



# Journal of Materials and Engineering Structures

## Research Paper

### Couplage de développement de Neumann et les méthodes de synthèse modale pour l'analyse stochastique de structures aléatoires

Coupling Neumann development and component mode synthesis methods for stochastic analysis of random structures

D. Sarsri<sup>a</sup>

<sup>a</sup> LTI, ENSA, Université Abdelmalek Essaadi, Tanger, Maroc

#### ARTICLE INFO

Historique de l'article :

Reçu : 13 février 2014

Révisé : 7 mai 2014

Accepté : 15 mai 2014

Mots clés:

réponse dynamique

aléatoire

Neumann

synthèse modale

Keywords :

dynamical response

random

Neumann

modal synthesis

#### RESUME

Dans ce papier, on propose une méthode pour calculer les deux premiers moments (moyenne et variance) de la réponse dynamique d'une structure comportant des variables incertaines et soumise à une excitation aléatoire. Pour cela la méthode de Newmark est utilisée pour transformer l'équation du mouvement de la structure en une équation d'équilibre quasi-statique dans le domaine temporel. La méthode de développement de Neumann a été couplée aux simulations de Monte Carlo pour calculer les valeurs statistiques de la réponse aléatoire. L'utilisation des méthodes de synthèse modale permet de réduire les dimensions du modèle avant intégration de l'équation de mouvement. Des applications numériques ont été élaborées pour montrer l'efficacité de la méthode développée pour analyser la réponse stochastique des structures de grande taille.

#### ABSTRACT

In this paper, we propose a method to calculate the first two moments (mean and variance) of the structural dynamics response of a structure with uncertain variables and subjected to random excitation. For this, Newmark method is used to transform the equation of motion of the structure into a quasistatic equilibrium equation in the time domain. The Neumann development method was coupled with Monte Carlo simulations to calculate the statistical values of the random response. The use of modal synthesis methods can reduce the dimensions of the model before integration of the equation of motion. Numerical applications have been developed to highlight effectiveness of the method developed to analyze the stochastic response of large structures.

\* Corresponding author. Tel.: +212 663071618.

E-mail address: sarsri@ensat.ac.ma

## 1 Introduction

L'analyse du comportement dynamique de la plupart des structures industrielles passe généralement par la méthode des éléments finis qui nécessite une discrétisation très fine pour obtenir la précision voulue, cela donne des matrices de grande taille. Il est donc nécessaire d'appliquer des procédures de condensation par sous-structuration dynamique diminuant les dimensions de l'équation à résoudre tout en conservant les propriétés dynamiques de la structure. La structure complète est décomposée en sous-structures qui sont assemblée après modélisation et réduction. Les méthodes de synthèse modale sont basées sur différents choix de modes de sous-structures ainsi que sur diverses procédures de couplage.

La méthode de Craig et Bampton [1] est une méthode de Ritz utilisant comme vecteurs de base pour chaque sous-structure les modes statiques de liaison et l'ensemble tronqué des modes propres à interfaces fixes. Les dimensions du modèle obtenu sont conditionnées par le nombre de d.d.l de jonction.

Dans les méthodes à interfaces libres le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes avec interfaces libres. L'utilisation d'une matrice modale tronquée peut induire des erreurs inacceptables sur le comportement dynamique des sous-structures. Ceci motive la nécessité de prise en compte de l'effet statique des modes supérieurs tronqués par une correction de flexibilité résiduelle. La méthode de MacNeal [2] consiste à représenter le déplacement de chaque sous-structure par une combinaison d'une sous-base tronquée constituée de modes propres à interfaces libres et d'une suite de vecteurs de résidus statiques représentant la contribution des modes non pris en compte. Le problème condensé final des deux méthodes est fonction des seules coordonnées généralisées. Toutefois on constate souvent que les d.d.l de jonction entre sous-structures représentent une grande partie de la taille du modèle final, il est nécessaire d'effectuer une condensation sur les d.d.l de jonction, Tran [3] a proposé une réduction de ces d.d.l en utilisant les modes de l'interface.

La détermination de la réponse dynamique d'une structure à une excitation donnée peut se faire par une intégration directe des équations de mouvement par des schémas numériques implicites ou explicites. Les méthodes de Newmark et de Wilson sont les plus utilisées en dynamique des structures. L'utilisation de cette méthode suppose en général que les paramètres du modèle utilisé sont déterministes (propriétés du matériau, actions appliquées, conditions aux limites...) alors que dans la réalité ces paramètres sont incertains. Pour évaluer la variabilité de la réponse vis à vis des variabilités des paramètres incertains du modèle, une simulation directe de Monte Carlo [4] peut être utilisée. Cette méthode est souvent utilisée comme référence pour les calculs, néanmoins la quantité de calculs mise en œuvre se révèle souvent prohibitive pour l'emploi de cette méthode. La méthode de perturbation initiée par Kleiber et Hien [5] est utilisée par Muscolino [6] pour déterminer la réponse stochastique d'une structure à une excitation déterministe. Cette méthode est basée sur le développement en série de Taylor de la réponse autour des valeurs moyennes des variables aléatoires et permet de calculer directement les moyennes et écarts types des solutions quand les variables ont une faible dispersion. Une autre alternative basée sur les polynômes orthogonaux de chaos a été élaborée par Lie et Ghanem [7], où ils ont utilisé les polynômes d'Hermite pour des variables Gaussiennes. On note qu'il existe d'autres développements dans la littérature, pour les variables non-gaussiennes [8]. Un développement en série de Neumann couplé avec une simulation de Monte Carlo ont été proposé par Zhao [9] pour évaluer les deux premiers moments de la réponse dynamique d'une structure à une excitation aléatoire en utilisant la méthode de Newmark. Stefanou [10] et Schueller et al. [11] ont fait un bilan des différentes procédures pour l'analyse stochastique des structures. Le potentiel et l'applicabilité des différentes méthodes disponibles ont été évalués.

D'autre part l'utilisation des méthodes de synthèse modale suppose aussi que les paramètres du modèle utilisé sont déterministes, Sarsri et al. [12] ont proposé le couplage des méthodes de synthèse modale pour l'analyse stochastique de la fonction de réponse en fréquence des structures à paramètres incertains. D'autre part Hinke et al. [13] ont utilisé la méthode de perturbation et les méthodes de synthèse modale pour déterminer les modes propres stochastiques. Dans cet article on propose d'utiliser les méthodes de synthèse modale à interfaces fixes et libres pour réduire les dimensions de l'équation du mouvement à intégrer et l'application des développements en séries de Neumann pour déterminer les deux premiers moments de la réponse dynamique d'une structure comportant des paramètres incertains. Des exemples numériques ont été examinés pour montrer l'applicabilité et l'efficacité de ce nouveau couplage pour la réponse dynamique des structures de grandes tailles.

## 2 Méthodes de synthèse modale

L'analyse du comportement dynamique de la plupart des structures se fait par la discrétisation de celles-ci par des éléments finis. Toutefois la précision nécessaire à la description de la structure nécessite généralement une modélisation avec un grand nombre d'éléments. En conséquence, il en résulte un nombre élevé de degrés de liberté (d.d.l). Dans ce cas, la réduction des d.d.l s'impose avant la recherche de la réponse dynamique à une excitation donnée. Les méthodes de synthèse modale ou sous-structuration sont les méthodes les plus adaptées. La structure globale est divisée en plusieurs sous-structures  $SS^{(k)}$  ( $k=1, \dots, ns$ ).  $ns$  est le nombre de sous-structures. Toutes les matrices sont affectées de l'indice supérieur  $k$  relatif à la sous-structure  $SS^{(k)}$ .

Pour chaque sous-structure on découpe le vecteur déplacement en :

$$\{y\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (1)$$

avec :  $\{y_j\}^{(k)}$  ( $j \times 1$ ) est le sous-vecteur des d.d.l de jonction et  $\{y_i\}^{(k)}$  ( $i \times 1$ ) est le sous-vecteur des d.d.l internes.

De même pour le vecteur des forces appliquées :

$$\{f\}^{(k)} = \{f_j\}^{(k)} + \{f_e\}^{(k)} \quad (2)$$

avec :  $\{f_j\}^{(k)}$  est le vecteur effort à l'interface et  $\{f_e\}^{(k)}$  est le vecteur effort extérieur.

Le principe de la sous-structuration est basé sur le choix des modes de représentation des déplacements de chaque sous-structure, le vecteur déplacement  $y$  de chaque sous structure peut s'exprimer :

$$\{y\}^{(k)} = [Q]^{(k)} \begin{Bmatrix} y_j^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{Bmatrix} = [Q]^{(k)} \{y_c\}^{(k)} \quad (3)$$

où  $\{\mu\}^{(k)}$  est le vecteur des coordonnées généralisées et la matrice  $[Q]$  sera définie selon la méthode de sous-structuration utilisée.

### 2.1 Méthode à interface fixe

Le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes à interface fixe ainsi que les modes statiques de liaison.

Dans ce cas la matrice  $[Q]$  est donnée par :

$$[Q] = [\psi_c \quad Y] \quad (4)$$

où  $[\psi_c]$  est la matrice des modes statiques de liaison obtenue en calculant les déplacements correspondant à un déplacement unité en un d.d.l de jonction en supposant que les autres d.d.l de jonction sont fixes.  $[Y]$  est la base modale tronquée de la sous-structure à interface fixe c'est-à-dire  $\{y_j\} = \{0\}$

### 2.2 Méthode à interface libre

Dans ce cas, le mouvement de chaque sous-structure peut être caractérisé par ses modes à interface libre, ses modes de corps rigide dans le cas où ils existent et ses modes d'attache.

D'où la relation de base de chaque sous-structure :

$$\{y\} = Y \{\eta\} + [\psi_r] \{\xi_r\} + [\psi_j] \{\xi_j\} \quad (5)$$

où  $[Y]$  est la base modale tronquée de la sous-structure à interface libre ;  $[\psi_r]$  la Matrice des modes de corps rigide ;  $[\psi_j]$  la matrice des modes d'attache obtenue en calculant les déplacements produits par des forces unité appliquées aux à d.d.l de jonction en supposant que les autres d.d.l de jonction sont fixe. Elles sont obtenues par la relation :

$$[\psi_a] = [G][F_j] \tag{6}$$

avec :  $[F_j] = \begin{bmatrix} I_j \\ 0 \end{bmatrix}$

L'expression de la matrice  $[G]$  dépend de la nature de la structure, dans le cas d'une structure qui ne contient pas de modes de corps rigides :

$$[G] = [K]^{-1} \tag{7}$$

Dans le cas d'une structure comportant des modes de corps rigide cette matrice devient :

$$[G] = {}^T[A][K_{(c)}]^{-1}[A] \tag{8}$$

avec :  $[A] = [I] - [\phi]^{(r)T} [\phi]^{(r)} [M]$  et  ${}^T[\phi]^{(r)} [M] [\phi]^{(r)} = [I]$

$[I]$  matrice unité,  $[\phi]^{(r)}$  matrice des modes rigides

$[K_{(c)}]$  est la matrice de rigidité obtenue en fixant des d.d.l arbitraires pour rendre la structure isostatique, c'est-à-dire en remplaçant la partie correspondante de la matrice de rigidité de la structure initiale par zéro.

Pour conserver les d.d.l de jonction, nous utilisons le découpage suivant :

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_j \\ Y_i \end{bmatrix} \quad [\psi_r] = \begin{bmatrix} \psi_{rj} \\ \psi_{ri} \end{bmatrix} \quad [\psi_a] = \begin{bmatrix} \psi_{aj} \\ \psi_{ai} \end{bmatrix} \tag{9}$$

En utilisant ce découpage dans l'équation (5) on obtient :

$$\{\xi_a\} = [\psi_{aj}]^{-1} \{y_j\} - [\psi_{aj}]^{-1} [Y_j] \{\eta\} + [\psi_{aj}]^{-1} [\psi_{rj}] \{\xi_r\} \tag{10}$$

La matrice  $[Q]$  devient alors :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \psi_a \psi_{aj}^{-1} & \psi_r - \psi_a \psi_{aj}^{-1} \psi_{rj} & Y - \psi_a \psi_{aj}^{-1} Y_j \end{bmatrix} \tag{11}$$

Pour les différentes méthodes de sous-structuration l'énergie cinétique de chaque sous-structure devient en utilisant l'équation (3):

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} {}^T \{\dot{y}_c\}^{(k)} [M_c]^{(k)} \{\dot{y}_c\}^{(k)} \tag{12}$$

Avec :  $[M_c]^{(k)} = {}^T [Q]^{(k)} [M]^{(k)} [Q]^{(k)}$

De même pour l'énergie potentielle de chaque sous-structure  $SS^{(k)}$  est de la forme:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} {}^T \{y_c\}^{(k)} [K_c]^{(k)} \{y_c\}^{(k)} \quad (13)$$

$$\text{Avec : } [K_c]^{(k)} = {}^T [Q]^{(k)} [K]^{(k)} [Q]^{(k)}$$

Le travail des forces appliquées est donné par :

$$\tau^{(k)} = {}^T \{\eta\}^{(k)} \{f_c\}^{(k)} \quad (14)$$

$$\text{Avec : } \{f_c\}^{(k)} = {}^T [Q]^{(k)} (\{f_e\}^{(k)} + \{f_j\}^{(k)})$$

Les énergies cinétique, potentielle et le travail des forces extérieures de la structure complète peuvent être obtenus par sommation des énergies de chaque élément:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n {}^T \{\dot{y}_c\}^{(k)} [M_c]^{(k)} \{\dot{y}_c\}^{(k)} \\ U &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n {}^T \{y_c\}^{(k)} [K_c]^{(k)} \{y_c\}^{(k)} \\ \tau &= \sum_{k=1}^n {}^T \{y_c\}^{(k)} \{f_c\}^{(k)} \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation du mouvement de la structure assemblée est obtenue en exprimant les conditions de compatibilité à l'interface :

Continuité de déplacement :

$$\{y_j\}^1 = \{y_j\}^2 = \dots = \{y_j\}^n = \{y_j\} \quad (16)$$

L'équilibre de l'interface:

$$\sum_{k=1}^n \{f_j\}^{(k)} = 0 \quad (17)$$

Soit  $\{y_c\}$  le vecteur des déplacements indépendants de la structure assemblée :

$$\{y_c\} = \begin{Bmatrix} \mu^{(1)} \\ \vdots \\ \mu^{(n)} \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (18)$$

La méthode d'assemblage utilisée exploite les super-éléments obtenus à partir des matrices condensées  $[K_c]^{(k)}$  et  $[M_c]^{(k)}$  de chaque sous-structure  $SS^{(k)}$

La conservation des d.d.l de jonction permet d'assembler ces matrices comme des éléments finis ordinaires.

La compatibilité des déplacements de jonctions de la structure assemblée est obtenue en écrivant pour chaque sous-structure  $SS^{(k)}$  la relation matricielle suivante :

$$\{y_c\}^{(k)} = [\beta]^{(k)} \{y_c\} \quad (19)$$

$[\beta]^{(k)}$  : Matrice de localisation ou de connectivité géométrique de la sous-structure SS(k). Elle permet de localiser ou de repérer les d.d.l de chaque sous-structure SS(k) dans l'ensemble des d.d.l de la structure assemblée.  $[\beta]^{(k)}$  sont des matrices booléennes dont les éléments sont des 0 ou des 1.

On définit alors une matrice de transformation pour chaque sous-structure:

$$[Z]^{(k)} = [Q]^{(k)} [\beta]^{(k)} \quad (20)$$

Les matrices condensées de masse et de rigidité sont alors données par :

$$[M_c] = \sum_{k=1}^n {}^T [Z]^{(k)} [M]^{(k)} [Z]^{(k)}$$

$$U = \sum_{k=1}^n {}^T [Z]^{(k)} [K]^{(k)} [Z]^{(k)} \quad (21)$$

Le travail des forces extérieures s'exprime sous la forme :

$$\tau = {}^T \{\eta\} \{f_c\} \quad (22)$$

Avec:  $\{f_c\} = \sum_{k=1}^n {}^T [Z]^{(k)} (\{f_j\}^{(k)} + \{f_e\}^{(k)})$

On peut montrer en utilisant les conditions de compatibilité à l'interface que :

$$\sum_{k=1}^n {}^T [Z]^{(k)} \{f_j\}^{(k)} = 0 \quad (23)$$

Le travail des forces extérieures devient alors :

$$\tau = \sum_{k=1}^n {}^T Z^{(k)} f_e^{(k)} \quad (24)$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueux on ajoute une force de dissipation visqueuse  $\{f\}^* = -[C]\{\dot{y}\}$ . Lorsque nous appliquons la méthode de sous-structuration cette force devient :

$$\{f_c\}^* = -\{C_c\}\{\dot{y}_c\} \quad (25)$$

avec :  $C_c = \sum_{k=1}^n {}^T Z^{(k)} C^{(k)} Z^{(k)}$

La dynamique du système assemblé est alors modélisée par le système différentiel suivant:

$$[M_c]\{\ddot{y}_c\} + [C_c]\{\dot{y}_c\} + [K_c]\{y_c\} = \{f_c\} \quad (26)$$

Après résolution de cette équation. Les déplacements physiques de chaque sous-structure sont obtenus par :

$$\{y\}^{(k)} = [Z]^{(k)} \{y_c\} \quad (27)$$

### 3 Développement de Neumann

La solution de l'équation (26) sera déterminée sur l'intervalle temporel  $[0, T]$  cet intervalle est subdivisé en  $n$  intervalles  $\Delta t = T/n$

Les développements des déplacements et les vitesses ont été donnés dans :

$$\begin{aligned}\{\dot{y}_c(t + \Delta t)\} &= \{\dot{y}_c(t)\} + [(1 - \delta)\{\ddot{y}_c(t)\} + \delta\{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\}] \Delta t \\ \{y_c(t + \Delta t)\} &= \{y_c(t)\} + \{\dot{y}_c(t)\} \Delta t + [(0.5 - \alpha)\{\ddot{y}_c(t)\} + \alpha\{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\}] (\Delta t)^2\end{aligned}\quad (28)$$

$\alpha$  et  $\delta$  sont deux paramètres qui assurent la précision et la stabilité de la solution. Lorsque  $\delta \geq 0.5$  et  $\alpha \geq (\delta + 0.5)/4$  la méthode de Newmark est inconditionnellement stable.

A partir des équations (28) on peut obtenir  $\{\dot{y}_c(t + \Delta t)\}$  et  $\{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\}$  en fonction seulement de l'inconnue  $\{y_c(t + \Delta t)\}$  et la solution à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned}\{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\} &= a_0 [\{y_c(t + \Delta t)\} - \{y_c(t)\}] - a_2 \{\dot{y}_c(t)\} - a_3 \{\ddot{y}_c(t)\} \\ \{\dot{y}_c(t + \Delta t)\} &= \{\dot{y}_c(t)\} + a_6 \{\ddot{y}_c(t)\} + a_7 \{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\}\end{aligned}\quad (29)$$

dans lesquelles :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t(1 - \delta) & a_7 &= \delta \Delta t\end{aligned}$$

L'équation du mouvement (26) est donnée à l'instant  $t + \Delta t$  par :

$$[M_c] \{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\} + [C_c] \{\dot{y}_c(t + \Delta t)\} + [K_c] \{y_c(t + \Delta t)\} = \{F_c(t + \Delta t)\} \quad (30)$$

Remplaçons les équations (29) dans l'équation (30) on obtient l'équation algébrique suivante:

$$[K_{eq}] \{y_c(t + \Delta t)\} = \{F_{eq}\} \quad (31)$$

$$\text{Avec : } [K_{eq}] = [K_c] + a_0 [M_c] + a_1 [C_c]$$

$$\begin{aligned}\{F_{eq}\} &= \{F_c(t + \Delta t)\} + [M_c] (a_0 \{y_c(t)\} + a_2 \{\dot{y}_c(t)\} + a_3 \{\ddot{y}_c(t)\}) \\ &+ [C_c] (a_1 \{y_c(t)\} + a_4 \{\dot{y}_c(t)\} + a_5 \{\ddot{y}_c(t)\})\end{aligned}$$

Une fois le déplacement  $\{y_c(t + \Delta t)\}$  est déterminé à partir de l'équation (31), les vecteurs vitesse  $\{\dot{y}_c(t + \Delta t)\}$  et accélération  $\{\ddot{y}_c(t + \Delta t)\}$  seront obtenus à partir des équations (29).

La matrice réduite de raideur équivalente  $[K_{eq}]$  est décomposée en :

$$[K_{eq}] = [K_0] + [\Delta K] \quad (32)$$

Les coefficients de la matrice  $[K_0]$  sont constants dans laquelle les paramètres aléatoires sont remplacés par leurs moyennes, les coefficients de  $[\Delta K]$  regroupent les variations de ces même paramètres qu'on peut obtenir par une simulation directe de Monte Carlo (MCS).

De même on peut décomposer  $\{F_{eq}\}$  :

$$\{F_{eq}\} = \{F\}_0 + \{\Delta F\} \quad (33)$$

Le vecteur  $\{y_c(t + \Delta t)\}_0$  est obtenu en résolvant :

$$[K_0] \{y_c(t + \Delta t)\}_0 = \{F\}_0 + \{\Delta F\} \quad (34)$$

Le développement de Neumann de la matrice de raideur s'écrit :

$$\begin{aligned} [K_{eq}]^{-1} &= ([K_0] + [\Delta K])^{-1} \\ &= ([I] - [P] + [P]^2 - [P]^3 + \dots) [K_0]^{-1} \end{aligned} \quad (35)$$

Où :  $[P] = [K_0]^{-1} [\Delta K]$

Remplaçant  $[K_{eq}]^{-1}$  dans l'équation (31) on obtient :

$$\{y_c(t + \Delta t)\} = ([I] - [P] + [P]^2 - [P]^3 + \dots) [K_0]^{-1} (\{F\}_0 + \{\Delta F\}) \quad (36)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \{\bar{y}_c(t + \Delta t)\}_0 &= [K_0]^{-1} \{F\}_0 \\ \{\Delta y_c\}_0 &= [K_0]^{-1} \{\Delta F\} \end{aligned} \quad (37)$$

L'équation (36) devient :

$$\{y_c(t + \Delta t)\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r [P]^r (\{\bar{y}_c(t + \Delta t)\}_0 + \{\Delta y_c\}_0) \quad (38)$$

En introduisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \{\bar{y}_c(t + \Delta t)\}_r &= [P]^r \{\bar{y}_c(t + \Delta t)\}_0 \\ \{\Delta y_c\}_r &= [P]^r \{\Delta y_c\}_0 \\ \{y_c\}_r &= \{\bar{y}_c(t + \Delta t)\}_r + \{\Delta y_c\}_r \end{aligned} \quad (39)$$

Le vecteur aléatoire  $\{y_c(t + \Delta t)\}$  est alors donné par la série suivante:

$$\{y_c(t + \Delta t)\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \{y_c(t + \Delta t)\}_r \quad (40)$$

et le vecteur  $\{y_c(t + \Delta t)\}_r$  est donné par la relation de récurrence suivante:

$$\begin{aligned} \{y_c(t + \Delta t)\}_r &= [P]^r (\{\bar{y}_c(t + \Delta t)\}_0 + \{\Delta y_c\}_0) \\ &= [P] ([P]^{r-1} \{y_c(t + \Delta t)\}_0) \\ &= [P] \{y_c(t + \Delta t)\}_{r-1} \\ r &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Après avoir déterminé la solution initiale  $\{y_c(t + \Delta t)\}_0$  par (34) le vecteur aléatoire  $\{y_c(t + \Delta t)\}$  est entièrement déterminé par le procédé de récurrence (41). Un test d'arrêt du processus itératif utilisé est :

$$\frac{\|\{y_c(t + \Delta t)\}_r\|_2}{\left\| \sum_{k=0}^r (-1)^k \{y_c(t + \Delta t)\}_k \right\|_2} \leq \delta_{err} \quad (42)$$

Avec  $\delta_{err}$  représente la tolérance admise.



En utilisant la simulation de Monte-Carlo pour calculer  $\{y_c(t + \Delta t)\}_r^i$  ( $i=1,2,\dots,N_s$  ;  $r=1,2,3,\dots$ ) dans l'équation (41) et nous déduisons  $\{y_c(t + \Delta t)\}^i$  à partir de l'équation (40).

A partir de l'équation (27) on déduit que :

$$\{y(t + \Delta t)\}^{i(k)} = [Z]^{(k)} \{y_c(t + \Delta t)\}^i \tag{43}$$

La valeur moyenne et la variance de  $\{y(t + \Delta t)\}^{(k)}$  sont alors données par :

$$E[\{y(t + \Delta t)\}^{(k)}] = \{\bar{y}(t + \Delta t)\}^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \{y(t + \Delta t)\}^{i(k)}$$

$$Var[\{y(t + \Delta t)\}^{(k)}] = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} diag[\left(\{y(t + \Delta t)\}^{i(k)} - \{\bar{y}(t + \Delta t)\}^{(k)}\right) \times \left(\{y(t + \Delta t)\}^{i(k)} - \{\bar{y}(t + \Delta t)\}^{(k)}\right)^T] \tag{44}$$

### 4 Applications

#### 4.1 Exemple 1 : Système discret

Dans un premier temps nous montrons l'efficacité du couplage présenté pour déterminer la réponse dynamique d'un système simple constitué des masses et ressorts avec un amortissement hystérétique dont ces variables sont incertaines, cela permettra d'étudier la précision obtenue par l'utilisation de ces méthodes en fonction de la plage des variations des variables incertaines.

On considère un système constitué de 20 masses reliées par 21 ressorts et amortisseurs comme montre la figure 1. Cet ensemble sera divisé en deux sous-structures  $SS^{(1)}$  de 11 d.d.l internes et  $SS^{(2)}$  de 8 d.d.l internes, et un d.d.l de jonction de masse  $m/2$ .

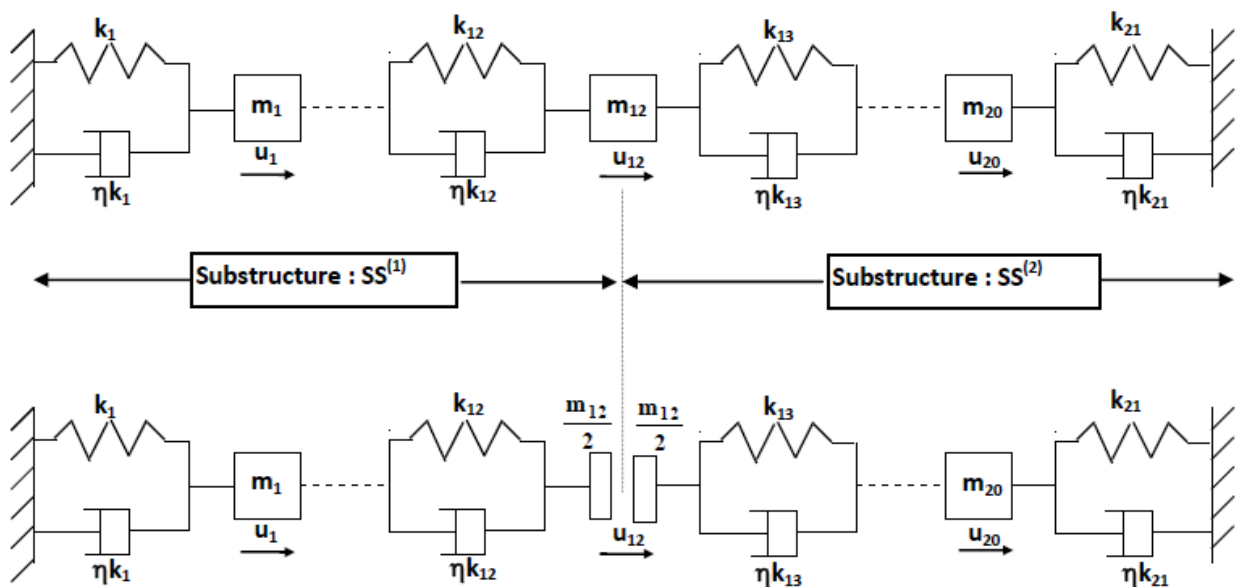


Fig. 1 – Système Masses-ressorts à amortissement hystérétique

L'équation de départ de 20 d.d.l sera condensée et se ramènera à la résolution d'une équation de 10 d.d.l, répartis en 1 d.d.l de jonction, 5 modes à interfaces libres ou interface bloquées selon la méthode utilisée de  $SS^{(1)}$  et 4 modes pour  $SS^{(2)}$ .

Nous considérons que les masses et les raideurs de ce système discret sont aléatoires et suivent des lois normales avec des moyennes  $m_i^0 = m^0 = 1 \text{ kg}$  ( $i=1,2,\dots,20$ ) et  $k_i^0 = k^0 = 10^6 \text{ N/m}$  ( $i = 1,2,\dots,21$ ).

La moyenne et la variance du déplacement de la masse  $m_{11}$  sont calculés par la méthode de Neumann pour plusieurs valeurs des variances de  $m$  et de  $k$  en utilisant le modèle complet puis le modèle condensé par les deux méthodes à interfaces fixes et libres. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats obtenus par une simulation de Monte Carlo de 5000 tirages

Les figures 2-7 représentent les deux premiers moments (moyenne et écart type) du déplacement de la masse pour des variations de 5%, 10% et 20% de la raideur  $k$  et de la masse  $m$ . Nous remarquons que dans tous les cas les moyennes du déplacement obtenu par les méthodes de sous-structuration et par Monte Carlo sont identiques et peu influencées par les valeurs de l'écart type de la raideur et de la masse. Par contre l'accroissement de la variance de ces paramètres fait augmenter l'erreur entre les écarts types donné par les différentes méthodes. L'examen de la figure 7 montre que l'erreur entre les résultats obtenus par les méthodes de sous-structuration et ceux par Monte Carlo n'augmentent pas avec le temps.

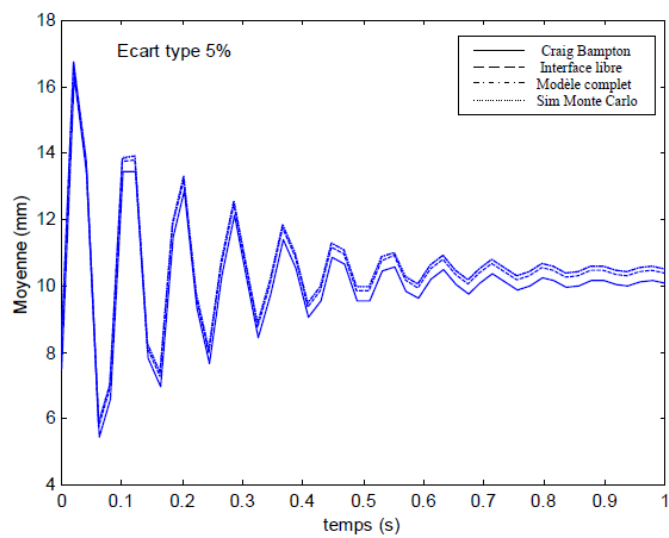


Fig. 2 – Moyenne du déplacement de la masse  $m_{11}$  pour un écart type de 5%

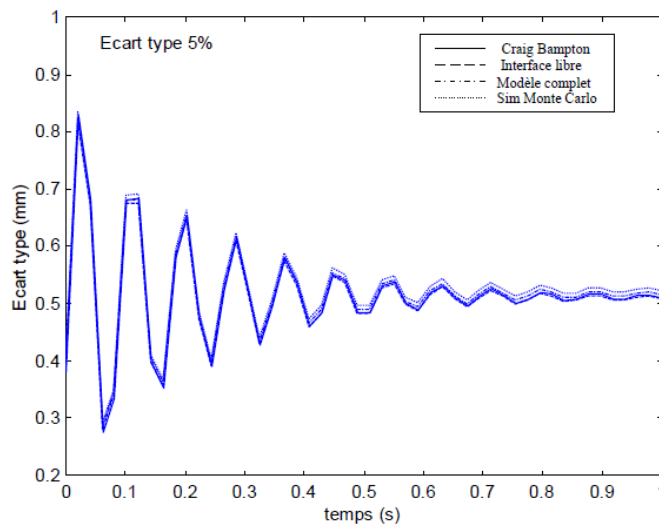
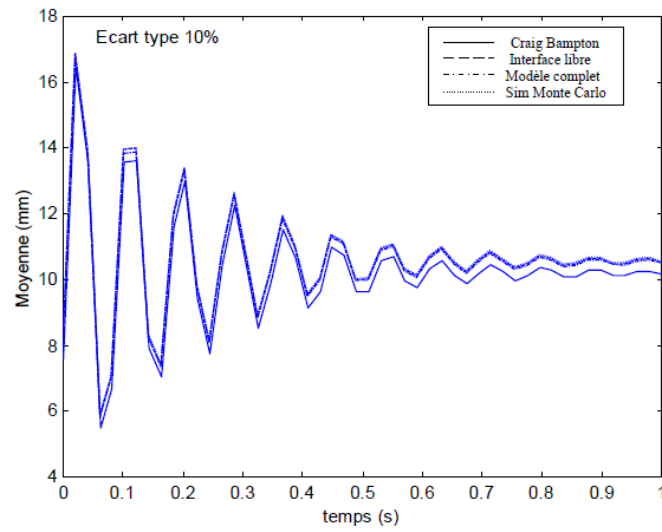
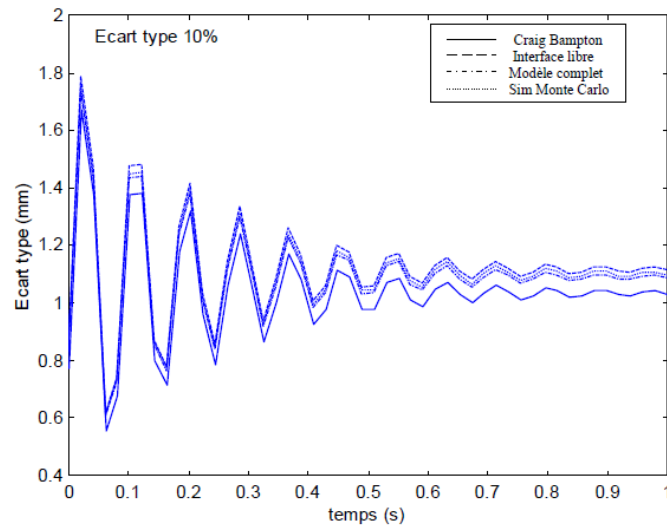


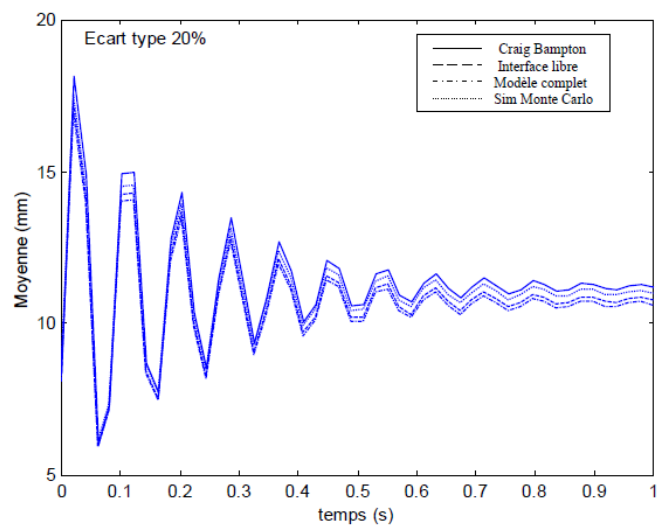
Fig. 3 – Ecart type du déplacement de la masse  $m_{11}$  pour un écart type de 5%



*Fig. 4 – Moyenne du déplacement de la masse  $m_{11}$  pour un écart type de 10%*



*Fig. 5 – Ecart type du déplacement de la masse  $m_{11}$  pour un écart type de 10%*



*Fig. 6 – Moyenne du déplacement de la masse  $m_{11}$  pour un écart type de 20%*

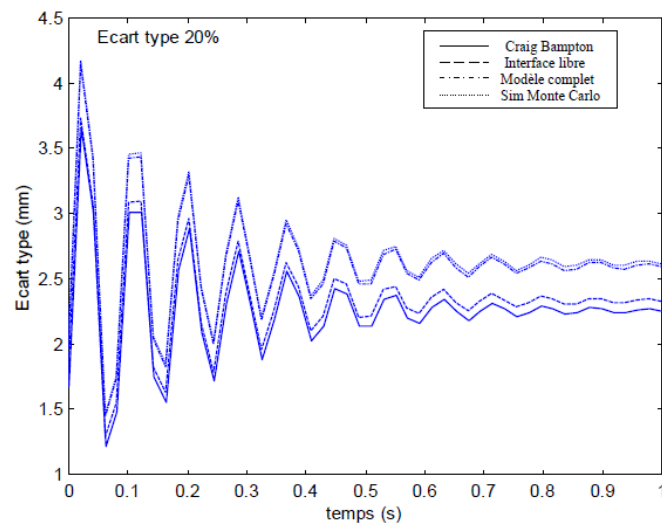


Fig. 7 – Ecart type du déplacement de la masse  $m_{11}$  pour un écart type de 20%

#### 4.2 Exemple 2 : Portique bidimensionnel

L'exemple considéré est un portique bidimensionnel (figure 8) en vibration libre dans le plan (OXY). On le divise en deux sous-structures  $SS^{(1)}$  et  $SS^{(2)}$  discrétisées séparément par des éléments de poutres 2D (3 d.d.l par nœud  $U_x, U_y, \theta_z$ ). Le modèle de la structure complète a 204 d.d.l actifs (210 d.d.l dont 6 encastrés) répartis en 117 d.d.l internes de  $SS^{(1)}$ , 81 d.d.l internes de  $SS^{(2)}$  et 6 d.d.l de jonction.

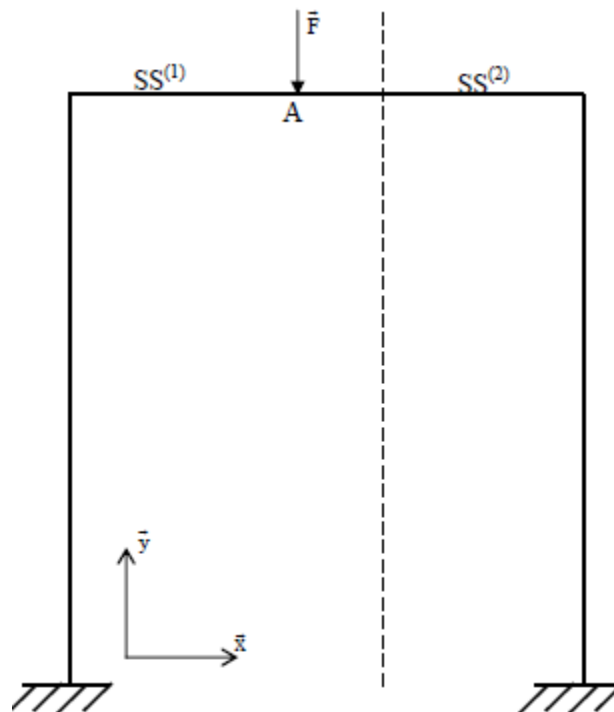


Fig. 8 – Portique bidimensionnel

Les différentes méthodes de sous-structuration dynamique à interfaces libres ou à interfaces fixes ont été utilisées. Le problème initial à 204 d.d.l est ramené à un problème condensé de taille 39, répartis en 6 d.d.l de jonction 19 modes à interfaces libres ou interface bloquées selon la méthode utilisée de SS<sup>(1)</sup> et 14 modes pour SS<sup>(2)</sup>. Le nombre de degrés de liberté est relativement important, de façon à montrer que l'utilisation des méthodes de sous-structuration permettra de traiter des cas réalistes.

Nous déterminons la réponse du portique soumis à une force verticale appliquée sur un nœud en déterminant le déplacement vertical du nœud A.

Pour l'analyse stochastique nous supposons que le module de Young E et la densité ρ sont aléatoires, et suivent des lois normales.

Les figures 9 et 10 représentent la moyenne et l'écart type du déplacement vertical du nœud 30 pour une force verticale  $F=400\sin(90t)$  sur le même nœud pour des variations de 10% du module de Young E et de la densité ρ

Les méthodes de sous-structuration sont appliquées et donnent des résultats précis en comparaison avec une simulation de Monte Carlo à 1000 tirages sur le système complet avec un rapport de temps de calcul considérable. Ces méthodes permettent la résolution la plus économique de grands problèmes avec une précision satisfaisante.

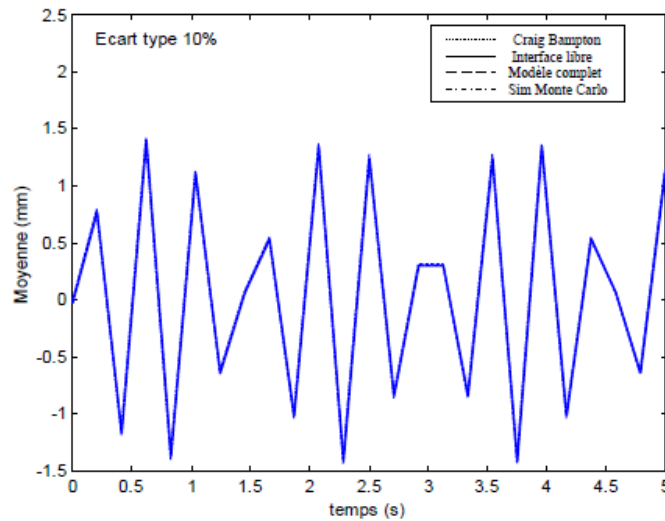


Fig. 9– Moyenne du déplacement vertical du nœud A pour un écart type de 10%

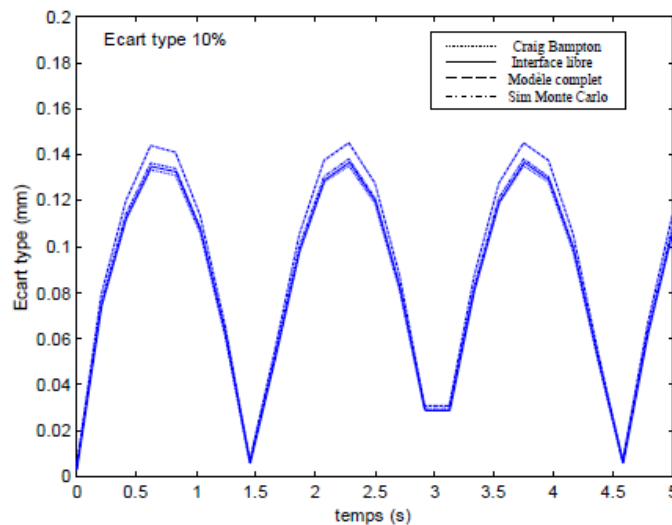


Fig. 10 – Ecart type du déplacement vertical du nœud 30 pour un écart type de 10%

## 5 Conclusion

Les méthodes de synthèse modale constituent une stratégie efficace pour l'analyse dynamique des structures complexes. Les méthodes de sous-structuration à interfaces fixes ou libres ont été appliquées pour l'analyse des systèmes réels à paramètres aléatoires. Ces méthodes ont été couplées au développement de Neumann pour déterminer les deux premiers moments de la réponse dynamique des systèmes comportant des variables incertaines. Une comparaison avec des simulations directe de Monte Carlo a montré que l'utilisation de ces méthodes donne de très bons résultats, quasiment identiques à ceux d'une simulation de Monte Carlo. Le rapport de temps entre le calcul par les méthodes de sous-structuration et le modèle complet est important, cela rend l'application des méthodes de réduction du modèle par sous-structuration très attractive et particulièrement pour les structures larges et complexes.

## REFERENCES

- [1]- R.R. Craig, M.C.C. Bampton, Coupling of substructures for dynamics analysis. *AIAA J.* 6(7) (1968) 1313-1319.
- [2]- R.H. MacNeal, A hybrid method of component mode synthesis, *Comput. Struct.* 1(1971) 581-601.
- [3]- D.M. Tran, Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry, *Comput. Struct.* 79(1) (2001) 209-222.
- [4]- M. Shinozuka, Monte Carlo solution of structural dynamics, *Comput. Struct.* 2(1972) 855- 874.
- [5]- M. Kleiber, T.D. Hien, *The stochastic finite element method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*, Ed. Jhon Wiley, 1992.
- [6]- G. Muscolino, G. Ricciardi, N. Impollonia, Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input, *Prob. Eng. Mech.* 15(2) (2000) 199-212.
- [7]- R. Li, R. Ghanem, Adaptive polynomial chaos expansions applied to statistics of extremes in non-linear random vibration. *Prob. Eng. Mech.* 13(1998) 125-136.
- [8]- M.D. Shields, G. Deodatis, Estimation of evolutionary spectra for simulation of non-stationary and non-Gaussian stochastic processes. *Comput. struct.* 126(2013) 149-163.
- [9]- L. Zhao, Q. Chen, Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation, *Comput. Struct.* 77(6) (2000) 651-657.
- [10]- G. Stefanou, The stochastic finite element method: Past, present and future. *Comput. Meth. App. Mech. Eng.* 198(2009) 1031-1051.
- [11]- G.I. Schuëller, H.J. Pradlwarter, Uncertain linear systems in dynamics: Retrospective and recent developments by stochastic approaches. *Eng. Struct.* 31(11) (2009) 2507-2517.
- [12]- D. Sarsri, L. Azrar, A. Jebbouri, A. El Hami, Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear FE models. *Comput. Struct.* 89(2011) 346-356.
- [13]- L. Hinke, F. Dohnal, B.R. Mace, T.P. Waters, N.S. Ferguson, Component mode synthesis as a framework for uncertainty analysis. *J. Sound Vib.* 324(2009) 161–178.