SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Vadim Nikolaevich Lesev
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Chief of the Department of Differential Equations of
Kabardino-Balkarian State University, Russia
diff@kbsu.ru

Maryana Adibovna Shardanova
Undergraduate of mathematical faculty of
Kabardino-Balkarian State University, Russia
shardanova2010@yandex.ru

THE APPLICATION OF THE METHOD OF FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS TO THE STUDY OF THE CLASSICAL EDGE TASK FOR THE EQUATIONS OF HIGH ORDER

***Abstract**: The solvability of the classical edge task for the inhomogeneous equation in partial fourth- order derivatives has been proven. The method of the finite integral transformations has been used to prove the existence of the solution.*

***Key words**: high-order equation, edge task, proof of the existence of solution method of finite integral transformations.*

УДК 517.954

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

***Аннотация**: В работе доказана разрешимость классической краевой задачи для неоднородного уравнения в частных производных четвертого порядка. Для доказательства существования решения использован метод конечных интегральных преобразований.*

***Ключевые слова**: уравнения высокого порядка, краевая задача, доказательство существования решения, метод конечных интегральных преобразований.*

Решение методов исследования краевых задач для уравнений в частных производных является важным направлением в общей теории дифференциальных уравнений. Причем, во многом применение именно того или иного метода формирует достаточные условия разрешимости краевой задачи. Характерные отличия в использовании различных методов на примере уравнений высокого порядка могут и быть выявлены на сравнении результатов работ [1-5] и [6-8].

В настоящей работе проведено исследование краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка в односвязной области, основанное на применении метода конечных интегральных преобразований.

В области $\Omega=\{z:0<x<L,0<t<T\}$ ($L,T=const>0$) евклидовой плоскости точек $z(x,t)$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxtt}+\alpha\cdot u_{tt}+\beta\cdot u=f(x,t), \qquad (1)$$

где $\alpha,\beta-$ заданные постоянные, $f(x,t)-$ заданная функция.

Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая задача:

Задача. Найти регулярное в Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\qquad u(l,t)=\varphi_2(t),\qquad 0\le t\le T \tag{2}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\quad u_t(x,0)=\nu(x),\quad 0\le x\le L, \tag{3}$$

где $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\tau(x),\nu(x)-$ заданные функции, причем $\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,t],\quad \tau,\nu\in C[0,l]$.

Применяя конечное синус-преобразование Фурье по пространственной переменной x [9.стр.75]:

$$\bar{u}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)u(x,t)dx, \tag{4}$$

к уравнению (1), будем иметь

$$p\cdot\bar{u}''(t)+\beta\cdot\bar{u}(t)=q, \tag{5}$$

где

$$p\left[\alpha-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right], q=\bar{f}(t)-\frac{2\pi n}{l^2}\cdot\left[\varphi_1{}''(t)-\varphi_2{}''(t)(-1)^n\right], n=\overline{1,\infty},$$

а $f(t)-$результат преобразования функции $f(x,t)$.

Полагая $\alpha\ne\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ из (5), находим

$$\bar{u}''(t)+a\cdot\bar{u}(t)=b, \tag{6}$$

где $a=\dfrac{\beta}{p}, b=\dfrac{q}{p}$.

Условия (3) с учетом (4), принимают вид:

$$\bar{u}(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\tau(x)dx,\qquad \bar{u}(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\nu(x)dx. \tag{7}$$

Таким образом, вопрос разрешимости задачи (1)-(3) редуцирован к вопросу разрешимости задачи Коши (6), (7) относительно $\bar{u}(t)$.

Для полного исследования задачи (1)-(3) необходимо рассмотреть следующие случаи: 1) задача однородна $(b\equiv 0)$ 2) коэффициент β в уравнении (1) равен 0 $(a=0)$ 3) задача не однородна и $\beta\ne 0$. Легко заметить, что первые два случая трудности в исследовании не представляют. Остановимся более подробно на последнем случае.

Так как (6) представляет собой уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом (например, n каждый раз фиксирован), то соответствующее характеристическое уравнение, имеет вид:

$$k^2+a=0$$

а его корни, определяются равенством:

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-a} \tag{8}$$

Как уже отмечалось выше, случай $a=0$ является простейшим, т.к. общее решение уравнения (6) находится путем двукратного интегрирования функции b:

$$\bar{u}(t)=\int dt\int bdt+\bar{c}_1\cdot t+\bar{c}_2, \tag{9}$$

где $\bar{c}_1,\bar{c}_2$ – постоянные, которые однозначно определяются из условий (7).

Пусть теперь $\frac{\beta}{\alpha \cdot l^2 - (\pi n)^2} < 0$, т.е. $a < 0$. Тогда, как известно (например [10. стр. 107]), общее решение однородного уравнения соответствующего уравнению (6), имеет вид:

$$\bar{u}(t) = c_1 \cdot e^{t\sqrt{-a}} + c_2 \cdot e^{-t\sqrt{-a}}. \tag{10}$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, из последнего равенства, с учетом (6), находим:

$$c_1'(t) = \frac{b(t)}{2 \cdot \sqrt{-a}} e^{-t\sqrt{-a}}, \qquad c_2'(t) = \frac{b(t)}{2 \cdot \sqrt{-a}} e^{t\sqrt{-a}}$$

Отсюда, будем иметь

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{-t\sqrt{-a}} dt + c_3 \\ c_2(t) &= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{t\sqrt{-a}} dt + c_4 \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получим

$$\bar{u}(t) = \frac{e^{t\sqrt{-a}}}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{-t\sqrt{-a}} dt + c_3 \cdot e^{t\sqrt{-a}} - \frac{e^{-t\sqrt{-a}}}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{t\sqrt{-a}} dt + c_4 \cdot e^{-t\sqrt{-a}} \tag{12}$$

Постоянные c_1, c_2 однозначно определяются из условий (7).

Аналогично, если величина l, коэффициенты α, β и значение параметра n таковы, что $\frac{\beta}{\alpha \cdot l^2 - (\pi n)^2} > 0$, т.е. $a > 0$ и корни характеристического уравнения (8) комплексные, то значение коэффициентов $\bar{u}(t)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \frac{\cos(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}} \cdot \int b(t) \cdot \sin(\sqrt{a}t) dt + \bar{c}_3 \cdot \cos(\sqrt{a}t) + \\ &+ \frac{\sin(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}} \cdot \int b(t) \cdot \cos(\sqrt{a}t) dt + \bar{c}_4 \cdot \sin(\sqrt{a}t) \end{aligned} \tag{13}$$

где $\bar{c}_3, \bar{c}_4$ –, постоянные, которые однозначно определяются из условий (7).

Применяя обратное конечное синус- преобразование:

$$u(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} \bar{u}(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{14}$$

получим искомое решение задачи (1)-(3) в виде ряда (14), коэффициенты которого, в зависимости от значений параметров l, α, β и n определяются равенствами (9),(10),(12) или (13).

References:

1. Айшаев К.М., Лесев В.Н. К теории нелинейных уравнений высокого порядка// Материалы Международного конгресса студентов, аспирантов и молодых ученых: Перспектива – 2007. Нальчик: Кааб.-Балк.ун-т.2007.-С.162-163.
2. Елеев В.А. Об одной задаче с нелокальным сдвигом для уравнения смешанного типа третьего порядка// Материалы второго Международного Российско-Казахского симпозиума « Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик. 2011.-С.69-71.

3. Елеев В.А., Балкизова А.Х. Об одной нелокальной задаче со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Известия КБГУ 2011. Т.1.,№4.- С.32-40.
4. Кешева А.А., Лесев В.Н. Краевая задача для смешанно-составного уравнения четвертого порядка // Сборник научных трудов SWorld.2013.-Т.11.№1.-С.89-92.
5. Лайпанова А.М.,Елеев В.А. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения третьего порядка со спектральным параметром // Вестник Северо-Осетинского ун-та. Естественные науки.-2013. Т.2.№1.-С.14-22.
6. Думаева Л.В., Лесев В.Н. Локальная краевая задача для неоднородного уравнения гиперболического типа четвертого порядка // Тезисы докладов Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов,\ и молодых ученых.- Нальчик: Кааб.-Балк. ун-т. 2006. Т.2.-С.239-242.
7. Елеев В.А., Лайпанова А.М., Лесев В.Н. О разрешимости краевой задачи для смешанного уравнения методом конечных интегральных преобразований в прямоугольной области // Вестник Кабардино-Балкарского государственного университета. Серия математические науки. Выпуск 5.2008.-С.32-35.
8. Лесев В.Н. Исследование разрешимости краевых задач для уравнения четвертого порядка методом конечных интегральных преобразований // Материалы международной конференции: Современные проблемы математики. Махачкала: 2006.-С.44-46.
9. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ.-М.: Мир.1985 .-384 с.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.:Наука.1969 .- 424 с.