Doi: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2014 **Issue:** 12 **Volume:** 20

Published: 30.12.2014 **http://www.T-Science.org**

Vadim Nikolaevich Lesev
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Chief of the Department of Differential Equations of
Kabardino-Balkarian State University, Russia
diff@kbsu.ru

Maryana Adibovna Shardanova
Undergraduate of mathematical faculty of
Kabardino-Balkarian State University, Russia
shardanova2010@yandex.ru

SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

ABOUT SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE INHOMOGENEOUS EQUATION OF HING ORDER WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract: *The solvability of the classical edge task for the inhomogeneous equation in partial fourth- order derivatives has been proven. The method of the finite integral transformations has been used to prove the existence of the solution.*

Key words: *high-order equation, edge task, proof of the existence of solution method of finite integral transformations.*
Language: *Russian*
Citation: Lesev VN, Shardanova MA (2014) ABOUT SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE INHOMOGENEOUS EQUATION OF HING ORDER WITH VARIABLE COEFFICIENTS. ISJ Theoretical & Applied Science 12 (20): 101-103. doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2014.12.20.22

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация: *В работе доказана разрешимость классических краевых задач для неоднородного уравнения в частных производных четвертого порядка. Для доказательства существования решения использован метод конечных интегральных преобразований.*
Ключевые слова: *уравнения высокого порядка, краевая задача, доказательство существования решения, метод конечных интегральных преобразований.*

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день, в математической литературе имеется достаточно работ в которых исследуются задачи [1-7] для уравнений четвертого порядка. Широкий анализ публикаций по данному направлению проведен в работе [8].

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса разрешимости краевых задач для уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами в прямоугольной области посредствам конечных интегральных преобразований Фурье.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\Omega = \{z : 0 < x < \ell,\ 0 < t < h\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x,t)$ рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x,t), \qquad (1)$$

где ℓ, h – положительные величины,

$$L = \frac{\partial^4}{dx^4} + a(t)\cdot\frac{\partial^4}{dx^2dt^2} + b(t)\cdot\frac{\partial^4}{\partial t^4} + $$
$$+ c(t)\cdot\frac{\partial^3}{\partial t^3} + d(t)\cdot\frac{\partial^3}{\partial x^2 dt} + e(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} + $$
$$+ f(x)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g(t)\cdot\frac{\partial}{\partial t} + h(t),$$

$a(t), b(t), \ldots F(x,t)$ – заданные непрерывные функции.

Обозначим через J отрезок $(0,1)$ оси абсцисс.

Задача A₁. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса

$C^2(\overline{\Omega}) \cap C_t^4(\Omega \cup \bar{J})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=\varphi_1(t), \qquad u(\ell,t)=\psi_1(t), \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t)=\varphi_2(t), \qquad u_{xx}(\ell,t)=\psi_2(t), \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u(x,0)=\gamma_1(x), \quad u_t(x,0)=\gamma_2(x), \\ u_{tt}(x,0)=\gamma_3(x), \quad u_{ttt}(x,0)=\gamma_4(x), \end{gathered} \tag{4}$$

и условиям согласования $\varphi_1(0)=\gamma_1(0)$, $\gamma_1(l)=\psi_1(0)$, где $\varphi_i(t), \psi_i(t)$, ($i = 1,2$) и $\gamma_j(t)$, ($j = \overline{1,4}$) – заданные достаточно гладкие функции.

Задача А₂. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $C^3(\overline{\Omega}) \cap C_t^4(\Omega \cup \bar{J})$, удовлетворяющее всем условиям задачи А₁, кроме условий (2), (3), которые заменены условиями

$$u_x(0,t)=\varphi_1(t), \quad u_x(\ell,t)=\psi_1(t),$$
$$u_{xxx}(0,t)=\varphi_2(t), \quad u_{xxx}(\ell,t)=\psi_2(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ

Остановимся на исследовании задачи А₁ более подробно. Применяя к уравнению (1) конечное синус-преобразование Фурье по переменной x [9.стр.75]:

$$S[u] = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \tag{5}$$

и принимая во внимание условия (2), (3), получим

$$\begin{gathered} b(t)\cdot\frac{d^4\bar{u}_n}{dt^4} + c(t)\cdot\frac{d^3\bar{u}_n}{dt^3} + p(t)\cdot\frac{d^2\bar{u}_n}{dt^2} + \\ + q(t)\cdot\frac{d\bar{u}}{dt} + r(t)\cdot\bar{u}_n = s(t), \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$p(t) = f(t) - a(t)\cdot\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

$$q(t) = g(t) - d(t)\cdot\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

$$r(t) = h(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - e(t)\cdot\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4,$$

$$\begin{aligned} s(t) = \bar{F}(t) &+ \frac{2n\pi}{l^2}\cdot\left\{\left[\varphi_1(t) + (-1)^{n+1}\cdot\psi_1(t)\right]\cdot\right. \\ &\cdot\left[\frac{(\pi n)^2}{l} - e(t)\right] - \varphi_2(t) + (-1)^n\cdot\psi_2(t) - a(t)\cdot \\ &\cdot\frac{d^2}{dt^2}\cdot\left[\varphi_1(t) + (-1)^{n+1}\cdot\psi_1(t)\right] - d(t)\cdot\frac{d}{dt}\cdot \\ &\left.\cdot\left[\varphi_1(t) + (-1)^{n+1}\cdot\psi_1(t)\right]\right\}, \end{aligned}$$

$\bar{u}_n(t)$, $\bar{F}(t)$–результат преобразования функций $u(x,t)$ и $F(x,t)$соответственно. Коэффициенты и правые части уравнений (6) непрерывны, а следовательно по хорошо известной теореме об общем решении неоднородного дифференциального уравнения, например [10. стр. 107], соответствующие им общие решения могут быть представлены в виде:

$$\bar{u}_n(t) = \Phi(t, n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \tag{7}$$

где λ_i ($i = \overline{1,4}$) – произвольные постоянные нуждающиеся в определении.

Замечание 1. Представление (7) имеет место при $b(t) \neq 0$ и $c(t) \neq 0$. Случаи, когда:

1) $b(t) = 0$, $c(t) \neq 0$;

2) $b(t) = c(t) = 0$;

требуют особого рассмотрения, т.к. тогда уравнение (6) вырождается в уравнение третьего или второго порядка соответственно, а следовательно задачи А₁, А₂ становятся переопределенными. Поэтому в первом случае для устранения некорректности задач надо вывести из рассмотрения одно, а во втором - два из условий входящих в (4).

Для получения соотношений позволяющих определить постоянные λ_i ($i = \overline{1,4}$) применим (5) к граничным условиям (4), будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \gamma_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\\
&\left.\frac{d\bar{u}_n}{dt}\right|_{t=0}=\frac{2}{l}\int_0^l \gamma_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\\
&\left.\frac{d^2\bar{u}_n}{dt^2}\right|_{t=0}=\frac{2}{l}\int_0^l \gamma_3(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\\
&\left.\frac{d^3\bar{u}_n}{dt^3}\right|_{t=0}=\frac{2}{l}\int_0^l \gamma_4(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,
\end{aligned}\qquad (8)$$

Удовлетворяя (7) условиям (8), находим соотношения для постоянных λ_i $(i=\overline{1,4})$. Таким образом, вопрос разрешимости задачи A_1 эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости последовательности ОДУ для коэффициентов Фурье. Применяя обратное конечное синус-преобразование, получаем решение задачи A_1 в области Ω в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Замечание 2. Задача A_2 исследуется аналогично, но вместо преобразования (5) используется конечное косинус-преобразование Фурье.

Замечание 3. Начальные условия (4) могут быть заменены любыми другими, позволяющими однозначно находить частные решения соответствующих задач для уравнения (6).

References:

1. Lesev VN, Shardanova MA (2014) Primenenie metoda konechnykh integral'nykh preobrazovaniy k issledovaniyu kraevoy zadachi dlya uravneniya vysokogo poryadka. ISJ Theoretical & Applied Science. 2014. № 5 (13). – pp. 1-4. doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2014.05.13.1
2. Lesev VN, Shardanova MA (2014) Issledovanie razreshimosti klassicheskoy kraevoy zadachi dlya neodnorodnogo uravneniya chetvertogo poryadka // Materialy IV mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Aktual'nye napravleniya fundamental'nykh prikladnykh issledovaniy. 2014. Tom 1. – pp. 200-201.
3. Dumaeva LV, Lesev VN (2006) Lokal'naya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya giperbolicheskogo tipa chetvertogo poryadka // Tezisy dokladov Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii studentov, aspirantov, i molodykh uchenykh. 2006. T.2. – pp. 239-242.
4. Ayshaev KM, Lesev VN (2007) K teorii nelineynykh uravneniy vysokogo poryadka// Materialy Mezhdunarodnogo kongressa studentov, aspirantov i molodykh uchenykh: Perspektiva – 2007. Nal'chik. - pp.162-163.
5. Amanov D, Murzambetova MB (2013) Kraevaya zadacha dlya uravneniya chetvertogo poryadka s mladshim chlenom // Vestnik udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki, 2013. Vyp. 1. – pp. 3-10.
6. Eleev VA, Laypanova AM, Lesev VN (2008) O razreshimosti kraevoy zadachi dlya smeshannogo uravneniya metodom konechnykh integral'nykh preobrazovaniy v pryamougol'noy oblasti // Vestnik Kabardino-Balkarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya matematicheskie nauki. 2008. V. 5. – pp. 32-35.
7. Lesev VN (2006) Issledovanie razreshimosti kraevykh zadach dlya uravneniya chetvertogo poryadka metodom konechnykh integral'nykh preobrazovaniy // Materialy mezhdunarodnoy konferentsii: Sovremennye problemy matematiki. 2006. – pp.44-46.
8. Dzhuraev TD, Sopuev A (2000) K teorii differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka. – Tashkent: Fan, - 144.
9. Farlou S (1985) Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov: Per. s angl. – Moscow: Mir. 1985. – 384.
10. El'sgol'ts LE (1969) Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie. – Moscow: Nauka.- 424