УДК 303.4 DOI: 10.15507/VMU.024.201403.185

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

Н. М. Куляшова, И. А. Карпюк

В статье рассматривается широкий спектр экономических задач, при решении которых акцент был сделан на построении математических моделей и применении методов, позволяющих проникнуть в суть изучаемых процессов, вскрыть логику их развития; указывается, что при построении идеальных моделей экономических процессов нередко используются функциональные зависимостеи между факторами; приводятся предельные экономические показатели. Кроме этого, в работе представлены математические модели закономерностей общественно-экономических процессов, основанные на дифференциальных уравнениях; особое внимание уделено математическому аппарату теории вероятностей, теории случайных функций и математической статистике как инструменту моделирования процессов, протекающих в условиях некоторой неопределенности. Также в статье рассмотрено применение основных разделов математического программирования в качестве методов оптимизации экономических показателей.

Сделан вывод о том, что математика является инструментом количественного расчета в современной экономике, средством формулировки и методом решения исследовательских задач. Математический аппарат позволяет корректно излагать и научно обосновывать положения экономической теории.

Ключевые слова: математика, экономика, экономическая система, моделирование, экономико-математический метод.

APPLICATION OF MATHEMATICAL THEORY IN THE ECONOMIC PRACTICE

N. M. Kuljashova, I. A. Karpjuk

The article considers a wide range of economic problems, and the solution for them is made on the basis on the construction of mathematical models and the application of mathematical methods allowing to penetrate into the essence of the studied processes, to reveal the logic of their development. The authors pointed out that the building of an ideal model of economic process is quite often based on usage of functional relationships between factors. The paper considers the marginal economic indicators, presents mathematical models, which are based on the differential equations, which leads to the study of the regularities of social-economic processes. Special attention is paid to the mathematical apparatus of the theory of probability, theory of random functions and mathematical statistics as a tool for modeling of processes in the conditions of some uncertainty. The article considers application of the main topics of mathematical programming methods of optimization of economic indicators.

The authors draw the conclusion that mathematics for a modern economics is the instrument of quantitative calculation, means of formulation and method of decision of research tasks. A mathematical framework allows the correct expounding and scientific explanation from the positions of economic theory.

Keywords: mathematics, economic systems, modeling, economic-mathematical methods.

Экономическая наука об объективных причинах функционирования и развития общества использует различные количественные характеристики, математические модели и методы как необходимые, естественные элементы. С одной стороны, использование математики в экономике позволяет выделить и формально описать наиболее существенные связи; из четко сформулированных исходных данных и соотношений сделать адекватные изучаемому объекту выводы. С другой, методы математики позволяют индуктивным путем оценить вид и параметры зависимостей, адекватно отображающих данные наблюдений. Кроме того, абстрактный характер математического языка позволяет корректно и сжато формулировать экономические понятия и теоретические положения.

В экономической практике широко используется аппарат элементарной математики: определение долей и процентов материальных ресурсов; размещение производства, вычисление прибыли, налогов, рентабельности и т. д.

Многие экономические явления представляют собой устойчивые количественные закономерности, которые можно описать в виде экономико-математических моделей при помощи понятия функции. В качестве примеров таких зависимостей приведем спрос y от цены x товара; предложение некоторого товара от его цены, полезности; суммарную выручку z, равную произведению количества x проданного товара на его цену y, если цена представляет собой функцию спроса; выпуск y продукции от затрат x ресурсов.

При построении идеальных моделей экономических процессов нередко используется линейная зависимость факторов. Так, для расчетов межотраслевого баланса, как правило, предполагается, что выпуск продукции пропорционален прямым затратам труда. Если в производстве определенной продукции участвует несколько отраслей, то ее выпуск является линейной функцией всех прямых затрат (линейность принимается условно для упрощения расчетов).

Учитывая, что большинство экономических объектов подвержены действию разнообразных факторов, для их изучения широко применяются функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$: производственная функция, связывающая объемы затрачиваемых ресурсов и выпуска продукции; функция полезности набора из нескольких товаров и т. п. Отметим также мультипликативные функции, зависимая переменная которых является произведением факторных переменных, обращающих ее в нуль при отсутствии воздействия хотя бы одного фактора. Это, например, производственная функция вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, частным случаем которой является функция Кобба-Дугласа $y = a_0 x_1^{a} x_2^{1-a}$.

Значимые утверждения экономики основаны на том, что многие функции, описывающие экономические показатели, являются непрерывными. В частности, основываясь на понятии непрерывности, можно сделать вывод, что величина подоходного налога граждан с мало отличающимися доходами будет отличаться незначительно. Так же зависят от цены функции спроса и предложения: при небольших изменениях цен они колеблятся незначительно, хотя в финансовом анализе можно встретить ситуацию скачкообразного изменения спроса.

Однако в рамки элементарной математики не укладываются кредитные операции, банковская деятельность, долговременное прогнозирование, инвестиции и оценка рисков. При решении подобных задач требуется не только эффективное экономическое мышление, но и привлечение специальных математических методов.

В экономике нередко приходится иметь дело с понятиями и методами математического анализа. При исследовании зависимости спроса от цены товара, установлении характера изменения уровня потребления согласно уровню доходов и других факторов используются предельные показатели (вычисляется предельный эффект) и производная. Повышение цены на 1 ед. товара при уменьшении спроса со стороны потребителей характеризует производная соответствующей функции. Увеличение предложения товара со стороны производителей при увеличении цены на ≈ 1 ед. описывается производной функции предложения. Приблизительную оценку полезности от приобретения дополнительной одной единицы товара дает производная функции полезности. Производная производственной функции – добавочная продукция, которую будет производить новый сотрудник в единицу времени (если аргумент функции – это число работников фирмы). Указанные функции могут быть как одномерными, так и многомерными.

Рассмотрим дифференцируемую однофакторную производственную функцию $y = f(x)$, которая выражает зависимость объема производимой продукции за единицу времени от объема затраченного ресурса x, например, количества человеческого труда, выраженного в виде человеко-часов или числа работников. Поскольку $f(a+1) \approx f(a) + f'(a)$, где a – число работников фирмы на текущий момент, то $f'(a)$ – добавочная продукция, производимая новым сотрудником предприятия за единицу времени.

Если c – цена единицы продукции, а p – зарплата работника за единицу времени и $c \cdot f'(a) > p$, то фирма может нанять еще одного сотрудника, который принесет больше прибыли, чем фирма затратит на него средств. Это называется *золотым правилом экономики,* которое имеет универсальный характер.

В качестве примера многофакторных функций рассмотрим функцию прибыли:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} P_i x_i - S(x_1, x_2, ..., x_m),$$

где $x_1, x_2, ..., x_m$ – количества производимых разновидностей товара m, $P_1, P_2, ..., P_m$ – цены соответствующих товаров (все P_i – постоянные величины), $C = S(x_1, x_2, ..., x_m)$ – затраты на производство товаров (функция издержек).

Максимум прибыли целесообразно искать как условие локального экстремума функции многих переменных, если $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений). Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i:

$$P_i - \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Полученная система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на его производство.

В экономической практике аппарат дифференциального исчисления применяется также для определения мгновенных расхода воды, энергопотребления, производственной мощности. А при определении дневной выработки по функции производительности труда, объема производства, экономической эффективности капитальных вложений, суммарного количества оборудования, выпущенного за промежуток времени и т. д. используются элементы интегрального исчисления. При этом для применения определенного интеграла составляют идеализированную модель, использующую непрерывные функции.

Исследование закономерностей долговременных социально-экономических процессов не представляется возможным без построения математических моделей, базирующихся на дифференциальных уравнениях. Подобные модели эффективно используются в экономической динамике.

Так, модель естественного роста выпуска некоторой продукции представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$Q' = kQ,$$

где $k = lmP$, $Q(t)$ – количество продукции, реализованной в момент времени t, $\frac{1}{l}$ – норма акселерации, m – норма инвестиции, P – фиксированная цена.

Рост выпуска в условиях конкуренции определяется нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными: $Q' = \alpha P(Q) Q$, где $\alpha = lm$.

Балансовая модель, включающая в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики, которые зависят от времени t (национальный доход $Y(t)$, государственные расходы $E(t)$, потребление $S(t)$ и инвестиции $I(t)$) представляет собой систему уравнений. Она отражает балансы расходов и национального дохода, общего потребления части национального дохода с потреблением и внутренним, а также зависимость размера инвестиций от произведения нормы акселерации, характеризуемой уровнем технологии и инфраструктуры государства, на предельный национальный доход:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases}$$

где $a(t)$ – коэффициент склонности к потреблению ($0 < a(t) < 1$), $b(t)$ – автономное (конечное) потребление, $k(t)$ – норма акселерации. При этом функционирование и развитие государства характеризуются известными величинами $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $E(t)$. В этом случае динамика национального дохода определяется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка [1, с. 114–115]:

$$Y' = \frac{1 - a(t)}{k(t)} Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}.$$

Изучение модели рынка с прогнозируемыми ценами приводит к дифференциальному уравнению второго порядка, поскольку спрос и предложение в реальных ситуациях зависят не только от текущей цены на товар, но и тенденции ценообразования, а также темпов изменения цены (первая и вторая производные функции цены сооответственно).

Вероятностный характер изменения некоторых объектов экономики, изучение их по ограниченному объему наблюдений предопределили применение математического аппарата и методов теории вероятностей, теории случайных функций и математической статистики при их исследовании.

Вероятностно-статистические методы описания экономических явлений и процессов являются инструментом построения соответствующих моделей в условиях неопределенности, позволяя определить закономерности их протекания, выявить главные факторы и установить влияние искажающих обстоятельств на результаты статистических наблюдений.

Значительное число факторов, изменяющих поведение экономического объекта, оценивается только с качественной стороны. Это обстоятельство оправдывает применение методов экспертных оценок, дисперсионного и ковариационного анализа при исследовании реальных объектов. При изучении явлений, имеющих случайный характер, например, в теории принятия решений или в портфельном анализе, используется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Разработка эффективных рекомендаций по организации работы систем обслуживания и расчеты оптимальных производственно-экономических показателей являются предметами изучения теории массового обслуживания.

Изучение более глубоких экономических проблем определяет необходимость введения новых понятий и усложняет исследовательский аппарат.

Множественность возможных решений при определении объемов производства в зависимости от выбора технологии, оборудования, сырья и организации производственного процесса является одной из особенностей задач плановой экономики. Для эффективного управления требуется минимальное количество наилучших вариантов, учитывающих ограничения, налагаемые на использование однородных ресурсов. В итоге, приходим к оптимизационным задачам, суть методов решения которых заключается в выборе способа использования ресурсов, обеспечивающего максимум (или минимум) интересующего показателя. Для решения задач, в которых или нет неконтролируемых факторов, или имеются только фиксированные применяются основные методы математического программирования (планирования).

Для выработки оптимального решения экономической задачи, условия и ограничения которой описываются уравнениями или неравенствами первой степени, предназначены методы линейного программирования. К таким задачам относятся: составление плана работы станков, обеспечивающего минимальные затраты на производство всей продукции; определение наилучшего плана распределения ограниченных однородных ресурсов в целях решения поставленной задачи; составление дневного рациона с минимальной стоимостью и ограниченным содержанием питательных веществ и т. п.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (\min)$$

при следующих условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \;\; i=\overline{1,k}; \;\; k \le m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \;\; i=\overline{k+1,m},$$

$$x_j \ge 0, \;\; j=\overline{1,s}; \;\; s \le n .$$

Содержательный смысл некоторых экономических задач линейного программирования приводит к задачам, решения которых должны быть целыми числами, то есть они относятся к целочисленному программированию. Например, это задачи об оптимальном распределении судов по навигационным линиям; станочном парке предприятия; числе турбин в энергосистеме, и многие другие, в которых переменные описывают количество единиц неделимой продукции. Задачами целочисленного программирования являются также транспортная задача и ее модификации (задачи о назначениях, о потоках в сетях); задача нахождения минимального порожнего пробега автомобилей; об оптимизации машинного парка и его оптимального распределения по указанным работам. Экстремальные комбинаторные задачи (календарное планирование и теория расписания; об оптимальном назначении; задача коммивояжера также решаются методами целочисленного программирования.

В реальных условиях производства такие показатели как капитальные затраты, себестоимость, прибыль и другие показатели нелинейно зависят от расхода ресурсов и объема производства, то есть решение оптимизационных задач в этом случае приводит к нелинейному программированию. Математическая модель таких задач имеет вид:

$$f\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right) \to \max \quad (\min)$$

при условии, что

$$\left.\begin{aligned} g_i\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right) \le b_i, \;\; i=\overline{1,k}, \\ g_i\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right) = b_i, \;\; i=\overline{k+1,m}, \end{aligned}\right\},$$

где f 8 g_i – некоторые известные функции n переменных, хотя бы одна из которых нелинейна, а b_i – заданные числа. Если f – квадратичная функция, а g_i – линейные функции, то задача относится к квадратичному программированию; если f – отношение двух линейных функций, а g_i – линейные, то к дробно-линейному; если f – вогнутая (выпуклая) функция, область допустимых решений является выпуклым множеством – выпуклому програмированию.

В отличие от линейного программирования для задач нелинейного програмирования отсутствуют универсальные методы решения. Задачи распределения неоднородных ресурсов, планирования производства с учетом издержек, максимизации функции полезности инвестора и минимизации риска при формировании инвестиционного портфеля и т. д. Можно решать графическим методом, классическим дифференциальным исчислением (в частности, методом Лагранжа), градиентными методами (например Франка-Вульфа, штрафных функций и Эрроу-Гурвица).

В экономической практике нередко возникают задачи, содержащие некоторые параметры. Их наличие свидетельствует, например, о сезонном характере прибыли от реализации некоторой продукции; о том, что объем запасов, нормы их затрат и технология производства могут изменяться с течением времени и т. д. Такие задачи являются предметом изучения параметрического программирования. Если указанные параметры – случайные величины, более полно отображающие экономическую действительность, то перечисленные выше задачи решаются методами стохастического программирования.

Модели линейного и нелинейного программирования, как правило, применяются для принятия плановых крупномасштабных решений. Для менее масштабных задач, например, при распределении дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования, разработке правил управления запасами, устанавливающими размер пополняющего заказа и момент пополнения запасов, разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов, определении принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию, составлении календарных планов текущего и капитального ремонта, замены сложного оборудования и т. д. применяются модели динамического программирования.

Для рационального ведения хозяйственной деятельности (достижения наилучших результатов в кратчайший срок) используются математические методы сетевого планирования.

В условиях рыночной экономики и жесткой конкуренции производителей товаров и услуг необходимо уметь вырабатывать эффективные решения, а также быть готовым к действиям конкурентов, или неосознанному влиянию «природы». Для решения подобных задач в математике сформировался раздел, называемый теорией игр, в котором рассматриваютсяметоды решения задач с конфликтными ситуациями.

Резюмируя сказанное выше, отметим, что современная математика является для экономики, управления и финансов не только инструментом количественного расчета, но и методом исследования, а также средством формулировки задач исследования. Кроме того, она позволяет точно определять понятия экономической теории, корректно излагать ее положения и делать обоснованные выводы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Красс, М. С.** Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Москва : Дело, 2001. – 688 с.

Поступила 18.03.2014 г.

Об авторах:

Куляшова Наталья Михайловна, доцент кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, kafivt@mail.ru

Карпюк Ирина Алексеевна, доцент кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат педагогических наук, kafivt@mail.ru

Для цитирования: Куляшова, Н. М. Применение математической теории в экономической практике / Н. М. Куляшова, И. А. Карпюк. – Вестник Мордовского университета. – 2014. – № 4. – С. 184–191. DOI: 10.15507/VMU.024.201403.185

REFERENCES

1. Krass M. S., Chuprynov B. P. Osnovy matematiki i ee prilozhenija v jekonomicheskom obrazovanii [Beginnings of mathematics and its application in economic education]. Moscow, Delo Publ., 2001, 688 p.

About the authors:

Kuljashova Natal'ja Mihajlovna, Associate professor of Fundamental Informatics chair of Mathetatics and Information Technology faculty, Ogarev Mordovia State University (Russia, Saransk, 68 Bolshevistskaya Str.), Candidate of Science (PhD) degree holder in Physical and Mathematical Sciences, kafivt@mail.ru

Karpjuk Irina Alekseevna, Associate professor of Fundamental Informatics chair of Mathetatics and Information Technology faculty, Ogarev Mordovia State University (Russia, Saransk, 68 Bolshevistskaya Str.), Candidate of Science (PhD) degree holder in Pedagogy, kafivt@mail.ru

For citation: Kuljashova N. M., Karpjuk I. A. Primenenie matematicheskoj teorii v jekonomicheskoj praktike [Application of mathematical theory in the economic practice]. *Vestnik Mordovskogo Universiteta* – Mordovia University Bulletin, 2014, no. 4, pp. 184–191. DOI: 10.15507/VMU.024.201403.185