c = \frac{1}{3S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (z_i + z_{i+1}) \quad (13)$$

$$\begin{cases} J_x = \frac{m}{6S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2 + z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2) \\ J_y = \frac{m}{6S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2 + x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) \\ J_z = \frac{m}{6S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} J_{xy} = \frac{m}{12S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (2x_i y_i + 2x_{i+1} y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i) \\ J_{yz} = \frac{m}{12S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (2y_i z_i + 2y_{i+1} z_{i+1} + y_i z_{i+1} + y_{i+1} z_i) \\ J_{zx} = \frac{m}{12S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (2z_i x_i + 2z_{i+1} x_{i+1} + z_i x_{i+1} + z_{i+1} x_i) \end{cases} \quad (15)$$

**Case of a homogeneous plane polygon**

The general relations determined above can be used for any homogeneous plane polygon, if the following geometrical condition is fulfilled: point O can be chosen in any corner or in any point placed inside the polygon, so that no segment  $OA_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) intersects any edge of the polygon:

$$OA_i \cap A_j A_{j+1} = \Phi \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n-1) \tag{16}$$

where the corners are consecutively counted.

In the case of plane polygons, all z-coordinates are null:  $z_i=0$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). If such bodies present symmetries, calculations are simplified by choosing point O on the symmetry element (point, axis or plane). The same reasoning is valid for the choice of axis Ox.

The triangle areas are:

$$S_i = \frac{|x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i|}{2} \tag{17}$$

The coordinates of the mass center have the following general expressions:

$$x_c = \frac{1}{3S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (x_i + x_{i+1}), \quad y_c = \frac{1}{3S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (y_i + y_{i+1}), \quad z_c = 0 \tag{18}$$

The moments and products of de inertia become:

$$\begin{cases} J_x = \frac{m}{6S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) \\ J_y = \frac{m}{6S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) \\ J_z = \frac{m}{6S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2), \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} J_{xy} = \frac{m}{12S} \sum_{i=1}^{n-1} S_i (2x_i y_i + 2x_{i+1} y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i) \\ J_{yz} = 0 \\ J_{zx} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

**Application 1**

Half of the cross-section of a symmetrical part of a mechanical device has the polygonal shape in Figure 2.

**Cazul poligonului plan omogen**

Relațiile generale determinate mai sus își găsesc o utilizare imediată pentru orice poligon plan omogen, dacă se respectă următoarea condiție geometrică: punctul O poate fi ales în orice vârf sau în orice punct situat în interiorul unui poligonului, astfel încât nici un segment  $OA_i$  ( $i = 1,2,\dots,n$ ) să nu intersecteze vreo muchie a poligonului:

unde vârfurile sunt numerotate consecutiv.

În cazul corpurilor plane, toate cotele sunt nule:  $z=0$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Dacă aceste corpuri prezintă simetrii, calculele se simplifică alegând punctul O pe elementul de simetrie (punct, axă sau plan). Același raționament este valabil și pentru alegerea axei Ox.

Ariile triunghiurilor sunt:

Coordonatele centrului de masă au următoarele expresii generale:

Momentele de inerție devin:

**Aplicația 1**

Jumătate din secțiunea transversală a unei piese simetrice din componența unui dispozitiv mecanic are forma poligonală din figura 2.

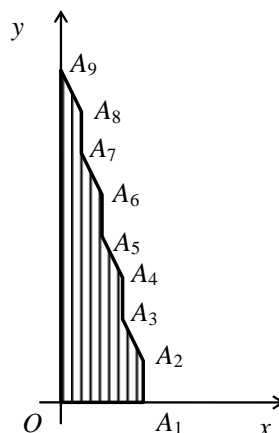


Fig. 2 - Example of a homogeneous plane plate

The coordinates of corners  $A_i$  are defined in Table 1.

Coordonatele vârfurilor  $A_i$  sunt definite în tabelul 1.

Table Error! Reference source not found.

Geometrical characteristics of the plate

Punct	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
$x_i$	$4a$	$4a$	$3a$	$3a$	$2a$	$2a$	$a$	$a$	$0$
$y_i$	$0$	$2a$	$4a$	$6a$	$8a$	$10a$	$12a$	$14a$	$16a$

Assuming that the plate is homogeneous, its inertia properties can be determined.

Presupunând că placa este omogenă, se pot determina proprietățile de inerție ale acesteia.

By applying relation (17), the areas result of the eight triangles composing the polygon:

Aplicând relația de calcul (17), rezultă ariile celor opt triunghiuri în care poate fi împărțit poligonul:

$$S_1 = 4a^2, S_2 = 5a^2, S_3 = 3a^2, S_4 = 6a^2, S_5 = 2a^2, S_6 = 7a^2, S_7 = a^2, S_8 = 8a^2$$

The area of the whole polygonal section is:

Aria întregii secțiuni poligonale este:

$$S = \sum S_i = 36a^2.$$

After some elementary operations, the coordinates of the center of mass are obtained:

După câteva calcule elementare rezultă coordonatele centrului de masă:

$$C(x_c = 1.426a, y_c = 6.556a)$$

The elements of the matrix of inertia can be also easily calculated:

Elementele matricei de inerție pot fi și ele ușor calculate:

$$J_x = 44.39ma^4, J_y = 3.037ma^4, J_z = 47.333ma^4,$$

$$J_{xy} = 6,093ma^4, J_{yz} = J_{zx} = 0.$$

**Application 2**

Let  $OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$  be a homogeneous plate of mass  $m$ , part of the header of a corn-picker-husker, with the shape of a pyramid surface (fig. 3).

**Aplicația 2**

Fie placa omogenă de masă  $m$ , din componența unui heder al unei combine de recoltat porumb, care are forma unei suprafețe piramidale  $OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$  (fig. 3).

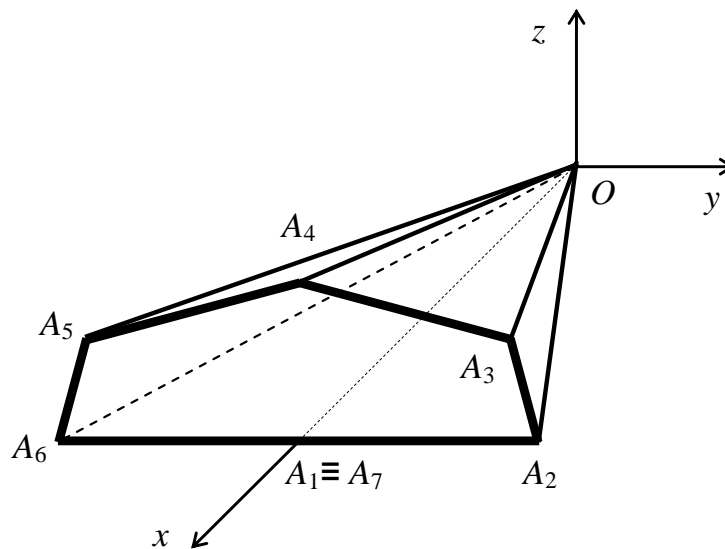


Fig. 3 - Header of a corn-picker-husker

The orthogonal reference system with plane  $Oxy$  situated in the plane of the plate  $OA_1A_2$  is used, with axis  $Ox$  in the symmetry plane of the body, perpendicular on the side  $A_2A_6$ .

Se utilizează sistemul de referință ortogonal, cu planul  $Oxy$  situat în planul plăcii  $OA_1A_2$ , alegându-se axa  $Ox$  în planul de simetrie al corpului, perpendiculară pe latura  $A_2A_6$ .

The plate is divided into six triangles:  $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_6A_7$ .

Placa se împarte în șase triunghiuri:  $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_6A_7$ .

The coordinates of the corners of the surface are:  $O(0, 0, 0), A_1(l, 0, 0), A_2(l, a, 0), A_3(l, a-b, c), A_4(l, 0, d), A_5(l, b-a, c), A_6(l, -a, 0)$  and  $A_7 \equiv A_1(l, 0, 0)$ .

Coordonatele vârfurilor suprafeței sunt:  $O(0, 0, 0), A_1(l, 0, 0), A_2(l, a, 0), A_3(l, a-b, c), A_4(l, 0, d), A_5(l, b-a, c), A_6(l, -a, 0)$  și  $A_7 \equiv A_1(l, 0, 0)$ .

According to formula (10), the areas of the triangles composing the body are:

$$S_1 = S_6 = \frac{la}{2}, \quad S_2 = S_5 = \frac{\sqrt{a^2c^2 + l^2(b^2 + c^2)}}{2}, \quad S_3 = S_4 = \frac{\sqrt{(a-b)^2(d^2 + l^2) + l^2(c^2 - d^2)}}{2}$$

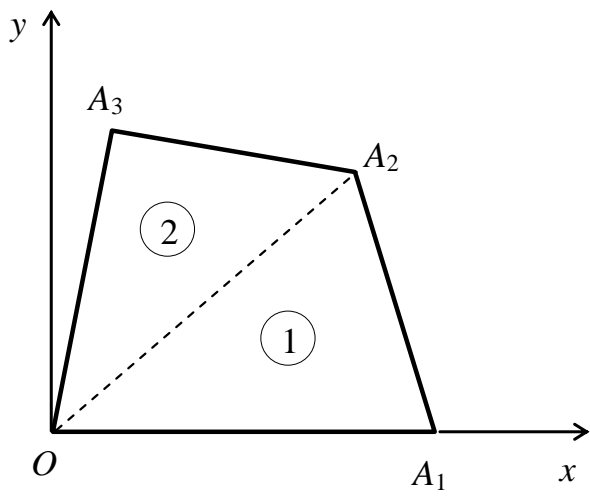
By replacing the particular values of the studied body into relation (13), the following coordinates of the mass center are obtained:

$$x_c = \frac{2l}{3}, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{cS_2 + (c+d)S_3}{\sum_{i=1}^6 S_i}$$

**Case of an arbitrary homogeneous quadrilateral**

The homogeneous plate described by quadrilateral  $OA_1A_2A_3$ , situated in plane  $Oxy$ , is considered (Fig.4a). The plate is divided into triangles  $OA_1A_2$  and  $OA_2A_3$ .

The coordinates of the corners are known:  $O(0, 0, 0)$ ,  $A_1(x_1, 0, 0)$ ,  $A_2(x_2, y_2, 0)$ ,  $A_3(x_3, y_3, 0)$ .



Conform formulei (10), ariile triunghiurilor care compun corpul sunt:

Înlocuind valorile particulare ale corpului studiat în relațiile (13), se obțin următoarele coordonate ale centrului de masă:

**Cazul patrulaterului omogen oarecare**

Se consideră placa omogenă plană descrisă de patrulaterul  $OA_1A_2A_3$ , situată în planul  $Oxy$  (fig.4a). Placa se împarte în triunghiurile  $OA_1A_2$  și  $OA_2A_3$ .

Sunt cunoscute coordonatele punctelor plăcii:  $O(0, 0, 0)$ ,  $A_1(x_1, 0, 0)$ ,  $A_2(x_2, y_2, 0)$ ,  $A_3(x_3, y_3, 0)$ .

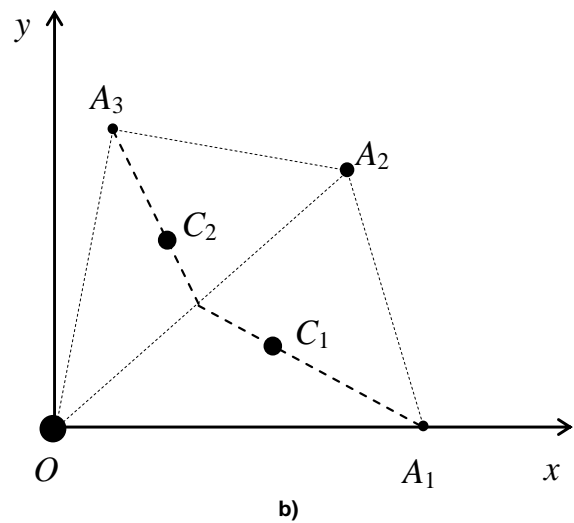


Fig. 4 - Homogeneous plate with the shape of an arbitrary quadrilateral

The areas have the expressions

$$S_1 = x_1y_2, \quad S_2 = |x_2y_3 - x_3y_2|, \quad S = x_1y_2 + |x_2y_3 - x_3y_2| \tag{21}$$

The superficial density is

$$\rho_s = \frac{m}{S} \tag{22}$$

The masses of the two triangular plates are:

$$m_1 = \rho_s S_1 = \frac{mx_1y_2}{x_1y_2 + |x_2y_3 - x_3y_2|}, \quad m_2 = \rho_s S_2 = \frac{m|x_2y_3 - x_3y_2|}{x_1y_2 + |x_2y_3 - x_3y_2|} \tag{23}$$

The coordinates of the mass centers of the two triangles can be easily calculated:

$$C_1\left(\frac{x_1 + x_2}{3}, \frac{y_2}{3}\right), \quad C_2\left(\frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{y_2 + y_3}{3}\right) \tag{24}$$

By taking into account the presented results, it can be concluded that an arbitrary quadrilateral may be reduced to a system of six material points, with the following masses (fig. 4b):

$$O\left(\frac{m}{12}\right), \quad A_1\left(\frac{m_1}{12}\right), \quad A_2\left(\frac{m}{12}\right), \quad A_3\left(\frac{m_2}{12}\right), \\ C_1\left(\frac{3m_1}{4}\right), \quad C_2\left(\frac{3m_2}{4}\right).$$

Ariile au expresiile

Densitatea superficială este

Masele celor două plăci triunghiulare sunt:

Coordonatele centrelor de masă ale celor două triunghiuri pot fi ușor calculate:

Luând în considerare rezultatele prezentate, se desprinde concluzia că un patrulater oarecare poate fi redus la un sistem de șase puncte materiale, cu următoarele mase (fig. 4b):

$$O\left(\frac{m}{12}\right), \quad A_1\left(\frac{m_1}{12}\right), \quad A_2\left(\frac{m}{12}\right), \\ A_3\left(\frac{m_2}{12}\right), \quad C_1\left(\frac{3m_1}{4}\right), \quad C_2\left(\frac{3m_2}{4}\right).$$

The coordinates of the mass center of the quadrilateral are:

Coordonatele centrului de masă ale patrulaterului sunt:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m} = \frac{1}{3} \left( x_2 + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_3}{m} \right), \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m} = \frac{1}{3} \left( y_2 + \frac{m_2 y_3}{m} \right). \quad (25)$$

The moments and products of inertia with respect to the chosen reference system take, respectively, the forms:

Momentele de inerție în raport cu sistemul de referință ales iau, respectiv, formele:

$$\begin{cases} J_x = \sum m_i y_i^2 = \frac{1}{6} [m y_2^2 + m_2 y_3 (y_2 + y_3)] \\ J_y = \sum m_i x_i^2 = \frac{1}{6} [m x_2^2 + m_1 x_1 (x_1 + x_2) + m_2 x_3 (x_2 + x_3)] \\ J_z = J_x + J_y, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} J_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \frac{1}{12} [2m x_2 y_2 + m_1 x_1 y_2 + m_2 (x_2 y_3 + x_3 y_2 + 2x_3 y_3)] \\ J_{yz} = 0 \\ J_{zx} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

**Case of a right-angled trapezoid**

A right-angled trapezoid is represented in Figure 5, corresponding to a homogeneous plate of mass  $m$ , with the following geometrical characteristics: the large base  $B$ , the small base  $b$  and the height  $h$ .

**Cazul trapezului dreptunghic**

În figura 5 este reprezentat trapezul dreptunghic corespunzător unei plăci omogene de masă  $m$ , cu următoarele caracteristici geometrice: baza mare  $B$ , baza mică  $b$  și înălțimea  $h$ .

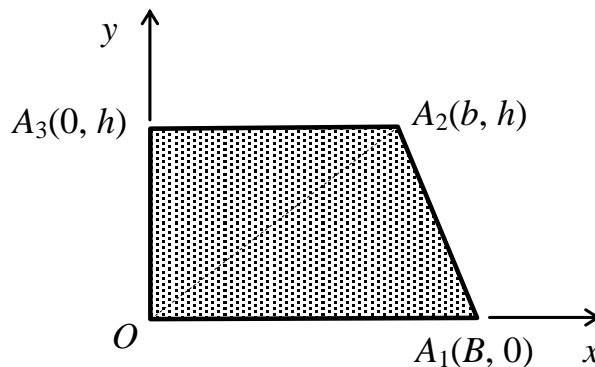


Fig. 5 - Homogeneous plate with the shape of a right-angled trapezoid

According to relations (10) and (12), the masses of the two composing triangles are:

În conformitate cu relațiile (10) și (12), masele celor două triunghiuri componente sunt:

$$m_1 = \frac{mB}{B+b}, \quad m_2 = \frac{mb}{B+b} \quad (28)$$

By applying relations (3), the coordinates of the mass center can be calculated:

Aplicând relațiile (3), se calculează coordonatele centrului de masă:

$$x_c = \frac{B^2 + Bb + b^2}{3(B+b)}, \quad y_c = \frac{h(B+2b)}{3(B+b)}. \quad (29)$$

The moments and products of inertia, determined by relations (6)-(7), have the following expressions:

Momentele de inerție, determinate cu ajutorul relațiilor (6)-(7), au următoarele expresii:

$$J_x = \frac{mh^2(B+3b)}{6(B+b)}, \quad J_y = \frac{m(B^2+b^2)}{6}, \quad J_z = \frac{m}{6} \left[ \frac{h^2(B+3b)}{B+b} + B^2 + b^2 \right] \quad (30)$$



$$J_{xy} = \frac{mh(3b^2 + B^2 + 2bB)}{12(B+b)}, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0 \quad (31)$$

## CONCLUSIONS

The presented method allows a fast calculation of the inertia characteristics of a plate with concurrent bending edges, as well as of a plane plate with polygonal shape and, in particular, of a quadrilateral one.

The method, which can be easily implemented in a computer code, represents a useful tool in machine and mechanical device design activity.

The two chosen applications certify for its benefits.

## REFERENCES

- [1]. Craifaleanu A. (2001) – *Dynamics for engineers* (in Romanian), PRINTECH Publishing House, Bucharest;
- [2]. Orășanu N. (2009) – *The reduction of continuous bodies to a system of the material points. Applications on regular polygons*, National Conference on Mechanics of Solids - CNMS-XXXIII, Bucharest.
- [3]. Orășanu N. (2010) – *Reduction of the elementary bodies to systems of material points with the same inertial properties*, University "Politehnica" of Bucharest Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering, Vol.72, Issue 3.

## CONCLUZII

Metoda prezentată permite calculul rapid al caracteristicilor inerțiale ale unei plăci cu muchii de îndoire concurente, precum și al unor plăci plane de forme poligonale și, în particular, de formă patrulateră.

Metoda, care poate fi ușor implementată în programe de calcul automat, reprezintă un instrument valoros în activitatea de proiectare a mașinilor și utilajelor mecanice. Cele două aplicații alese atestă avantajele sale.

## BIBLIOGRAFIE

- [1]. Craifaleanu A. (2001) – *Dinamica pentru ingineri*, Ed. PRINTECH, București.
- [2]. Orășanu N. (2009) – *Reducerea corpurilor continue la un sistem de puncte materiale. Aplicații la poligoane regulate* (în limba engleză), Conferința Națională de Mecanica Solidului - CNMS-XXXIII, București.
- [3]. Orășanu N. (2010) – *Reducerea corpurilor elementare la sisteme de puncte materiale cu aceleași proprietăți inerțiale* (în limba engleză), Buletinul științific al Universității "Politehnica" din București, Seria D: Inginerie Mecanică, Vol.72, nr.3.