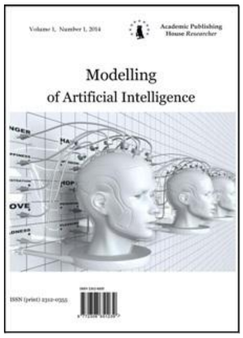
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
Vol. 3, No. 3, pp. 126-132, 2014

DOI: 10.13187/mai.2014.3.126
www.ejournal11.com



UDC 316

Composite Principal-Dual Simplex Method for Linear Programming Solving

Victor I. Samarin

Sochi State University, Russian Federation
PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor
354000, Sochi, Sovetskaya str., 26a
E-mail: visamarin@mail.ru

Abstract

The composite principal-dual simplex method for linear programming solving is proposed. This method in aggregate with principal (primal) and dual methods permits solving any such problem without resort to the artificial unknowns. Problem mathematical model form requirements and conditions to solve the problem by the composite principal-dual simplex method are considered. The algorithm of the composite principal-dual simplex method is represented. The example of corresponding problem solving by the consistent iterations in the simplex tableaus is illustrated.

Keywords: canonical form; additional slack and surplus unknowns; preferred unknowns; artificial unknowns; basic unknowns; basis; unitary matrix; problem solving algorithm; simplex tableau; impermissible right hand side; transportation model.

Введение

Линейное программирование является первоосновой математического программирования, исследования операций, ряда методов теории принятия решений, теории оптимизации функций и функционалов. Методы линейного программирования находят самое широкое применение в различных научных теоретических и прикладных задачах практической деятельности. В частности, линейное программирование позволило проводить детальный экономический анализ линейной задачи производства продукции возможного ассортимента при определенных ограничениях на объемы используемых ресурсов [2, 9].

Каноническая форма математической модели задачи линейного программирования (ЗЛП) предполагает неотрицательность управляемых переменных, представления системы ограничений в виде уравнений и минимизацию целевой функции. При решении ЗЛП основным симплекс-методом правая часть уравнений (свободные члены уравнений) в системе ограничений должна быть допустимой (неотрицательной), а сами уравнения должны содержать предпочтительные неизвестные, т.е. в левой части каждого уравнения системы ограничений имеется неизвестная с коэффициентом +1, отсутствующая во всех других уравнениях системы ограничений и в целевой функции. Для составления такой формы системы ограничений используются балансные и искусственные неизвестные. Для решения задачи с искусственными неизвестными используют, как правило, или двухэтапный метод, предполагающий составление и первоочередной минимизации дополнительной целевой функции, или М-метод [2].

Постановка и решение задачи. Алгебраическими преобразованиями и введением балансных неизвестных любая исходная математическая модель задачи линейного программирования может быть записана в канонической форме с предпочтительными неизвестными (без искусственных) и минимизацией целевой функции [1-2]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \quad x_j \geq 0; \; j = \overline{1, n+m};$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + F_0 \to \min.$$

Однако при этом правая часть уравнений системы ограничений может оказаться недопустимой, т.е. среди свободных членов уравнений могут оказаться отрицательные величины.

Число уравнений в этой системе, в общем случае, может оказаться больше числа ограничений в исходной модели, если в исходной системе имеются уравнения, каждое из которых в ходе преобразований следует разбить на два нестрогих неравенства с противоположными знаками. Число неизвестных в этой системе, как правило, больше, чем в исходной системе ограничений как за счет введения балансных неизвестных, так и в результате представления каждого неопределенного по знаку неизвестного в форме разности двух неотрицательных неизвестных. Такая задача может быть решена или основным, или двойственным, или смешанным симплекс-методом; если в модели используются искусственные неизвестные, то задача всегда может быть решена основным симплекс-методом. В приведенной модели коэффициенты при предпочтительных (базисных) неизвестных в уравнениях системы ограничений образуют единичную матрицу, что позволяет использовать модифицированный симплекс-метод решения ЗЛП [1].

Условия использования основного, двойственного и смешанного симплекс-методов для математической модели ЗЛП в канонической форме с предпочтительными неизвестными (в отсутствие искусственных), при ориентированной на минимум целевой функции $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + F_0 \to \min$, сведены в следующую таблицу:

№№ п/п	Комбинации знаков b_i и c_j	Метод решения ЗЛП
1.	Все $b_i \geq 0$, среди c_j есть отрицательные	Основной симплекс-метод
2.	Все $c_j \geq 0$, среди b_i есть отрицательные	Двойственный симплекс-метод
3.	И среди b_i, и среди c_j есть отрицательные	Смешанный симплекс-метод
4.	Все $b_i \geq 0$ и все $c_j \geq 0$	Критерий оптимальности решения ЗЛП

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом (методом последовательного улучшения плана) разработал Дж. Данциг [3, 4].

Решение ЗЛП двойственным методом предложено Дж. Лемке [7]. Если в основном симплекс-методе приближение к оптимальному плану осуществляется по угловым точкам только допустимой области решений, т.е. для неотрицательных базисных решений, то в двойственном – по угловым точкам недопустимой области решений, причем, как только очередная угловая точка окажется в допустимой области, то она и будет оптимальным планом.

Известны способы решения общей модели задачи линейного программирования, основанные на комбинированном использовании основного и двойственного симплексных методов согласно алгоритмам смешанного (составного) симплекс-метода, предложенных в работах Дж. Данцига [5] и У. Орчарда-Хейса [10], и альтернативному алгоритму

Дж. Данцига, Л. Форда и Д. Фалкерсона [6], который использован в качестве ускоренного метода решения транспортной задачи (ТЗ), как наиболее эффективного для расчетных таблиц ТЗ значительных размеров и при использовании компьютерной техники.

Однако смешанный симплекс-метод решения ЗЛП можно свести к последовательному использованию основного и двойственного симплекс-методов в одной симплекс-таблице.

Алгоритм смешанного симплекс-метода решения ЗЛП:

1. Убедиться, что исходная математическая модель ЗЛП записана в предпочтительном виде канонической формы без использования искусственных неизвестных, но и среди коэффициентов c_j при неизвестных в целевой функции и среди свободных членов b_i в правой части системы ограничений имеются отрицательные.

2. Заполнить 0-ю итерацию симплекс-таблицы согласно исходной математической модели, взяв в качестве базисных неизвестных предпочтительные.

3. Начать определение разрешающих столбца и строки по алгоритму основного симплекс-метода, при этом уравнения системы ограничений с отрицательными b_i не рассматриваются при определении разрешающей строки, т.е. на этом этапе предпочтительные неизвестные в уравнениях с недопустимой правой частью <u>не могут быть выведены из базиса</u>.

4. Решать задачу основным симплекс-методом с учетом указанных в п.3 условий до исчезновения отрицательных коэффициентов при неизвестных в строке целевой функции, если при этом среди свободных членов правой части останутся отрицательные, то продолжить решение задачи двойственным симплекс-методом.

Пример. Решить ЗЛП, не используя искусственных неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 14; & x_1 \ge 0; \\ x_1 - x_2 \qquad\quad \ge 6; & x_2 \ge 0; \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 = 9; & x_3 \ge 0; \end{cases}$$

$$\overline{F} = -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4 \to \max.$$

1. Используя преобразования, приводящие к эквивалентным соотношениям, и балансные неотрицательные неизвестные x_4, x_5, x_6, записываем математическую модель заданной ЗЛП в предпочтительном виде канонической формы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \underline{x_4} = 14; \\ -x_1 + x_2 \qquad\quad + \underline{x_5} = -6; \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 + \underline{x_6} = 9; \\ \quad -2x_2 - 3x_3 + \underline{x_7} = -9; \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7};$$

$$F = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4 \to \min.$$

Решаем задачу <u>смешанным симплекс-методом</u>.

2. Балансные неизвестные x_4, x_5, x_6, x_7 являются предпочтительными, поэтому выбираем их в качестве первой комбинации базисных неизвестных.

3. Заполняем исходную симплекс-таблицу (т.е. выполняем 0-ю итерацию).

4. Выполняем все итерации смешанного симплекс-метода:

№	базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	1	2	2	1	0	0	0	14
	x_5	– 1	1	0	0	1	0	0	– 6
	x_6*	0	2	$\boxed{3}$	0	0	1	0	9
	x_7	0	– 2	– 3	0	0	0	1	– 9
	F	2	– 1	– 3*	0	0	0	0	4

1	x_4	1	2/3	0	1	0	– 2/3	0	8
	x_5*	$\boxed{-1}$	1	0	0	1	0	0	– 6
	x_3	0	2/3	1	0	0	1/3	0	3 •
	x_7	0	0	0	0	0	1	1	0
	F	2*	1	0	0	0	1	0	– 5
2	x_4	0	5/3	0	1	1	– 2/3	0	2
	x_1	1	– 1	0	0	– 1	0	0	6 •
	x_3	0	2/3	1	0	0	1/3	0	3
	x_7	0	0	0	0	0	1	1	0
	F	0	3	0	0	2	1	0	7

5. Согласно 2-й итерации получен оптимальный план x* = (6; 0; 3; 2; 0; 0; 0), который обеспечивает максимальное значение целевой функции $\overline{F}^*_{max} = -7$.

Ответ: x* = (6; 0; 3; 2; 0; 0; 0), $\overline{F}^*_{max} = -7$.

Для целостного восприятия процесса заполнения симплекс-таблицы ниже кратко приводятся использованные хорошо известные алгоритмы основного и двойственного симплекс-методов решения ЗЛП в отсутствие искусственных неизвестных:

Алгоритм основного симплекс-метода	Алгоритм двойственного симплекс-метода
1. Заполнить исходную симплекс-таблицу (0-ю итерацию), представляющую расширенную матрицу системы ограничений в форме уравнений с предпочтительными неизвестными и неотрицательными свободными членами в их правых частях, под которой в дополнительной строке записываются коэффициенты при неизвестных и свободный член целевой функции F → min; в качестве базисных неизвестных взять предпочтительные. 2. При наличии отрицательных коэффициентов при неизвестных в целевой функции подготовиться к следующей итерации: ➢ среди отрицательных коэффициентов c_j в целевой функции выбрать максимальный по модулю, определив разрешающий столбец (∗); ➢ среди всех отношений правых частей системы ограничений b_i к положительным элементам разрешающего столбца выбрать минимальное, определив разрешающую строку (∗); ➢ выделить рамкой разрешающий элемент, стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки. 3. Заполнить новую таблицу (т.е. выполнить следующую итерацию): ➢ базисную неизвестную в разрешающей строке прежней итерационной таблицы заменить в новой таблице неизвестной разрешающего столбца; ➢ заполнить столбцы базисных неизвестных: на пересечении столбца и строки каждой базисной неизвестной поставить 1, остальные элементы столбца равны 0; ➢ если в разрешающем столбце прежней итерационной таблицы есть нули, то соответствующие им строки переписать без изменений; ➢ если в разрешающей строке прежней итерационной	1. При наличии отрицательных свободных членов в правой части уравнений системы ограничений (в случае, когда все коэффициенты при неизвестных в строке целевой функции неотрицательны) подготовиться к следующей итерации: ➢ среди отрицательных свободных членов b_i в правой части системы ограничений выбрать максимальный по модулю, определив разрешающую строку (∗); ➢ среди всех отношений коэффициентов c_j в строке целевой функции к отрицательным элементам разрешающей строки выбрать минимальное по модулю, определив разрешающий столбец (∗); ➢ выделить рамкой разрешающий элемент,

таблицы есть нули, то соответствующие им столбцы переписать без изменений; ➢ разрешающая строка прежней итерационной таблицы переносится в новую после деления всех ее элементов на разрешающий элемент, и становится опорной строкой (•) в новой таблице, в незаполненных полностью столбцах выделить в записанной опорной строке опорные элементы; ➢ все остальные элементы новой таблицы определить по правилу треугольника: искомый элемент (1) равен разности элемента (2) на месте искомого в прежней таблице и произведения элемента (3) в разрешающем столбце прежней таблицы в строке напротив элемента (2) на опорный элемент (4) в столбце искомого элемента (1) новой таблицы; исключение – при вычислении значения новой константы в строке целевой функции в правиле треугольника операция вычитания заменяется на сумму. 4. Новый базис проверяется на оптимальность: если в итерационной таблице все коэффициенты при неизвестных в строке целевой функции неотрицательны, то найденное базисное решение оптимально, иначе перейти к п.3 алгоритма.	стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки. 2. Выполнить п. 3 алгоритма основного симплекс-метода для заполнения новой таблицы. 3. Новый базис проверяется на оптимальность: если в крайнем правом столбце итерационной таблицы все свободные члены системы ограничений неотрицательны, то найденное базисное решение оптимально, иначе перейти к п.1 алгоритма.

Метод искусственного базиса – разновидность основного симплекс-метода, в котором для получения математической модели ЗЛП допустимого предпочтительного вида канонической формы использованы искусственные неизвестные (неотрицательные неизвестные, вводимые в уравнения системы ограничений, не содержащие предпочтительных неизвестных). В каждой итерационной симплекс-таблице помимо строки основной целевой функции F(x) → min, возникает строка дополнительной минимизируемой целевой функции G(x) → min, равной сумме искусственных неизвестных, выраженных через свободные неизвестные уравнений, содержащих эти искусственные неизвестные. К минимизации основной целевой функции F(x) в этом методе можно приступать только при достижении нулевого значения функции G(x) в базисе, не содержащем искусственные неизвестные. При последующей оптимизации основной целевой функции F искусственные неизвестные запрещено вводить в базис, даже если они имеют отрицательные коэффициенты.

Продемонстрируем решение рассмотренного примера при использовании метода искусственного базиса. В этом случае математическая модель ЗЛП принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 14; & x_1 \geq 0; \\ x_1 - x_2 \qquad - x_5 + \underline{\underline{x}}_6 = 6; & x_2 \geq 0; \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 + \underline{\underline{x}}_7 = 9; & x_3 \geq 0; \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4 \to \min;$$

$$G = x_6 + x_7 = -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 + 15;$$

где $x_4 \geq 0$ и $x_5 \geq 0$ – балансные неизвестные, $x_6 \geq 0$ и $x_7 \geq 0$ – искусственные неизвестные, $x_4 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ и $x_7 \geq 0$ – предпочтительные переменные, которые образуют начальный базис.

№	базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	1	2	2	1	0	0	0	14
	x_6	1	– 1	0	0	– 1	1	0	6
	x_7*	0	2	3	0	0	0	1	9
	F	2	– 1	– 3	0	0	0	0	4
	G	– 1	– 1	– 3*	0	1	0	0	15
1	x_4	1	2/3	0	1	0	0	– 2/3	8
	x_6*	1	– 1	0	0	– 1	1	0	6
	x_3	0	2/3	1	0	0	0	1/3	3 •

	F	2	1	0	0	0	0	1	– 5
	G	– 1*	1	0	0	1	0	1	6
2	x_4	0	5/3	0	1	1	– 1	– 2/3	2
	x_1	1	– 1	0	0	– 1	1	0	6 •
	x_3	0	2/3	1	0	0	0	1/3	3
	F	0	3	0	0	2	– 2	1	7
	G	0	0	0	0	0	1	1	0

Поскольку в оптимальной симплекс-таблице G = 0 с учетом того, что x_6 и x_7 – в оптимальном базисе являются свободными неизвестными, и, следовательно, в данном базисном решении равны нулю, а среди коэффициентов при неискусственных неизвестных основной целевой функции $F \to \min$ нет отрицательных, то получен оптимальный план: x^* = (6; 0; 3; 2; 0), $\overline{F}{}^*_{\max} = -7$.

Предлагаемый смешанный симплекс-метод органично вписывается в экономический анализ и процесс выявления особых случаев возможных решений задачи линейного программирования [2, 9]: отсутствия оптимального решения из-за его неограниченности, отсутствия допустимых решений, наличия альтернативных оптимальных решений, вырожденности оптимального решения.

Например,

- если при решении ЗЛП основным симплекс-методом, в том числе методом искусственного базиса, или смешанным симплекс-методом на этапе основного ни в одном столбце системы ограничений, соответствующем отрицательным коэффициентам c_j, нет положительных элементов a_{ij}, то целевая функция $\overline{F} \to \max$ не ограничена сверху (соответственно, функция $F = -\overline{F} \to \min$ не ограничена снизу);
- если при решении ЗЛП двойственным симплекс-методом, или смешанным симплекс-методом на этапе двойственного ни в одной строке системы ограничений с отрицательными свободными членами b_i нет отрицательных элементов a_{ij}; а при решении методом искусственного базиса в дополнительной целевой функции $G \to \min$ значение свободного члена $G_0 \neq 0$ в отсутствие отрицательных коэффициентов при свободных неизвестных в этой функции, то область допустимых решений – пустое множество;
- если при решении ЗЛП любым симплекс-методом хотя бы один из коэффициентов при свободных неискусственных неизвестных в строке целевой функции оптимального решения в симплекс-таблице равен нулю, то имеются альтернативные оптимальные решения.

Примечания:

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М.: Изд-во «Прогресс», 1966. 600 с.
2. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.
3. Dantzig G.B. Programming in a linear structure // Washington, Comptroller, USAF, 1948.
4. Dantzig G.B. Programming in interdependent activities, Mathematical model // Econometrica, 1949, 17, p. 200-211.
5. Dantzig G.B. Composite Simplex-Dual Simplex Algorithm-I // RAND Report RM-1274, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
6. Dantzig G.B., Ford L.R., Jr., and Fulkerson D.R. A Primal-Dual Algorithm // RAND Report RM-1709, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
7. Lemke G.T. The dual method of solving the linear programming problem // Navel Res. Logist. Quart., 1954, v. 1, № 1, p. 36-47.
8. Самарин В.И. К концепции лекции по элементам теории оптимизации //Материалы 3-й Международной научно-методической конференции «Проектирование инновационных процессов в социокультурной и образовательной сферах», часть 2. Сочи: РИО СГУТиКД, 2000. С. 157-159.

9. Samarin V.I. Practice curriculum analysis-project of resources optimum using into linear programming production planning // European researcher, № 5-1 (7), 2011. p. 520-526.

10. Orchard-Hays W. A Composite Simplex Algorithm-II // RAND Report RM-1275, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.

References:

1. Dantsig Dzh. Lineinoe programmirovanie, ego obobshcheniya i primeneniya. M.: Izd-vo «Progress», 1966. 600 s.
2. Takha Khemdi A. Vvedenie v issledovanie operatsii. M.: Izdatel'skii dom «Vil'yams», 2005. 912 s.
3. Dantzig G.B. Programming in a linear structure // Washington, Comptroller, USAF, 1948.
4. Dantzig G.B. Programming in interdependent activities, Mathematical model // Econometrica, 1949, 17, p. 200-211.
5. Dantzig G.B. Composite Simplex-Dual Simplex Algorithm-I // RAND Report RM-1274, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
6. Dantzig G.B., Ford L.R., Jr., and Fulkerson D.R. A Primal-Dual Algorithm // RAND Report RM-1709, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1956.
7. Lemke G.T. The dual method of solving the linear programming problem // Navel Res. Logist. Quart., 1954, v. 1, № 1, p. 36-47.
8. Samarin V.I. K kontseptsii lektsii po elementam teorii optimizatsii //Materialy 3-i Mezhdunarodnoi nauchno-metodicheskoi konferentsii «Proektirovanie innovatsionnykh protsessov v sotsiokul'turnoi i obrazovatel'noi sferakh», chast' 2. Sochi: RIO SGUTiKD, 2000. S. 157-159.
9. Samarin V.I. Practice curriculum analysis-project of resources optimum using into linear programming production planning // European researcher, № 5-1 (7), 2011. p. 520-526.
10. Orchard-Hays W. A Composite Simplex Algorithm-II // RAND Report RM-1275, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.

УДК 316

Смешанный симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Виктор Иванович Самарин

Сочинский государственный университет, Российская Федерация
354000, г. Сочи, ул. Советская, 26а
кандидат физико-математическихнаук, доцент
E-mail: visamarin@mail.ru

Аннотация. Предложен смешанный симплекс-метод решения задачи линейного программирования, который в совокупности с основным и двойственным методами позволяет решить любую такую задачу без использования искусственных неизвестных. Приведены требования к форме математической модели задачи и условия, при которых задача решается смешанным симплекс-методом. Представлен алгоритм смешанного симплекс-метода и рассмотрен пример решения соответствующей задачи последовательными итерациями в симплекс-таблицах.

Ключевые слова: каноническая форма; балансные неизвестные; предпочтительные неизвестные; искусственные неизвестные; базисные неизвестные; базис; единичная матрица; алгоритм решения задачи; симплекс-таблица; недопустимая правая часть; транспортная задача.