# SINCRONIZAREA COMPLETĂ A REȚELELOR CU STRUCTURĂ DE STEA

*V.M. Ungureanu*,
*Universitatea Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*

***REZUMAT:*** *În acest articol este considerată o clasă de rețele cu structură de stea, în care transferul informației între nodurile rețelei depinde de un proces Markov. Proprietatea de sincronizare a acestor rețele este studiată folosind rezultate din teoria stabilității sistemelor liniare.*

***Cuvinte cheie:*** rețea cu structură stea, nod de rețea, teoria stabilității

## 1. INTRODUCERE

În ultimii ani problema sincronizării rețelelor complexe ce modelează sisteme dinamice s-a bucurat de o mare atenție din partea comunității științifice. În prezentul articol, vom studia această problemă pentru o clasă de rețele stocastice cu structură de stea. Bazându-ne pe teoria stabilității sistemelor liniare, am stabilit condiții suficiente pentru sincronizarea unei clase de sisteme neliniare asociate rețelei stocastice investigate. Modelul de rețea discutat în lucrare este inspirat de articolele [2] şi [3].

În general, o rețea este o mulțime de unități (colonii, unități neuronale, etc.) $\ldots, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, $n \in \mathbf{N}^*$ între care există schimb de informații şi ale căror valori depind de timpul *t*. ($\mathbf{N}^*$ este mulțimea numerelor naturale nenule.) Pentru a arăta această dependență de timp vom folosi notația $u_i^{(t)}$ pentru valoarea unității *i* a rețelei la momentul *t*, unde *t* se presupune că ia doar valori naturale. Unitățile rețelei interacționează într-o manieră dată, astfel că valorile acestora se schimbă după o formulă de tipul $u^{(t+1)} = G(u^{(t)}, t)$, unde $u^{(t)}$ este vectorul $\left(\ldots, u_1^{(t)}, \ldots, u_n^{(t)}, \ldots\right)^T$ ($^T$ desemnează transpoziția), iar *G* este o funcție. Este clar

# COMPLETE SYNCHRONIZATION OF STOCHASTIC STAR SHAPED NETWORKS

***V.M. Ungureanu,***
*Constantin Brâncuşi University, Tg-Jiu, ROMANIA*

***ABSTRACT****: In this paper we consider a class of stochastic networks with star structure, in which the flow of information depends on a Markov chain. We investigate the synchronization of the stochastic star shaped networks by using linear stability analysis approach.*

***Keywords:*** star shaped structure, network node, stability theory

## 1. INTRODUCTION

The synchronization problem of complex networks for dynamical systems has received a great deal of attention in the last years. In this paper we study this problem for a class of stochastic star-shaped networks. Based on linear stability theory, we establish sufficient conditions for the synchronization property of the investigated non-linear systems. The network model discussed in this paper is inspired by papers [2] and [3].

Generally a network is a set of compartments (patches, colonies, neural units, etc.) $\ldots, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, $n \in \mathbf{N}^*$ which values depend on the time period it is in. ($\mathbf{N}^*$ denotes the set of all positive integers.) We will denote the state value by $u_i^{(t)}$ where t is a nonnegative integer.

The network's units can interact in given manner and their values change according to the following formula

$$u^{(t+1)} = G(u^{(t)}, t).$$

Here $u^{(t)}$ is the vector $\left(\ldots, u_1^{(t)}, \ldots, u_n^{(t)}, \ldots\right)^T$ ($^T$ denotes the transposition) and *G* is an appropriate function. It is clear that, given an că, dată fiind distribuția inițială $u^{(0)}$ a valorilor unităților rețelei, putem determina $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ... $u^{(t)}$,... din ecuația de mai sus. Pentru *t* suficient de mare este posibil ca o submulțime $u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_k}$ a unităților rețelei (sau chiar toate unitățile) să conțină informații similare la acelaşi moment *t*. Mai precis este posibil ca $\lim_{t\to\infty} \left| u_i^{(t)} - u_j^{(t)} \right| = 0$, pentru toți $i, j \in \{i_1, ... i_k\}, i \neq j$ (or $i, j \in \{1, ..., N\}, i \neq j$ ). În acest caz vom spune că $u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_k}$ (respectiv $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ ) sunt complet sincronizați, în mod determinist.

Aşa cum am spus mai sus, în cele ce urmează vom considera un model de rețea cu structură de stea care combină modelele de rețele utilizate în [2] şi [3]. În [2] sunt studiate rețele ce constau în *n* unități $u_1, u_2, ..., u_n$ dispuse în sens direct, în vârfurile unui poligon regulat cu *n* laturi astfel încât fiecare unitate interacționează doar cu vecinii săi direcți.

Acum considerăm o rețea similară, în care fiecare unitate $u_i$, $i \in \{1,..,n\}$este nodul central al unei rețea în formă de stea. O rețea în formă de stea este o rețea cu $N \in N^*$ noduri $v_1$, $v_2$, ...,$v_N$, în care nodul $v_N$ este centrul rețelei şi toate celelalte noduri $v_1$, $v_2$, ...,$v_{N-1}$ sunt conectate doar la nodul centru $v_N$, fără a exista o altă conexiune între ele [3] (Fig. 1).

Pentru a nu complica expunerea, în această lucrare vom presupune că rețeaua are 6 noduri centru $u_1$, $u_2$, ...,$u_6$ dispuse în sens direct în vârfurile unui hexagon regulat, fiecare nod central $u_i$ având ataşat 2 noduri diferite $v_{i1}$ şi $v_{i2}$ . Mai mult, vom presupune că oricare două noduri centru nu au conexiune cu un nod non-centru comun. Informația conținută de nodurile rețelei la momentul *t* va fi notată $v_{ij}^{(t)}, u_i^{(t)}, i \in \{1,..,n\}, j \in \{1,2\}$.

Trebuie menționat că rezultatele din lucrare pot fi extinse cu uşurință la rețele cu structură de stea în care există *n* noduri centru, fiecare fiind conectat la alte N-1 noduri non-centru.

initial distribution $u^{(0)}$, we may find $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ... $u^{(t)}$,... from the above equation. For *t* sufficiently large it is possible that a subset $u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_k}$ of the networks units (or all of them) contain a similar information at each time period *t*. More precisely it is possible that

$$\lim_{t\to\infty} \left| u_i^{(t)} - u_j^{(t)} \right| = 0,$$

for all $i, j \in \{i_1, ... i_k\}, i \neq j$ (or $i, j \in \{1, ..., N\}, i \neq j$ ). In this case we will say that $u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_k}$ (respectively $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ ) are complete synchronized in a deterministic manner.

In what follows we will consider a network model based on star shaped networks. In fact our model combines the ones in [2] and [3].

In [2] we studied some networks consisting of *n* units $u_1, u_2, ..., u_n$ placed in a clockwise manner on the vertices of a regular n- gon so that each unit interacts with its two immediate neighbors.

Now we consider a similar network where and each unit $u_i, i \in \{1,..,n\}$ is the center node of a star shaped network. By a star shaped network we mean a network with $N \in \mathbf{N}^*$ nodes, $v_1$, $v_2$, ...,$v_N$, in which the node $v_N$ is called the center of the network and all the others nodes $v_1$, $v_2$, ...,$v_{N-1}$ have connections to the center node, but they have no connections among themselves [3](see Fig. 1).

For the sake of simplicity, in this paper we will assume that we have 6 center nodes $u_1$, $u_2$, ...,$u_6$ placed in a clockwise manner and each center node $u_i$ has 2 different non-center nodes, $v_{i1}$, $v_{i2}$ attached to it. Moreover, we assume that any two center nodes have no connections to a common non-center node. The information contained by a node of the network at the time period *t* will be denoted by $v_{ij}^{(t)}, u_i^{(t)}, i \in \{1,..,n\}, j \in \{1,2\}$.

Clearly the results of this paper can be easily extended to the case of star shaped networks with *n* center nodes, each of then being

Având în vedere modelele matematice ale rețelelor din [2] şi [3], vom considera următoarele ecuații de evoluție ale rețelei

(1)

$$
\begin{aligned}
u_1^{(t+1)} &= f\left(t,u_1^{(t)}\right)+a(t,r(t))\left(f\left(t,u_6^{(t)}\right)-2f\left(t,u_1^{(t)}\right)+f\left(t,u_2^{(t)}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}a(t,r(t))[f\left(t,u_1^{(t)}\right)-f\left(t,v_{1i}^{(t)}\right)]\\
u_2^{(t+1)} &= f\left(t,u_2^{(t)}\right)+a(t,r(t))\left(f\left(t,u_1^{(t)}\right)-2f\left(t,u_2^{(t)}\right)+f\left(t,u_3^{(t)}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}a(t,r(t))[f\left(t,u_2^{(t)}\right)-f\left(t,v_{2i}^{(t)}\right)],\\
&\ldots=\ldots\\
u_6^{(t+1)} &= f\left(t,u_6^{(t)}\right)+a(t,r(t))\left(f\left(t,u_5^{(t)}\right)-2f\left(t,u_6^{(t)}\right)+f\left(t,u_1^{(t)}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}a(t,r(t))[f\left(t,u_6^{(t)}\right)-f\left(t,v_{6i}^{(t)}\right)].\\
v_{11}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{11}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_1^{(t)}\right)-f\left(t,v_{11}^{(t)}\right)]\\
v_{12}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{12}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_1^{(t)}\right)-f\left(t,v_{12}^{(t)}\right)]\\
&..=..\\
v_{61}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{61}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_6^{(t)}\right)-f\left(t,v_{61}^{(t)}\right)]\\
v_{62}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{62}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_6^{(t)}\right)-f\left(t,v_{62}^{(t)}\right)]
\end{aligned}
$$

unde funcția de difuzie $a(t,r(t))$, dependentă de momentul *t* în care se află sistemul, are fluctuații stocastice determinate de un proces Markov r(t) .

Presupunem că sunt îndeplinite următoarele ipoteze:

(*H1*) $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$ este un lanț Markov omogen cu spațiul stărilor Z (mulțimea întregilor), spațiul timpului N şi matricea infinite de tranziție $Q = (q_{ij})$ definită de

$q_{ij} = P\{r(t+1) = j \mid r(t) = i\}$;

(H2) Matricea de tranziție $Q = (q_{ij})$ satisface condiția $q_{ij} = 0$, $j \in \mathbf{Z} \setminus \{i-m_0,...,i,...,i+m_0\}$, unde $m_0 \in \mathbf{N}^*$ este un număr dat.

(H3) Pentru fiecare $t \in \mathbf{N}$, $\{a(t,i)\}_{i\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ este mărginită;

(H4) $f : N \times R \to R$ este o funcție Lipschitz ce satisface condiție $|f(t, u) - f(t, v)| \le \Gamma(t)|u - v|$, $u, v \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{N}$ pentru o anumită funcție pozitivă $\Gamma : \mathbf{N} \to (0,\infty)$.

connected to N-1 non center nodes. Following [2] and [3], the evolution equations of our stochastic network can be written as

(1)

$$
\begin{aligned}
u_1^{(t+1)} &= f\left(t,u_1^{(t)}\right)+a(t,r(t))\left(f\left(t,u_6^{(t)}\right)-2f\left(t,u_1^{(t)}\right)+f\left(t,u_2^{(t)}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}a(t,r(t))[f\left(t,u_1^{(t)}\right)-f\left(t,v_{1i}^{(t)}\right)]\\
u_2^{(t+1)} &= f\left(t,u_2^{(t)}\right)+a(t,r(t))\left(f\left(t,u_1^{(t)}\right)-2f\left(t,u_2^{(t)}\right)+f\left(t,u_3^{(t)}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}a(t,r(t))[f\left(t,u_2^{(t)}\right)-f\left(t,v_{2i}^{(t)}\right)],\\
&\ldots=\ldots\\
u_6^{(t+1)} &= f\left(t,u_6^{(t)}\right)+a(t,r(t))\left(f\left(t,u_5^{(t)}\right)-2f\left(t,u_6^{(t)}\right)+f\left(t,u_1^{(t)}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{2}a(t,r(t))[f\left(t,u_6^{(t)}\right)-f\left(t,v_{6i}^{(t)}\right)].\\
v_{11}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{11}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_1^{(t)}\right)-f\left(t,v_{11}^{(t)}\right)]\\
v_{12}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{12}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_1^{(t)}\right)-f\left(t,v_{12}^{(t)}\right)]\\
&..=..\\
v_{61}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{61}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_6^{(t)}\right)-f\left(t,v_{61}^{(t)}\right)]\\
v_{62}^{(t+1)} &= f\left(t,v_{62}^{(t)}\right)+a(t,r(t))[f\left(t,u_6^{(t)}\right)-f\left(t,v_{62}^{(t)}\right)]
\end{aligned}
$$

where $a(t,r(t))$, the diffusion function, has randomly fluctuations and depends on the time period *t* and on a Markov process r(t) .

We also assume that the following hypotheses are satisfied:

(H1) $\{r(t)\}_{t=0}^{\infty}$ is a homogeneous Markov chain with the state space Z (the set of integers), the time space N (the set of all nonnegative integers) and the infinite transition matrix *Q* = $(q_{ij})$ defined by $q_{ij} = P\{r(t+1) = j \mid r(t) = i\}$;

(H2) The transition matrix $Q = (q_{ij})$ satisfies the condition $q_{ij} = 0$ for $j \in \mathbf{Z} \setminus \{i-m_0,...,i,...,i+m_0\}$, where $m_0 \in \mathbf{N}^*$ is a given number.

(H3) For each $t \in \mathbf{N}$, $\{a(t,i)\}_{i\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ is bounded;

(H4) $f : N \times R \to R$ is a Lipschitz function which satisfying

## 2. SINCRONIZAREA ÎN MEDIE PĂTRATICĂ CONDIȚIONATĂ

Fie $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ un spațiu de probabilitate. Dacă $\xi$ este o variabilă aleatoare, atunci vom nota cu $E(\xi)$ media lui $\xi$. Pentru orice $\sigma$ algebră $\mathbf{G}$ de submulțimi ale lui $\mathbf{F}$, $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$, vom nota prin $E[\xi \mid \mathbf{G}]$ media condiționată a lui $\xi$ în raport cu $\mathbf{G}$. Dacă $\mathbf{G}_\eta$ este $\sigma$-algebra generată de variabila aleatoare $\eta$, atunci vom folosi notația $E[\xi \mid \eta]$ pentru media condiționată a lui $\xi$ în raport cu $\mathbf{G}_\eta$. Reamintim că $E[\xi \mid \eta = x]$, media condiționată de evenimentul $\eta = x$, este definită astfel:

$$E[\xi \mid \eta = x] = \frac{1}{P\{\eta(\omega) = x\}} \int \chi_{\{\eta(\omega)=x\}} \xi(\omega) P(d\omega),$$

dacă $P\{\omega \mid \eta(\omega) = x\} > 0$ şi $E[\xi \mid \eta = x] = 0$, dacă $P\{\omega \mid \eta(\omega) = x\} = 0$.

Presupunem că ipotezele (H1) şi (H2) sunt îndeplinite. Notăm $v^{(t)} = (v_{11}^{(t)}, v_{12}^{(t)},.., v_{61}^{(t)}, v_{62}^{(t)})^T$ (vezi sistemul (1)). Date fiind $x \in \mathbf{R}^{18}, x = (x_1,.., x_6,..., x_{18})^T$ şi $k \in \mathbf{N}$, sistemul (1) cu condiția inițială

(2)

$$u^{(k)} = \left(u_1^{(k)},..., u_n^{(k)}\right)^T = (x_1,.., x_6)^T, v^{(k)} = = (x_7, x_8, x_9,..., x_{18})^T$$

va genera şirul $\{u^{(t)}, v^{(t)}\}_{t \ge k}$. Acest şir se numeşte soluția sistemului (1), (2).

DEFINIȚIA 1. Dacă pentru orice $l \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$ şi $x \in \mathbf{R}^{18}$, componentele $u_i = \{u_i^{(t)}\}_{t \ge k}$ şi $v_{ij} = \{v_{ij}^{(t)}\}_{t \ge k}$ ale soluției $\{u^{(t)}, v^{(t)}\}_{t \ge k}$ a sistemului (1), (2) satisface

$$\lim_{t \to \infty} E\left[\left|u_i^{(t)} - u_j^{(t)}\right|^2 \mid r(k) = l\right] = 0,$$
$$\lim_{t \to \infty} E\left[\left|v_{jl}^{(t)} - v_{il}^{(t)}\right|^2 \mid r(k) = l\right] = 0, l = 1,2,$$

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le \Gamma(t)|u - v|, \quad u, v \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{N}$$

for some positive function $\Gamma : \mathbf{N} \to (0, \infty)$.

## 2. CONDITIONAL MEAN SQUARE ERROR SYNCHRONIZATION

Let $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ be a probability space. If $\xi$ is a random variable then we will denote by $E(\xi)$ the expectation (mean) of $\xi$. For any $\sigma$ algebra $\mathbf{G}$ of subsets of $\mathbf{F}$, $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$, we denote by $E[\xi \mid \mathbf{G}]$ the conditional expectation (mean) of $\xi$ with respect to $\mathbf{G}$. If $\mathbf{G}_\eta$ is the $\sigma$-algebra generated by the random variable $\eta$, then we also use the notation $E[\xi \mid \eta]$ for the conditional expectation of $\xi$ with respect to $\mathbf{G}_\eta$. We recall that $E[\xi \mid \eta = x]$, the conditional expectation on the event $\eta = x$, is defined as it follows:

$$E[\xi \mid \eta = x] = \frac{1}{P\{\eta(\omega) = x\}} \int \chi_{\{\eta(\omega)=x\}} \xi(\omega) P(d\omega),$$

if $P\{\omega \mid \eta(\omega) = x\} > 0$ and $E[\xi \mid \eta = x] = 0$, if $P\{\omega \mid \eta(\omega) = x\} = 0$.

Assume that (H1) and (H2) hold. Let us denote $v^{(t)} = (v_{11}^{(t)}, v_{12}^{(t)},.., v_{61}^{(t)}, v_{62}^{(t)})^T$ (see (1)). Given $x \in \mathbf{R}^{18}, x = (x_1,.., x_6,..., x_{18})^T$ and $k \in \mathbf{N}$ the system (1) with the initial condition

(2)

$$u^{(k)} = \left(u_1^{(k)},..., u_n^{(k)}\right)^T = (x_1,.., x_6)^T, v^{(k)} = = (x_7, x_8, x_9,..., x_{18})^T$$

will generate a sequence $\{u^{(t)}, v^{(t)}\}_{t \ge k}$. This sequence is called a solution of (1), (2).

DEFINITION 1 If for any $l \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$ and $x \in \mathbf{R}^{18}$, the components $u_i = \{u_i^{(t)}\}_{t \ge k}$ and $v_{ij} = \{v_{ij}^{(t)}\}_{t \ge k}$ of the solution $\{u^{(t)}, v^{(t)}\}_{t \ge k}$ of (1), (2) satisfy

Atunci vom spune că $u_i$ şi $u_j$ sunt complet sincronizate în medie condiționată.

Dacă $\Lambda$ este o submulțime a mulțimii $\{1,2,...,6\}$ şi $u_i$, $u_j$ sunt complet sincronizate sincronizate în medie condiționată pentru orice $i,j \in \Lambda$, atunci vom spune că sistemul (1), (2) este $\Lambda$ complet sincronizat în medie condiționată. Dacă $u_i$ şi $u_j$ sunt complet sincronizate în medie condiționată pentru $i,j \in \{1,2,...,6\}$, atunci vom spune că sistemul (1), (2) este complet sincronizat în medie condiționată.

## 3. COMPORTAREA ASIMPTOTICA A SISTEMELOR LINIARE DISCRETE CU CONDIȚIE FINALĂ

În această secțiune vom reaminti câteva rezultate importante din teoria stabilității sistemelor liniare discrete cu condiție finală impusă. Fie $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}^*$ spațiul Hilbert real dotat cu produsul scalar $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, $x = (x_1, x_2,..., x_n), y = (y_1, y_2,..., y_n), x, y \in \mathbf{R}^n$ şi norma $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Notăm cu $L(\mathbf{R}^n)$ spațiul Banach al tuturor operatorilor liniari şi mărginiți definiți pe $\mathbf{R}^n$, cu valori în $\mathbf{R}^n$ şi cu $SL(\mathbf{R}^n)$ subspațiul Banach al lui $L(\mathbf{R}^n)$ format din toți operatorii autoadjuncți. De asemenea $l^\infty_{SL(\mathbf{R}^n)}$ va reprezenta mulțimea şirurilor infinite $g = \{g_i\}_{i\in\mathbf{Z}}, g_i \in SL(\mathbf{R}^n)$ cu proprietatea $\|g\|_\infty = \sup_{i\in\mathbf{Z}}\|g_i\| < \infty$ . (Aici $\|.\|$ reprezintă norma elementelor lui $SL(\mathbf{R}^n)$). Este uşor de văzut că $l^\infty_{SL(\mathbf{R}^n)}$ este un spațiu liniar real cu operațiile uzuale de adunare pe componente şi respectiv de înmulțire cu scalari. În plus, $l^\infty_{SL(\mathbf{R}^n)}$ este spațiu Banach cu norma $\|.\|_\infty$. Spunem că elementul $M \in l^\infty_{SL(\mathbf{R}^n)}$ este pozitiv dacă operatorul liniar M(i) (componenta *i* a lui M) este pozitiv pentru orice $i \in Z$. Dacă notăm cu $I_n$ operatorul identic pe $\mathbf{R}^n$, atunci $\Phi$ este şirul infinit

$$\lim_{t\to\infty} E\left[\left|u_i^{(t)} - u_j^{(t)}\right|^2 \; |r(k) = l\right] = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} E\left[\left|v_{jl}^{(t)} - v_{il}^{(t)}\right|^2 \; |r(k) = l\right] = 0, l = 1,2,$$

then we will say that $u_i$ and $u_j$ are completely synchronized in conditional mean.

If $\Lambda$ is a subset of $\{1,2,...,6\}$ and $u_i$ and $u_j$ are completely synchronized in conditional mean for all $i,j \in \Lambda$, then we will say that system (1), (2) is $\Lambda$ - completely synchronized in conditional mean. If $u_i$ and $u_j$ are synchronized in conditional mean for all $i,j \in \{1,2,...,6\}$, then we will say that system (1), (2) is completely synchronized in conditional mean.

## 3. ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF BACKWARD LINEAR DISCRETE TIME SYSTEMS

We now recall an important result from the stability theory of linear backward discrete time systems. Let $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}^*$ be the well known Hilbert space endowed with the inner product $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, $x = (x_1, x_2,..., x_n), y = (y_1, y_2,..., y_n), x, y \in \mathbf{R}^n$ and the norm $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Then we will denote by $L(\mathbf{R}^n)$ the Banach space of all bounded linear operators on $\mathbf{R}^n$ and by $SL(\mathbf{R}^n)$ the Banach subspace of $L(\mathbf{R}^n)$ formed by all self adjoint operators.

Let $l^\infty_{SL(\mathbf{R}^n)}$ denotes the set of all infinite sequences $g = \{g_i\}_{i\in\mathbf{Z}}, g_i \in SL(\mathbf{R}^n)$ satisfying $\|g\|_\infty = \sup_{i\in\mathbf{Z}}\|g_i\| < \infty$ . (Here $\|.\|$ denotes the norms of the elements in $SL(\mathbf{R}^n)$). It is easy to see that $l^\infty_{SL(\mathbf{R}^n)}$ is a real linear space with the usual termwise addition and (real) scalar multiplication. Moreover, it is a Banach space with the norm $\|.\|_\infty$.

$(\ldots, I_n, .., I_n, \ldots) \in l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$.

Presupunem că (H1) - (H3) sunt îndeplinite. Fie $\{V_t\}_{t\in\mathbf{N}} \subset l^{\infty}_{L(\mathbf{R}^n)}$. Pentru orice $t \in \mathbf{N}$, introducem funcţia $\mathbf{V}_t : l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)} \to l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$,

$$\mathbf{V}_t(T)(i) = V_t^*(i) \sum_{j=i-m_0}^{i+m_0} q_{ij} T(j) V_t(i), T \in l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}, i \in \mathbf{Z}$$

unde $V_t(i)$ este componenta $i$ a şirului $V_t \in l^{\infty}_{L(\mathbf{R}^n)}$. Definim operatorul liniar T(t, k), t, k ∈N, t ≥ k astfel: $T(t,k) = \mathbf{V}_k \cdots \mathbf{V}_{t-1}, t > k, T(k,k) = I_{l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}}, k \in$ ], unde $I_{l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}}$ este operatorul identic pe $l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$. Reamintim că $\|T(t,k)\| = \sup_{\|S\|_\infty = 1, S \in l^{\infty}_{\mathbf{E}}} \|T(t,k)(S)\|_\infty$.

TEOREMA 1. [2] Următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) Există $\beta > 1$ şi $\alpha \in (0,1)$ astfel încât pentru toţi $t, k \in \mathbf{N}, t \geq k$, avem $\|T(t,k)\| \leq \beta\alpha^{t-k}$. b) Ecuaţia

(3) $\quad Z_t = \mathbf{V}_t(Z_{t+1}) + \Phi$,

are o soluţie unică $\{Z_t\}_{t\in\mathbf{N}}$, mărginită pe $\mathbf{N}$ şi uniform pozitivă, adică există $M > 0$, astfel încât (2) are o soluţie unică ce satisface relaţia $I_n \leq Z_t(i) \leq MI_n, t \in \mathbf{N}$ pentru toţi i ∈ Z.

## 4. CONDIŢII SUFICIENTE PENTRU SINCRONIZARE

Din (1) deducem cu uşurinţă că, pentru toţi $t \geq k$,

$$(u_1^{(t+1)} - u_5^{(t+1)}, u_2^{(t+1)} - u_4^{(t+1)}, v_{11}^{(t+1)} - v_{51}^{(t+1)}, v_{12}^{(t+1)} - v_{52}^{(t+1)}, v_{21}^{(t+1)} - v_{41}^{(t+1)}, v_{22}^{(t+1)} - v_{42}^{(t+1)})^T$$

(4) $\quad = A_1$(t, r(t))

The element $M \in l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$ is called positive if the linear operator M(i) is positive for all i∈ Z (Here M(i) is the $i$ -th component of M). We denote by $I_n$ the identity operator on $\mathbf{R}^n$ and by $\Phi$ the sequence $(\ldots, I_n, .., I_n, \ldots) \in l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$.

Assume that (H1) - (H3) hold. Let $\{V_t\}_{t\in\mathbf{N}} \subset l^{\infty}_{L(\mathbf{R}^n)}$. For any $t \in \mathbf{N}$, we introduce the function

$\mathbf{V}_t : l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)} \to l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$,

$$\mathbf{V}_t(T)(i) = V_t^*(i) \sum_{j=i-m_0}^{i+m_0} q_{ij} T(j) V_t(i), T \in l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}, i \in \mathbf{Z}$$

where $V_t(i)$ is the $i$ -th component of the sequence $V_t \in l^{\infty}_{L(\mathbf{R}^n)}$. Let us define the following linear operator T(t, k), t, k ∈N, t ≥ k:

$T(t,k) = \mathbf{V}_k \cdots \mathbf{V}_{t-1}, t > k, T(k,k) = I_{l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}}, k \in$ ],

where $I_{l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}}$ is the identity operator on $l^{\infty}_{SL(\mathbf{R}^n)}$.

We recall that $\|T(t,k)\| = \sup_{\|S\|_\infty = 1, S \in l^{\infty}_{\mathbf{E}}} \|T(t,k)(S)\|_\infty$. The following result is known (see [2]):

THEOREM 1. The following statements are equivalent: a) There exist $\beta > 1$ and $\alpha \in (0,1)$ such that for all $t, k \in \mathbf{N}, t \geq k$, we have $\|T(t,k)\| \leq \beta\alpha^{t-k}$. b) The equation

(3) $\quad Z_t = \mathbf{V}_t(Z_{t+1}) + \Phi$,

has a unique, bounded on $\mathbf{N}$ and uniformly positive solution $\{Z_t\}_{t\in\mathbf{N}}$, i.e. there exists $M > 0$, such that (2) has a unique solution which satisfies $I_n \leq Z_t(i) \leq MI_n, t \in \mathbf{N}$ for all i ∈ Z.

## 4. SUFFICIENT CONDITIONS FOR

$(f(t,u_1^{(t)})-f(t,u_5^{(t)}),f(t,u_2^{(t)})-f(t,u_4^{(t)}),f(t,v_{11}^{(t)})-f(t,v_{51}^{(t)}),$

$f(t,v_{12}^{(t)})-f(t,v_{52}^{(t)}),f(t,v_{21}^{(t)})-f(t,v_{41}^{(t)}),f(t,v_{22}^{(t)})-f(t,v_{42}^{(t)}))^T$
, unde

$$A(t,i)=$$
$$\begin{pmatrix} 1-4d(t,i) & d(t,i) & d(t,i) & d(t,i) & 0 & 0 \\ d(t,i) & 1-4d(t,i) & 0 & 0 & d(t,i) & d(t,i) \\ d(t,i) & 0 & 1-d(t,i) & 0 & 0 & 0 \\ d(t,i) & 0 & 0 & 1-d(t,i) & 0 & 0 \\ 0 & d(t,i) & 0 & 0 & 1-d(t,i) & 0 \\ 0 & d(t,i) & 0 & 0 & 0 & 1-d(t,i) \end{pmatrix}$$
$,t\in\mathbf{N}i\in\mathbf{Z}$

Distribuția inițială (la momentul *k*) a sistemului (4)-(2) este
$w=(x_1-x_5,x_2-x_4,x_7-x_{15},x_8-x_{16},$
$x_9-x_{13},x_{10}-x_{14})^T$
Evident sistemul (1) este `invariant' în raport cu numerotarea unităților sale. Raționând ca în [1], deducem că, efectuând nişte rotații, vectorii

(5) $(u_2^{(t)}-u_6^{(t)},u_3^{(t)}-u_5^{(t)},v_{21}^{(t)}-v_{61}^{(t)},$ $v_{22}^{(t)}-v_{62}^{(t)},v_{31}^{(t)}-v_{51}^{(t)},v_{32}^{(t)}-v_{52}^{(t)})$ şi

(6) $(u_3^{(t)}-u_1^{(t)},u_4^{(t)}-u_6^{(t)},v_{31}^{(t)}-v_{11}^{(t)},$ $v_{32}^{(t)}-v_{12}^{(t)},v_{41}^{(t)}-v_{61}^{(t)},v_{42}^{(t)}-v_{62}^{(t)})$

satisfac aceeaşi ecuație (4). Din acest motiv proprietățile asimptotice ale soluțiilor sistemului (4)-(2), rămân adevărate şi în cazul soluțiilor (5) şi (6).

Înainte de a formula rezultatele principale din această secțiune introducem câteva notații noi. Pentru orice $i\in\mathbf{Z}$ şi $t\in\mathbf{N}$, notăm cu $A(t,i)$ matricea $6\times 6$ definită de $[A(t,i)]_{p,q}=|[A_1(t,i)]_{p,q}|$, unde $[A_1(t,i)]_{p,q}$ este elementul de pe linia *p* şi coloana *q* a matricei $A_1(t,i)$. De asemenea $|w|=(|x_1-x_5|,|x_2-x_4|,|x_7-x_{15}|,$
$|x_8-x_{16}|,|x_9-x_{13}|,|x_{10}-x_{14}|)^T$ ,

U(t+1)=

**SYNCHRONIZATION**

From (1) we easily deduce that, for all $t\geq k$,

$(u_1^{(t+1)}-u_5^{(t+1)},u_2^{(t+1)}-u_4^{(t+1)},v_{11}^{(t+1)}-v_{51}^{(t+1)},$
$v_{12}^{(t+1)}-v_{52}^{(t+1)},v_{21}^{(t+1)}-v_{41}^{(t+1)},v_{22}^{(t+1)}-v_{42}^{(t+1)})^T$

(4) $= A_1(t,$
$r(t))$
$(f(t,u_1^{(t)})-f(t,u_5^{(t)}),f(t,u_2^{(t)})-f(t,u_4^{(t)}),f(t,v_{11}^{(t)})-f(t,v_{51}^{(t)}),$

$f(t,v_{12}^{(t)})-f(t,v_{52}^{(t)}),f(t,v_{21}^{(t)})-f(t,v_{41}^{(t)}),f(t,v_{22}^{(t)})-f(t,v_{42}^{(t)}))^T$
where
$$A(t,i)=$$
$$\begin{pmatrix} 1-4d(t,i) & d(t,i) & d(t,i) & d(t,i) & 0 & 0 \\ d(t,i) & 1-4d(t,i) & 0 & 0 & d(t,i) & d(t,i) \\ d(t,i) & 0 & 1-d(t,i) & 0 & 0 & 0 \\ d(t,i) & 0 & 0 & 1-d(t,i) & 0 & 0 \\ 0 & d(t,i) & 0 & 0 & 1-d(t,i) & 0 \\ 0 & d(t,i) & 0 & 0 & 0 & 1-d(t,i) \end{pmatrix}$$
$,t\in\mathbf{N}i\in\mathbf{Z}$

The initial distribution (at the time period *k*) of (4)-(2) is
$w=(x_1-x_5,x_2-x_4,x_7-x_{15},x_8-x_{16},$
$x_9-x_{13},x_{10}-x_{14})^T$
Obviously system (1) is `invariant' with respect to the numeration of its units. Therefore, arguing as in [1], we deduce that, after some rotations,

(5) $(u_2^{(t)}-u_6^{(t)},u_3^{(t)}-u_5^{(t)},v_{21}^{(t)}-v_{61}^{(t)},$ $v_{22}^{(t)}-v_{62}^{(t)},v_{31}^{(t)}-v_{51}^{(t)},v_{32}^{(t)}-v_{52}^{(t)})$ and

(6) $(u_3^{(t)}-u_1^{(t)},u_4^{(t)}-u_6^{(t)},v_{31}^{(t)}-v_{11}^{(t)},$ $v_{32}^{(t)}-v_{12}^{(t)},v_{41}^{(t)}-v_{61}^{(t)},v_{42}^{(t)}-v_{62}^{(t)})$

will satisfy the same equation (4). For this reason the asymptotic properties of the solutions of (4)-(2), remain true for (5) and (6).

Before giving the main results of this section we adopt some new notations. For

$(|u_1^{(t+1)}-u_5^{(t+1)}|,|u_2^{(t+1)}-u_4^{(t+1)}|,|v_{11}^{(t+1)}-v_{51}^{(t+1)}|$
$,|v_{12}^{(t+1)}-v_{52}^{(t+1)}|,|v_{21}^{(t+1)}-v_{41}^{(t+1)}|,|v_{22}^{(t+1)}-v_{42}^{(t+1)}|)^T$,
$F(t,U(t))=(|f(t,u_1^{(t)})-f(t,u_5^{(t)})|,$
$|f(t,u_2^{(t)})-f(t,u_4^{(t)})|,|f(t,v_{11}^{(t)})-f(t,v_{51}^{(t)})|,|f(t,v_{12}^{(t)})-f(t,v_{52}^{(t)})|$
$|f(t,v_{21}^{(t)})-f(t,v_{41}^{(t)})|,|f(t,v_{22}^{(t)})-f(t,v_{42}^{(t)})|).$

Trecând la modul în (4) şi ţinând cont de (H4), obţinem $U(t+1)\le A(t,r(t))F(t,U(t))\le\Gamma(t)U(t)$ pentru toţi $t\in\mathbf{N}$. Acum introducem funcţia $\mathbf{L}_t : l^\infty_{SL(\mathbf{R}^6)}\to l^\infty_{SL(\mathbf{R}^6)}$ definită prin

$$(\mathbf{L}_t h)(i)=\Gamma(t)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}q_{i,j}A^*(t,i)h(j)A(t,i),\ i\in\mathbf{Z}, h\in l^\infty_{SL(\mathbf{R}^6)}.$$

TEOREMA 2. Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile (H1)-(H4). Dacă $(u,v)=\{u^{(t)},v^{(t)}\}_{t\ge k}$ este soluţia sistemului (1), (2) şi U, $|w|$ sunt definite ca mai sus, atunci pentru orice $l\in Z$, $k\in N$ şi $x\in R^{18}$ avem
$$E\left[\|U(t+1)\|^2 \mid r(k)=l\right]\le\left\langle \mathbf{L}_k\cdots\mathbf{L}_{t-1}\mathbf{L}_t(\Phi)(l)|w|,|w|\right\rangle.$$

TEOREMA 3. Presupunem că sunt îndeplinite ipotezele teoremei de mai sus. Dacă există o unică soluţie $\{Z_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ mărginită pe N şi uniform pozitivă a ecuaţiei $Z_t=\mathbf{L}_t Z_{t+1}+\Phi$, atunci există $\beta>1,\alpha\in(0,1)$ astfel încât pentru toţi $l\in Z$, $x\in R^{18}$ şi t, $k\in N$, $t\ge k$ să avem $E\left[\|U(t)\|^2\mid r(k)=l\right]\le\beta\alpha^{t-k}\|w\|^2$.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că există o unică soluţie $\{Z_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ mărginită pe N şi uniform pozitivă a ecuaţiei (3). Luând *n = 6*, $V_t(i)=A(t,i)$, $i\in Z$, $t\in N$ şi $\mathbf{V}_t=\mathbf{L}_t, t\in\mathbf{N}$ în Teorema 1, avem
$$\left\langle \mathbf{L}_k\cdots\mathbf{L}_{t-1}\mathbf{L}_{t-1}(\Phi)(l)|w|,|w|\right\rangle=$$
$$=\left\langle T(t,k)(\Phi)(l)|w|,|w|\right\rangle\le$$
$$\le\|T(t,k)(\Phi)\|_\infty\|w\|^2\le\|T(t,k)\|\|w\|^2$$
$\le\beta\alpha^{t-k}\|w\|^2$ pentru toţi $l\in\mathbf{Z}$. Concluzia

any $i\in\mathbf{Z}$ and $t\in\mathbf{N}$, we will denote by $A(t,i)$ the $6\times 6$ matrix defined by $[A(t,i)]_{p,q}=|[A_1(t,i)]_{p,q}|, p,q\in\{1,..,6\}$, where $[A_1(t,i)]_{p,q}$ is the element on line *p* and column *q* of the matrix $A_1(t,i)$. Also $|w|=(|x_1-x_5|,|x_2-x_4|,|x_7-x_{15}|,$
$|x_8-x_{16}|,|x_9-x_{13}|,|x_{10}-x_{14}|)^T$ ,

U(t+1)=
$(|u_1^{(t+1)}-u_5^{(t+1)}|,|u_2^{(t+1)}-u_4^{(t+1)}|,|v_{11}^{(t+1)}-v_{51}^{(t+1)}|$
$,|v_{12}^{(t+1)}-v_{52}^{(t+1)}|,|v_{21}^{(t+1)}-v_{41}^{(t+1)}|,|v_{22}^{(t+1)}-v_{42}^{(t+1)}|)^T$
$F(t,U(t))=(|f(t,u_1^{(t)})-f(t,u_5^{(t)})|,$
$|f(t,u_2^{(t)})-f(t,u_4^{(t)})|,|f(t,v_{11}^{(t)})-f(t,v_{51}^{(t)})|,|f(t,v_{12}^{(t)})-f(t,v_{52}^{(t)})|$
$|f(t,v_{21}^{(t)})-f(t,v_{41}^{(t)})|,|f(t,v_{22}^{(t)})-f(t,v_{42}^{(t)})|).$

Passing to modulus in (4) and taking into account (H4), we get $U(t+1)\le A(t,r(t))F(t,U(t))\le\Gamma(t)U(t)$, $t\in\mathbf{N}$. Now, let us consider the mapping $\mathbf{L}_t : l^\infty_{SL(\mathbf{R}^6)}\to l^\infty_{SL(\mathbf{R}^6)}$,

$$(\mathbf{L}_t h)(i)=\Gamma(t)^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}q_{i,j}A^*(t,i)h(j)A(t,i),\ i\in\mathbf{Z}, h\in l^\infty_{SL(\mathbf{R}^6)}.$$

THEOREM 2.(see [2] for a similar result)Assume that (H1)-(H4) hold. If $(u,v)=\{u^{(t)},v^{(t)}\}_{t\ge k}$ is the solution of (1), (2) and $U,|w|$ are defined as above, then for all $l\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{N}$ and $x\in R^{18}$,
$$E\left[\|U(t+1)\|^2 \mid r(k)=l\right]\le\left\langle \mathbf{L}_k\cdots\mathbf{L}_{t-1}\mathbf{L}_t(\Phi)(l)|w|,|w|\right\rangle.$$

THEOREM 3. Assume that the hypotheses of the above theorem hold. If there exists a unique uniformly positive and bounded on **N** solution $\{Z_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ of the equation $Z_t=\mathbf{L}_t Z_{t+1}+\Phi$,

then there exist $\beta>1,\alpha\in(0,1)$ such that for all $l\in\mathbf{Z}, x\in R^{18}$ and $t,k\in\mathbf{N}$, $t\ge k$, $E\left[\|U(t)\|^2\mid r(k)=l\right]\le\beta\alpha^{t-k}\|w\|^2$.

rezultă aplicând teorema 2.

Acum este clar că, în ipotezele teoremei 3, sistemul (1), (2) este {1,5}-, {2, 4}- complet sincronizat în medie condiționată. Deoarece operatorul $T(t,k)$ nu depinde de componentele $u_i^{(t)}$, $v_{ij}^{(t)}$ ale soluției $\{u^{(t)}, v^{(t)}\}_{t \geq k}$ a sistemului (1), (2) are loc următorul corolar.

COROLARUL 1. Dacă sunt îndeplinite ipotezele teoremei de mai sus, atunci pentru orice $x \in \mathbf{R}^{18}$, sistemul (1), (2) este $\{1,5\}$-, $\{2,4\}$-, $\{2,6\}$-, $\{3,5\}$-, $\{3,1\}$- și $\{4,6\}$- complet sincronizat în medie condiționată. În plus (1), (2) este $\{1,3,5\}$- și $\{2,4,6\}$- complet sincronizat în medie condiționată.

EXEMPLUL 1. Fie $\xi_t, t \in \mathbf{N}$ un şir de variabile aleatoare independende, cu aceeaşi funcție de repartiție, anume Repartiția Binomială $B_n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \varepsilon_k$, cu parametrii $n = 3, p = 1/2$. Parametru *n* reprezintă numărul de încercări independende, *p* este probabilitatea de succes iar $\varepsilon_k$ este măsura Dirac pe Z asociată lui k $\in$ Z, adică $\varepsilon_k(A) = \chi_A(k)$ pentru $A \subset \mathbf{Z}$. Considerăm sistemul (1), (2) pentru $n = 6$, unde $\{r(t)\}_{t \in \mathbf{N}}$ este procesul stocastic definit de relația $r(t) = \xi_0 + \ldots + \xi_t, t \in \mathbf{N}$, f: N×R→R, f(t, x) = $(-1)^t \frac{9}{10} x$ şi a(t,i) = 1/4(1- $\frac{1}{|i|+2}$), i $\in$ Z. Procesul Markov $\{r(t)\}_{t \in \mathbf{N}}$ are matricea de tranziție $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbf{Z}}$ definită de $q_{ij} = B_3^{1/2}(\{j-i\})$. Deci $q_{ij} = 0$ dacă $i < j$ sau $j > i + 3$ şi $q_{ii} = q_{ii+3} = 1/8$, $q_{ii+1} = q_{ii+2} = 3/8$. Evident, ipotezele (H1)-(H3) sunt satisfăcute.

Vom demonstra că (1), (2) este {1,3,5}- şi {2,4,6}- complet sincronizat în medie condiționată. Deoarece |1-4a(t,i)| = 1/(|i|+2), |a(t,i)| = 1/4(1- $\frac{1}{|i|+2}$) şi |1 - a(t,i)| =1/4(3 + $\frac{1}{|i|+2}$), avem

PROOF. Assume that there exists a unique, uniformly positive and bounded on N solution $\{Z_t\}_{t \in \mathbf{N}}$ of (3). Applying Theorem 1 for *n* = *6* and $\mathbf{V}_t = \mathbf{L}_t, t \in \mathbf{N}$ we get

$$\langle \mathbf{L}_k \cdots \mathbf{L}_{t-1} \mathbf{L}_{t-1}(\Phi)(l)|w|, |w| \rangle =$$

$$= \langle T(t,k)(\Phi)(l)|w|, |w| \rangle \leq$$

$$\leq \|T(t,k)(\Phi)\|_\infty \|w\|^2 \leq \|T(t,k)\| \|w\|^2$$

$\leq \beta \alpha^{t-k} \|w\|^2$ for all $l \in \mathbf{Z}$. The conclusion follows from Theorem 2.

Now it is clear that, under the hypotheses of Theorem 3, the system (1), (2) is $\{1,5\}$-, $\{2,4\}$-completely synchronized in conditional mean. Since the operator $T(t,k)$ does not depend on the components $u_i^{(t)}, v_{ij}^{(t)}, i \in \{1,..,6\}, j = 1,2$ of the solution $\{u^{(t)}, v^{(t)}\}_{t \geq k}$ of (1), (2) we easily get the following result.

COROLLARY 1. If the hypotheses of the above theorem hold, then, for any $x \in \mathbf{R}^{18}$, the system (1), (2) is $\{1,5\}$-, $\{2,4\}$-, $\{2,6\}$-, $\{3,5\}$-, $\{3,1\}$- and $\{4,6\}$- completely synchronized in conditional mean. Moreover, it is $\{1,3,5\}$- and $\{2,4,6\}$- completely synchronized in conditional mean.

EXAMPLE 1. Let $\xi_t, t \in \mathbf{N}$ be a sequence of independent random variables, with the same distribution function, namely the Binomial Distribution $B_n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \varepsilon_k$, with parameters $n = 3, p = 1/2$ . Here *n* is the number of independent trials, *p* is the probability of success and $\varepsilon_k$ is the Dirac measure on Z associated with $k \in \mathbf{Z}, \varepsilon_k(A) = \chi_A(k)$ for any $A \subset \mathbf{Z}$. Now, let us consider the system (1), (2) for $n = 6$, where $\{r(t)\}_{t \in \mathbf{N}}$ is the random walk defined by $r(t) = \xi_0 + \ldots + \xi_t, t \in \mathbf{N}$, f: N×R→R, f(t, x) = $(-1)^t \frac{9}{10} x$ and a(t,i) = 1/4(1- $\frac{1}{|i|+2}$), i $\in$ Z.

$$\|A(t,i)\| = \sup_{\|x\|=1,\, x\in\mathbf{R}^6} |\langle A(t,i)x, x\rangle| \le 1,$$

$$\|(\mathbf{L}_t h)(i)\| = \left\| \Gamma^2(t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} q_{i,j} A^*(t,i) h(j) A(t,i) \right\| \le$$

$$\le \ (9/10)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q_{i,j} \qquad \|h(j)\|$$ şi

$$\|\mathbf{L}_t \Phi\| = \sup_{i\in\mathbf{Z}} \|(\mathbf{L}_t \Phi)(i)\| \le \left(\tfrac{9}{10}\right)^2.$$

Aplicând lema 1 din [4] deducem că $\|\mathbf{L}_t\| = \|\mathbf{L}_t(\Phi)\| \le \left(\tfrac{9}{10}\right)^2$. În consecinţă, $\|T(t,k)\| \|w\|^2 \le (9/10)^{2(t-k)} \|w\|^2, w \in \mathbf{R}^6, t \ge k, t,k \in \mathbf{N}$ şi sistemul (1), (2) este $\{1,3,5\}$- şi $\{2,4,6\}$-complet sincronizat în medie condiţionată.

Generând aleator valorile procesului Markov considerat în acest exemplu, obţinem şirul $r(0)=1, r(1)=2, r(2)=4, r(3)=6, r(4)=$ $=9, r(5)=9, \ldots, r(13)=21, \ldots$

Informaţia conţinută de cele şaisprezece unităţi ale reţelei, la momentele t = 0 şi respectiv t = *29*, este dată în figura de mai jos

Obviously the Markov process $\{r(t)\}_{t\in\mathbf{N}}$ has the transition matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ defined by $q_{ij} = B_3^{1/2}(\{j-i\})$. Thus $q_{ij} = 0$ if $i < j$ or $j > i+3$ and $q_{ii} = q_{ii+3} = 1/8$, $q_{ii+1} = q_{ii+2} = 3/8$. Now it is easy to see that hypotheses (H1)-(H3) are satisfied.

We will prove that (1), (2) is $\{1,3,5\}$- and $\{2,4,6\}$-completely synchronized in conditional mean. Since $|1-4a(t,i)| = 1/(|i|+2)$, $|a(t,i)| = 1/4(1- \frac{1}{|i|+2})$ and $|1 - a(t,i)| = 1/4(3 + \frac{1}{|i|+2})$, then

$$\|A(t,i)\| = \sup_{\|x\|=1,\, x\in\mathbf{R}^6} |\langle A(t,i)x, x\rangle| \le 1,$$

$$\|(\mathbf{L}_t h)(i)\| = \left\| \Gamma^2(t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} q_{i,j} A^*(t,i) h(j) A(t,i) \right\| \le$$

$$(9/10)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} q_{i,j} \qquad \|h(j)\|$$ and $\|\mathbf{L}_t \Phi\| = \sup_{i\in\mathbf{Z}} \|(\mathbf{L}_t \Phi)(i)\| \le \left(\tfrac{9}{10}\right)^2$. Applying Lemma 1 in [4] we see that $\|\mathbf{L}_t\| \le \left(\tfrac{9}{10}\right)^2$. Hence

$$\|T(t,k)\| \|w\|^2 \le (9/10)^{2(t-k)} \|w\|^2, w \in \mathbf{R}^6, t \ge k, t,k \in \mathbf{N}$$

and system (1)-(2) is $\{1,3,5\}$- and $\{2,4,6\}$-completely synchronized in conditional mean (Corollary 3).

Generating randomly the values of the Markov process r(t) we get

$r(0)=1, r(1)=2, r(2)=4, r(3)=6, r(4)=$ $=9, r(5)=9, \ldots, r(13)=21, \ldots$

The information contained by the sixteen units of our network, at the time periods *t = 0* and *t = 29*, are given below

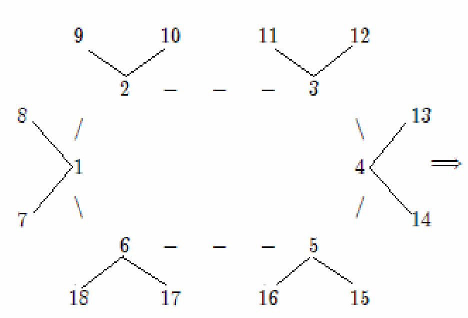


Fig. 1

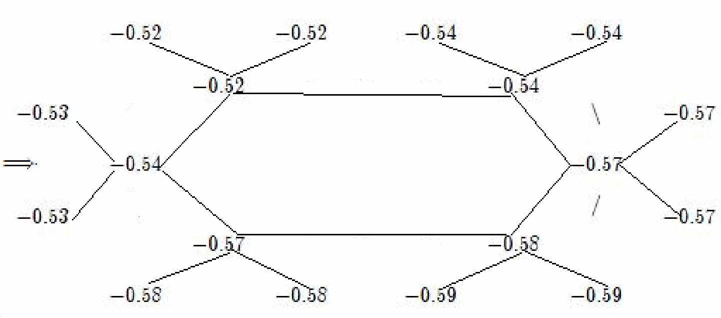


Fig. 1

## BIBLIOGRAFIE


[1] Cheng S. S., Tian C. J., Gil' M., Synchronization in a discrete circular network, Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations, 61-73, CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[2] Cheng S. S., Ungureanu, V.M, One or Two Colored Patterns Formation via Mean Square Error Synchronization in Networks with Ring Structure, submitted to Taiwanese Journal of Mathematics

[3] Gu, Y. Q., Chun S., Fu, X.C, Complete synchronization and stability of star shaped complex networks, Chaos, Solitons & Fractals, 28(2006), 480-488.

[4] Ungureanu V.M., Cheng, S. S., Mean stability of a stochastic difference equation, Ann. Polonici Math., 93(1), 33-52


## BIBLIOGRAPHY


[1] Cheng SS, Tian C, Gil' M, Synchronization in a discrete circular network, Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations, 61-73, CRC, Boca Raton, 2004.

[2] Cheng SS, Ungureanu, VM, One or two colored patterns formation via mean square error synchronization in networks with ring structure, submitted to Taiwanese Journal of Math.

[3] Gu, Y. Q., Chun S., Fu, X.C, Complete synchronization and stability of star shaped complex networks, Chaos, Solitons & Fractals, 28(2006), 480-488.

[4] Ungureanu VM, Cheng, SS, Mean stability of a stochastic difference equation, Ann. Polonici Math., 93(1), 33-52.