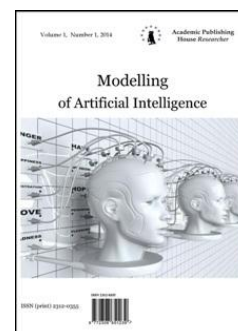


Copyright © 2014 by Academic Publishing House *Researcher*

Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
Vol. 2, No. 2, pp. 77-84, 2014

DOI: 10.13187/mai.2014.2.77

www.ejournal11.com

UDC 612.82:51-76

The Characteristics of the Non-Linear Dynamics of the Electroencephalograms of Patients with Trigeminal Neuralgia

¹Vitaly P. Omelchenko

²Irina O. Mihalchich

¹Rostov State Medical University, Russian Federation
Nakhichevansky Street, 29, Rostov-on-Don, 344022
Dr. (Biology), Professor
E-mail: vitaly.omelchenko@mail.ru

²Rostov State Medical University, Russian Federation
Nakhichevansky Street, 29, Rostov-on-Don, 344022
Senior laboratory
E-mail: irisa-irisa@bk.ru

Abstract. This article examines the application of nonlinear dynamics methods to the study of the electroencephalograms (EEG) of patients with trigeminal neuralgia (TN). The author has calculated delay time and embedding dimensions values and constructed recurrent EEG diagrams for healthy trial subjects and patients with TN. The study has revealed significant differences between the nonlinear dynamics of the EEGs of patients with TN and a normal EEG.

Keywords: electroencephalogram; trigeminal neuralgia; nonlinear dynamics; dynamical chaos theory; delay time; embedding dimensions; recurrent diagrams.

Введение

Головной мозг человека является сложной системой, объединяющей работу миллиардов нейронов (по разным оценкам от 5 до 100 млрд.). Известно, что каждый из нейронов головного мозга может образовывать до 10^4 связей в зависимости от выполняемой задачи [1]. Клетки головного мозга гибко и достаточно быстро реагируют на изменение внешних и внутренних факторов, воздействующих на организм человека. Поэтому мозг с уверенностью можно назвать динамической системой. А электроэнцефалограмму как отражение деятельности мозга полезно исследовать нелинейнодинамическими методами.

Целью проведенной работы стало исследование ЭЭГ пациентов с невралгией тройничного нерва методами нелинейной динамики. Невралгия тройничного нерва (НТН) – хроническое рецидивирующее заболевание, боли в зонах иннервации ветвей тройничного нерва. Распространенность составляет 30–50 случаев заболевания на 100 000 населения. Первые проявления заболевания возникают после 50 лет. Чаще страдают женщины [2].

Материалы и методы

В рамках исследования были записаны и проанализированы ЭЭГ 15 больных НТН и 15 здоровых испытуемых (контрольная группа). Запись ЭЭГ проводилась при помощи электроэнцефалографа-анализатора ЭЭГА-21/26 «Энцефалан-131-03». Электроды

располагались в соответствии с международной системой отведений 10-20, запись проводилась монополярно. Все исходные ЭЭГ прошли программную фильтрацию от артефактов, участки ЭЭГ длительностью 8192 отсчета (около 30 с) были подвергнуты анализу в рамках теории динамических систем при помощи программы Visual Recurrence Analysis (VRA) 4.9, автор – Евгений Кононов [3].

Математической основой для восстановления свойств динамической системы мозга по ЭЭГ служит теорема Такенса [4, 5]. Рассматривается развитие системы в фазовом пространстве с координатами $x(t)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$..., $x(t+(m-1)\tau)$. Параметрами такой реконструкции являются τ – интервал задержки (запаздывание) и m – размерность вложения выборки. На сегодняшний день не существует однозначно верного метода выбора данных параметров [6].

Было принято решение время задержки τ определять как расстояние до первого минимума функции взаимной информации (Mutual information), математическое выражение которой выглядит так [7]:

$$I(\tau) = - \sum_{h=1}^j \sum_{k=1}^j P_{hk}(\tau) \ln \frac{P_{hk}(\tau)}{P_h P_k}, \quad (1)$$

где P_h - вероятность пребывания в интервале значений с номером h , P_{hk} - вероятность того, что x_i находится в h -ом интервале, а $x_{i+\tau}$ - в k -ом.

Выбор минимально достаточной размерности вложения осуществлялся по методу ближайших ложных соседей (false nearest neighbours - FNN) [8, 9]. Пусть $P_h^{(m)}$ и $P_k^{(m)}$ - два близких соседа в реконструкции m , а $P_h^{(m+1)}$ и $P_k^{(m+1)}$ соответствующие им векторы в реконструкции размерности $m+1$. Для каждой точки в серии вычисляется соотношение:

$$R_t = \frac{\left\| P_h^{(m+1)} - P_k^{(m+1)} \right\|}{\left\| P_h^{(m)} - P_k^{(m)} \right\|} \quad (2)$$

При значении R_t , превышающем заданную константу R_i , точки h и k считаются ложными ближайшими соседями. Если доля точек, для которых $R_t > R_i$, достаточно мала, это значение размерности и есть размерность внедрения.

В заключение были построены рекуррентные диаграммы (РД) электроэнцефалограмм испытуемых всех исследуемых групп. РД являются методом качественного исследования сложных процессов, они служат для выявления хаотичности либо наоборот периодичности процесса, а также для визуализации скрытых закономерностей в исследуемом временном ряде [10]. РД является графическим отображением матрицы расстояний между парами векторов, в которой расстояния кодируются в виде градаций цвета.

Результаты и их обсуждение

Уже на первом этапе исследования стало очевидно, что группа больных НТН оказалась неоднородной. У большей части больных (10 из 15, или 67 %; назовем их первой подгруппой больных НТН) значения временной задержки τ несколько ниже, чем у контрольной группы (см. таблицу 1). У остальных же пациентов группы больных (5 из 15, или 33 %) наблюдалось значительное увеличение τ .

Полученные значения задержки во всех исследуемых группах были подвергнуты статистической обработке в программе Statistica 6.0. Поскольку проверка на нормальность не выявила нормального распределения значений исследуемых показателей, для оценки значимости различий групп применялся непараметрический критерий Манна-Уитни (U-test). В таблице 1 представлены описательные статистики задержки τ по соответствующим отведениям всех исследуемых групп и подгрупп. Серым выделены отведения, в которых наблюдались значимые различия ($p < 0,05$) значений времени задержки между каждой из подгрупп больных НТН и здоровых.

Таблица 1.
 Описательные статистики показателя времени задержки τ для исследуемых групп и уровень значимости различий (p), выявленных между подгруппами больных НТН и контрольной группой

Группа	Здоровые					Больные НТН 1 подгруппы					Больные НТН 2 подгруппы											
	<i>M</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Q₂₅</i>	<i>Q₇₅</i>	<i>M_e</i>	<i>M</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Q₂₅</i>	<i>Q₇₅</i>	<i>M_e</i>	<i>p</i>	<i>M</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>Q₂₅</i>	<i>Q₇₅</i>	<i>M_e</i>	<i>p</i>		
Статистика																						
Отведение																						
O2-A2	8,8	6,0	15,0	7,0	10,0	7,0	7,1	6,0	10,0	6,0	8,0	7,0	0,086	14,8	9,0	26,0	9,0	17,0	13,0	0,026		
O1-A1	8,7	5,0	15,0	7,0	8,0	8,0	7,7	5,0	10,0	7,0	9,0	8,0	0,739	16,2	9,0	26,0	10,0	19,0	17,0	0,006		
P4-A2	7,1	6,0	9,0	6,0	8,0	7,0	6,6	6,0	8,0	6,0	7,0	6,0	0,183	12,6	8,0	21,0	9,0	16,0	9,0	0,005		
P3-A1	7,5	6,0	13,0	6,0	8,0	7,0	6,9	6,0	8,0	7,0	7,0	7,0	0,542	13,8	9,0	25,0	9,0	17,0	9,0	0,006		
C4-A2	8,7	7,0	13,0	8,0	9,0	8,0	6,8	5,0	8,0	6,0	8,0	6,5	0,008	13,0	5,0	24,0	9,0	17,0	10,0	0,163		
C3-A1	8,3	7,0	11,0	8,0	9,0	8,0	6,7	5,0	9,0	6,0	8,0	6,0	0,015	14,4	10,0	22,0	10,0	18,0	12,0	0,003		
F4-A2	10,3	7,0	13,0	9,0	12,0	10,0	7,3	6,0	10,0	6,0	9,0	6,5	0,001	22,2	11,0	48,0	16,0	19,0	17,0	0,006		
F3-A1	10,3	6,0	13,0	8,0	13,0	10,0	7,9	5,0	17,0	6,0	8,0	7,0	0,018	17,6	9,0	29,0	13,0	20,0	17,0	0,029		
Fp2-A2	10,7	6,0	14,0	9,0	13,0	11,0	7,6	6,0	10,0	6,0	9,0	8,0	0,006	21,8	6,0	64,0	11,0	16,0	12,0	0,337		
Fp1-A1	11,7	6,0	15,0	10,0	13,0	12,0	7,5	6,0	12,0	6,0	8,0	7,0	0,001	20,6	10,0	41,0	13,0	20,0	19,0	0,074		
T6-A2	8,1	6,0	11,0	7,0	9,0	8,0	5,1	2,0	8,0	2,0	8,0	5,5	0,016	19,2	9,0	40,0	10,0	19,0	18,0	0,008		
T5-A1	9,6	7,0	14,0	7,0	11,0	10,0	6,6	4,0	8,0	6,0	8,0	6,5	0,001	17,2	6,0	35,0	10,0	18,0	17,0	0,163		
T4-A2	7,8	6,0	13,0	6,0	10,0	7,0	4,6	2,0	9,0	2,0	8,0	3,5	0,016	18,8	4,0	44,0	9,0	19,0	18,0	0,127		
T3-A1	9,2	5,0	12,0	7,0	11,0	10,0	5,7	2,0	10,0	4,0	7,0	6,0	0,003	15,8	9,0	25,0	10,0	18,0	17,0	0,067		
F8-A2	9,7	6,0	19,0	13,0	8,0	8,0	5,2	2,0	8,0	3,0	8,0	5,5	0,013	23,4	5,0	65,0	9,0	20,0	18,0	0,206		
F7-A1	8,9	6,0	15,0	12,0	8,0	8,0	6,3	3,0	9,0	5,0	8,0	6,0	0,040	23,0	11,0	38,0	17,0	26,0	23,0	0,004		

Далее по методу ближайших ложных соседей были выбраны значения минимально достаточной размерности вложения. На этом этапе еще раз подтвердилось предположение о неоднородности группы больных НТН. Имела место двоякая картина изменений размерности вложения (m) при невралгии тройничного нерва. С одной стороны, для ЭЭГ пациентов первой подгруппы было характерно увеличение размерности внедрения. С другой стороны, во второй подгруппе, напротив, наблюдалась тенденция снижения размерности вложения m относительно контрольной группы здоровых испытуемых (таблица 2).

Как показано в таблице 2, у больных из первой подгруппы с клинически подтвержденным диагнозом тригеминальная невралгия наблюдалось значимое ($p < 0,05$) увеличение размерности вложения по сравнению со здоровыми испытуемыми практически во всех отведениях ЭЭГ кроме левых затылочного, центрального и нижнелобного (О1-А1, С3-А1, F7-А1). Наиболее значимые различия ($p < 0,01$) наблюдались в отведениях P4-А2, F4-А2, Fp1-А1, T5-А1. У больных второй подгруппы наблюдалось значимое снижение показателя размерности вложения ЭЭГ относительно здоровых в ряде отведений, чаще слева: обоих затылочных (О2-А2, О1-А1) и левых теменном, центральном, средневисочном и нижнелобном (P3-А1, С3-А1, T3-А1, F7-А1) Наиболее значимые различия с контрольной группой – в отведениях О2-А2 и P3-А1.

Известно, что минимально достаточная размерность внедрения (m) аттрактора динамической системы позволяет оценить количество компонентов, формирующих исследуемую систему. Другими словами, она соответствует наименьшему числу основных независимых переменных, однозначно определяющему установившуюся динамику системы или числу уравнений, достаточному для описания поведения исследуемой системы. Следовательно, чем больше эта размерность, тем сложнее поведение исследуемой системы. Можно предположить, что нелинейная динамика биоэлектрической активности головного мозга при невралгии тройничного нерва может усложняться либо упрощаться.

Как видно из таблицы 1, значимые различия (в таблице они выделены серым) 1 подгруппы больных НТН от контрольной группы не наблюдаются лишь в затылочных (О2-А2, О1-А1) и теменных (P4-А2 и P3-А1) отведениях. Для 2 подгруппы, наоборот, в этих отведениях, а также в отведениях С3-А1, F4-А2, F3-А1, T6-А2, F7-А1 наблюдаются значимые различия с группой здоровых.

Таблица 2.

Описательные статистики размерности вложения m для исследуемых групп и значимые различия ($p < 0,05$), выявленные между данными группами (выделены серым цветом)

Группа	Здоровые					Больные НТН 1 подгруппы					Больные НТН 2 подгруппы											
	M	Min	Max	Q_{25}	Q_{75}	M_e	M	Min	Max	Q_{25}	Q_{75}	M_e	p	M	Min	Max	Q_{25}	Q_{75}	M_e	p		
Статистика																						
Отделение																						
O2-A2	9,9	7,0	20,0	8,0	11,0	9,0	12,4	8,0	16,0	10,0	15,0	13,0	0,043	7,4	6,0	9,0	7,0	8,0	7,0	0,036		
O1-A1	11,7	6,0	27,0	9,0	12,0	10,0	11,3	8,0	16,0	9,0	12,0	11,0	0,890	5,8	4,0	7,0	6,0	6,0	6,0	0,002		
P4-A2	8,7	6,0	11,0	8,0	10,0	9,0	13,6	7,0	22,0	10,0	18,0	11,5	0,006	7,0	5,0	9,0	6,0	8,0	7,0	0,055		
P3-A1	8,8	7,0	11,0	8,0	9,0	9,0	11,4	7,0	15,0	8,0	13,0	12,5	0,046	5,8	4,0	7,0	5,0	7,0	6,0	0,002		
C4-A2	8,5	7,0	11,0	8,0	9,0	9,0	13,3	7,0	20,0	9,0	19,0	12,0	0,011	8,0	5,0	14,0	6,0	8,0	7,0	0,163		
C3-A1	8,6	7,0	11,0	8,0	9,0	8,0	17,1	7,0	32,0	8,0	25,0	14,0	0,052	6,6	5,0	9,0	6,0	7,0	6,0	0,021		
F4-A2	8,5	7,0	12,0	8,0	9,0	8,0	13,9	8,0	21,0	9,0	19,0	12,0	0,002	7,4	5,0	10,0	7,0	8,0	7,0	0,163		
F3-A1	8,7	7,0	14,0	8,0	9,0	8,0	11,0	7,0	14,0	8,0	13,0	12,0	0,049	8,6	6,0	12,0	6,0	11,0	8,0	0,694		
Fp2-A2	9,0	6,0	13,0	8,0	10,0	8,0	12,6	8,0	17,0	9,0	17,0	11,5	0,011	8,6	5,0	16,0	6,0	8,0	8,0	0,295		
Fp1-A1	8,8	7,0	16,0	7,0	9,0	8,0	11,8	8,0	15,0	9,0	14,0	12,5	0,007	7,8	5,0	11,0	6,0	10,0	7,0	0,432		
T6-A2	11,2	6,0	24,0	8,0	14,0	9,0	33,2	8,0	76,0	10,0	65,0	14,5	0,027	8,6	5,0	10,0	8,0	10,0	10,0	0,485		
T5-A1	9,0	7,0	13,0	8,0	10,0	9,0	15,4	8,0	21,0	10,0	20,0	17,0	0,002	7,0	4,0	13,0	6,0	6,0	6,0	0,045		
T4-A2	11,7	7,0	18,0	9,0	15,0	10,0	39,5	9,0	91,0	10,0	74,0	16,0	0,021	11,0	5,0	19,0	8,0	12,0	11,0	0,694		
T3-A1	10,6	7,0	19,0	9,0	11,0	10,0	23,6	8,0	49,0	9,0	33,0	18,0	0,038	7,0	5,0	11,0	5,0	8,0	6,0	0,040		
F8-A2	12,1	7,0	19,0	8,0	18,0	9,0	26,8	9,0	51,0	10,0	49,0	15,5	0,040	9,0	5,0	13,0	7,0	10,0	10,0	0,383		
F7-A1	11,5	8,0	22,0	8,0	14,0	9,0	19,8	7,0	40,0	9,0	28,0	15,0	0,120	7,2	5,0	9,0	6,0	9,0	7,0	0,040		

Затем были построены рекуррентные диаграммы ЭЭГ и модельных данных. Рекуррентные диаграммы модельных процессов - на рис. а, б, в.

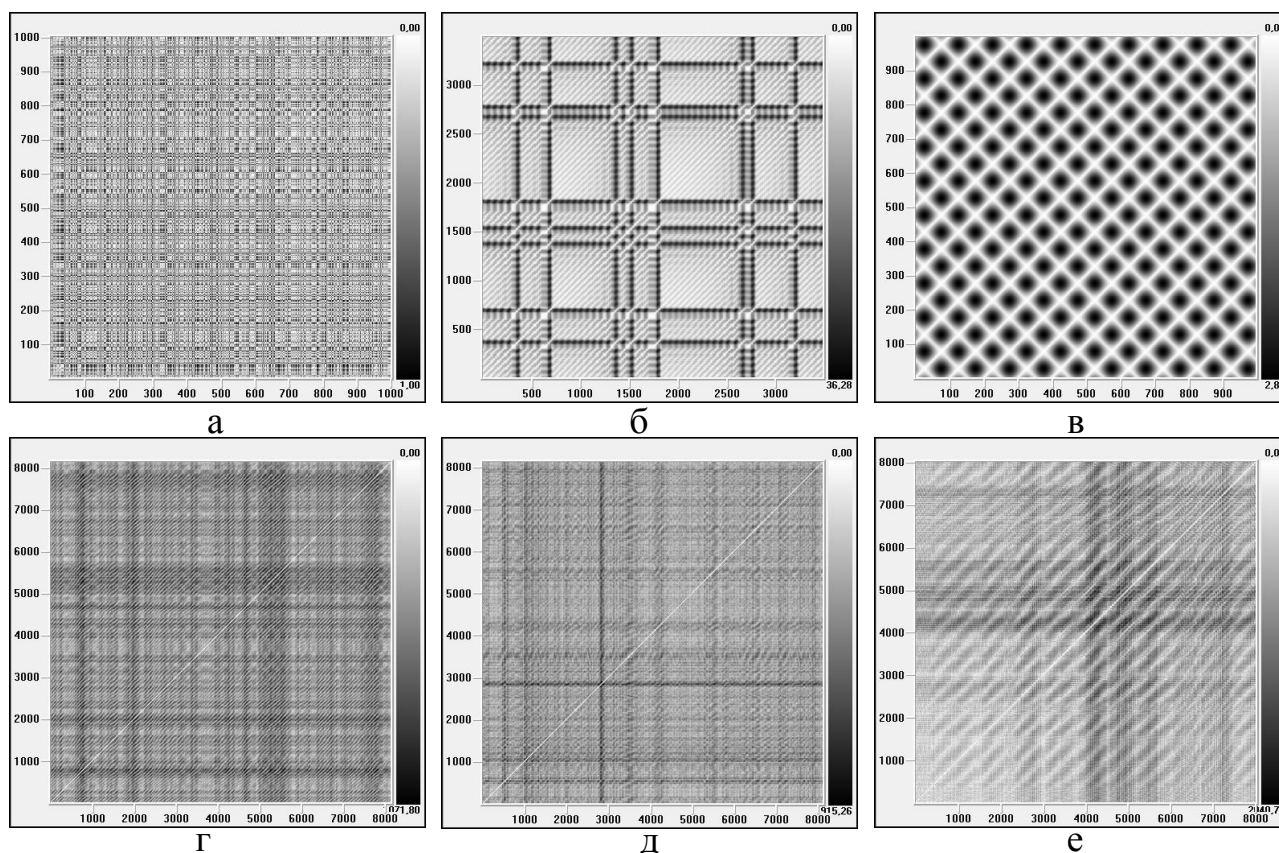


Рис. Рекуррентные диаграммы модельных процессов и реальных ЭЭГ: а – белый шум; б – система Лоренца, в – синусоида; г – ЭЭГ здорового испытуемого; д – ЭЭГ больного НТН 1 подгруппы; е – ЭЭГ больного НТН 2 подгруппы

На РД белого шума – абсолютно хаотического процесса – набор отдельных точек, никакой структуры нет (рис. а). РД синусоиды состоит из диагональных полос (рис. в). Они являются отражением детерминированности процесса. Чем более выражены диагональные структуры, тем более предсказуемой является динамика процесса. На РД системы, проявляющей свойства детерминированного хаоса (системы Лоренца) есть диагональные структуры, не столь выраженные, как у детерминированных процессов (рис. б). Кроме того видны горизонтальные и вертикальные линии.

Рекуррентные диаграммы ЭЭГ, представленные на рис. г, д, е, обнаруживают признаки детерминированного хаоса, так как присутствуют диагональные структуры и вертикальные с горизонтальными. РД ЭЭГ здоровых (рисунок г) и больных НТН 1 подгруппы (рис. д) и 2 подгруппы (рис. е) различаются. Для РД здоровых характерно большое количество мелкомасштабных косых линий. На РД больных НТН 1 подгруппы диагональных линий заметно меньше или даже нет. Во 2 подгруппе, наоборот, диагонали выраженные и протяженные. Это также подтверждает данные о существовании двух типов изменений нелинейной динамики ЭЭГ при НТН.

Заключение

Выяснилось, что группа НТН по особенностям нелинейной динамики ЭЭГ делится на 2 подгруппы. Для 1-ой подгруппы больных (67 % пациентов) характерно значимое уменьшение времени задержки τ , увеличение размерности внедрения m относительно группы здоровых испытуемых практически во всех отведениях, на рекуррентных диаграммах уменьшается количество и протяженность диагональных структур. Вторая

подгруппа отличается от группы здоровых повышением времени задержки, снижением размерности внедрения, а на рекуррентных диаграммах наблюдается большое количество четко выраженных диагональных линий. То есть можно предположить усложнение ЭЭГ в первой подгруппе больных и упрощение во второй относительно ЭЭГ здоровых. Это можно объяснить тем, что существуют 2 механизма формирования данного заболевания: центральный и периферический. Как известно, центральный тип возникновения НТН предполагает формирование в головном мозге очага патологической импульсации. При этом на ЭЭГ наблюдается генерализованная эпилептиформная активность, ЭЭГ более синхронизована, чем у здоровых. Этим можно объяснить тенденцию упрощения нелинейной динамики во 2 подгруппе больных. Периферический тип формирования тригеминальной невралгии, наоборот, предполагает десинхронизацию и активацию ЭЭГ, чем можно объяснить тенденции изменения нелинейных показателей, характерные для первой подгруппы.

Примечания:

1. Хакен Г. Принципы работы головного мозга: Синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. М.: ПЕР СЭ, 2001. 351 с.
2. Гусев Е.И., Коновалов А.Н., Скворцова В.И., Гехт А.Б. Неврология. Национальное руководство. ГЭОТАР-Медиа, 2010. 1112 с.
3. Домашняя страница программы нелинейного анализа временны́х рядов Visual Recurrence analysis <http://nonlinear.110mb.com/vra/>
4. D. Ruelle and F. Takens. "On the nature of turbulence". Communications in Mathematical Physics 20 (3), 1971, pp. 167-192.
5. F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and L.-S. Young. Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898. Springer-Verlag. 1981, pp. 366-381.
6. Меклер А.А. Применение аппарата нелинейного анализа динамических систем для обработки сигналов ЭЭГ./ Актуальные проблемы современной математики: учёные записки. Т. 13 (вып. 2), изд. ЛГУ им. А.С. Пушкина, СПб., 2004. 153 с.
7. Andrew M. Fraser and Harry L. Swinney "Independent coordinates for strange attractors from mutual information", Phys. Rev. A 33 (1986) pp. 1134-1140.
8. M. B. Kennel, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel, Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, Phys. Rev. A, 1992, 45, 3403.
9. S. Arya, D. M. Mount, N. S. Netanyahu, R. Silverman, and A. Y. Wu. An Optimal Algorithm for Approximate Nearest Neighbour Searching in Fixed Dimensions. Journal of the ACM, vol. 45, no. 6, pp. 891-923, 1998.
10. Eckmann J.-P., Kamphorst O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems.//Europhys. Lett., 4, p. 97 977, 1987.

References:

1. Khaken G. Printsipy raboty golovnogo mozga: Sinergeticheskii podkhod k aktivnosti mozga, povedeniyu i kognitivnoi deyatel'nosti. M.: PER SE, 2001. 351 s.
2. Gusev E.I., Kononov A.N., Skvortsova V.I., Gekht A.B. Nevrologiya. Natsional'noe rukovodstvo. GEOTAR-Media, 2010. 1112 s.
3. Domashnyaya stranitsa programmy nelineinogo analiza vremennykh ryadov Visual Recurrence analysis <http://nonlinear.110mb.com/vra/>
4. D. Ruelle and F. Takens. "On the nature of turbulence". Communications in Mathematical Physics 20 (3), 1971, pp. 167-192.
5. F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and L.-S. Young. Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898. Springer-Verlag. 1981, pp. 366-381.
6. Mekler A.A. Primenenie apparata nelineinogo analiza dinamicheskikh sistem dlya obrabotki signalov EEG./ Aktual'nye problemy sovremennoi matematiki: uchenye zapiski. T. 13 (vyp. 2), izd. LGU im. A.S. Pushkina, S.-Pb., 2004 g., 153 str., str. 112 – 140.
7. Andrew M. Fraser and Harry L. Swinney "Independent coordinates for strange attractors from mutual information", Phys. Rev. A 33 (1986) pp. 1134-1140.

8. M. B. Kennel, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel, Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, Phys. Rev. A, 1992, 45, 3403.
9. S. Arya, D. M. Mount, N. S. Netanyahu, R. Silverman, and A. Y. Wu. An Optimal Algorithm for Approximate Nearest Neighbour Searching in Fixed Dimensions. Journal of the ACM, vol. 45, no. 6, pp. 891-923, 1998.
10. Eckmann J.-P., Kamphorst O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems.//Europhys. Lett., 4, p. 97 977, 1987.

УДК 612.8:51-76

Особенности нелинейной динамики электроэнцефалограмм больных невралгией тройничного нерва

¹ Виталий Петрович Омельченко

² Ирина Олеговна Михальчич

¹ Ростовский государственный медицинский университет, Российская Федерация
344022, г. Ростов-на-Дону, пер. Нахичеванский, 29

Доктор биологических наук, профессор

E-mail: vitaly.omelchenko@mail.ru

² Ростовский государственный медицинский университет, Российская Федерация
344022, г. Ростов-на-Дону, пер. Нахичеванский, 29

Старший лаборант

E-mail: irisa-irisa@bk.ru

Аннотация. В статье рассмотрено применение методов нелинейной динамики к исследованию электроэнцефалограмм больных невралгией тройничного нерва. Рассчитаны показатели времени задержки и размерности внедрения, построены рекуррентные диаграммы ЭЭГ здоровых испытуемых и больных НТН. Выявлены значимые отличия нелинейной динамики ЭЭГ больных тригеминальной невралгией от ЭЭГ в норме.

Ключевые слова: электроэнцефалограмма; невралгия тройничного нерва; нелинейная динамика; теория динамического хаоса; время задержки; размерность внедрения; рекуррентная диаграмма.