

**SECTION 7. Mechanics and machine construction.**

**Sagat Zhunisbekov**

doctor of technical Sciences, Professor,  
academician of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, rector  
Taraz technical Institute, Kazakhstan  
[tar-ti@mail.ru](mailto:tar-ti@mail.ru)

**Alexandr Nikolayevich Shevtsov**

candidate of technical Sciences, President of International Academy  
International Academy of Theoretical & Applied Sciences, (USA, Sweden, Kazakhstan)  
[Shev\\_AlexXXXX@mail.ru](mailto:Shev_AlexXXXX@mail.ru)

**THE STUDY OF PEAK GROWTH OF FREE OSCILLATIONS OF MECHANICAL  
SYSTEMS WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM IN THE DELPHI  
ENVIRONMENT**

***Abstract:** This article describes a peak amplitudes and is considered a mechanical system with two degrees of freedom. The task of definition of the frequency of free vibrations of moving elements of the system. Developed algorithms for computer implementation. Computer model of a mathematical model is studied in interactive mode, giving researchers the ability to change the original parameters of the model.*

***Keywords:** mechanical system, computer model, algorithms, movable component, Delphi, free vibrations.*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПИКОВОГО РОСТА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В  
СРЕДЕ DELPHI**

***Аннотация:** В данной статье исследуется пиковый рост амплитуд и рассматривается механическая система с двумя степенями свободы. Решается задача определения частот свободных колебаний подвижных элементов системы. Разрабатываются алгоритмы компьютерной реализации. Компьютерная модель математической модели исследуется в интерактивном режиме, давая исследователю возможность менять исходные параметры модели.*

***Ключевые слова:** механическая система, компьютерная модель, алгоритмы, подвижный элемент, дельфи, свободные колебания.*

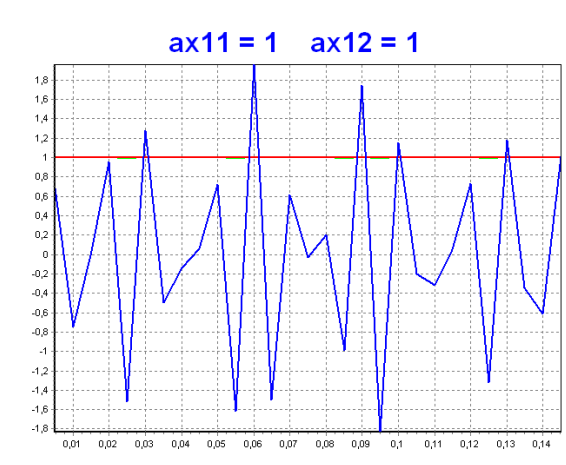
Рассматривая задачу определения частот свободных колебаний, форм главных колебаний системы с двумя степенями свободы [2, с.320], для задания Д.24.в.18 рис.233 [2, с.322, 3-5], получим пиковые характеристики колебаний и роста амплитуд (рис.1).

В основе задачи лежит система дифференциальных уравнений консервативной системы уравнений Лагранжа [6-7]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь кинетическую энергию системы задаем в виде:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3}{2} \left( \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R^2}{2} \left( \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2R} \right)^2$$



**Рисунок 1 – Пиковая функция колебания.**

А потенциальную энергию деформирования пружин:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 + \frac{1}{2} c_3 \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$$

Или после несложных преобразований:

$$T = \left( \frac{m_1}{2} + \frac{3m_3}{16} \right) \dot{x}_1^2 + \left( \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{16} \right) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{4} m_3 \dot{x}_1 \dot{x}_2$$

$$\Pi = \left( \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{8} c_3 \right) x_1^2 + \frac{1}{4} c_3 x_1 x_2 + \left( \frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{8} c_3 \right) x_2^2$$

Введя замену переменных, получим:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{x}_1^2 + 2a_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + a_{22} \dot{x}_2^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2)$$

где коэффициенты инерции определены как:

$$a_{11} = m_1 + \frac{3}{8} m_3$$

$$a_{12} = \frac{1}{4} m_3$$

$$a_{22} = m_2 + \frac{3}{8} m_3$$

а коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = c_1 + \frac{1}{4} c_3$$

$$c_{12} = \frac{1}{4} c_3$$

$$c_{22} = c_2 + \frac{1}{4} c_3$$

Вычислим производные, для системы уравнений (1)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= a_{11}\dot{x}_1 & \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= a_{22}\dot{x}_2 \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) &= a_{11}\ddot{x}_1 & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) &= a_{22}\ddot{x}_2 \\
 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 & \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= c_{12}x_1 + c_{22}x_2
 \end{aligned} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned}
 a_{11}\ddot{x}_1 &= -c_{11}x_1 - c_{12}x_2 \\
 a_{22}\ddot{x}_2 &= -c_{12}x_1 - c_{22}x_2
 \end{aligned} \tag{3}$$

Значит полученная система (3) описывает свободные колебания исходной системы (1), и может быть записана в неявном виде:

$$\begin{aligned}
 a_{11}\ddot{x}_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= 0 \\
 a_{22}\ddot{x}_2 + c_{12}x_1 + c_{22}x_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Частное решение системы (4) найдем в виде:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= A_{x_1} \sin(kt + \beta) \\
 x_2 &= A_{x_2} \sin(kt + \beta)
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $k$ - частота свободных колебаний,  $\beta$ - начальная фаза колебаний,  $A_{x_1}, A_{x_2}$  - амплитуды главных колебаний.

Уравнение частот получим в виде:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - c_{12}^2 = 0,$$

а корни соответственно:

$$k_{1,2} = \frac{a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} \pm \sqrt{(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})^2 - 4a_{11}a_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2a_{11}a_{22}}$$

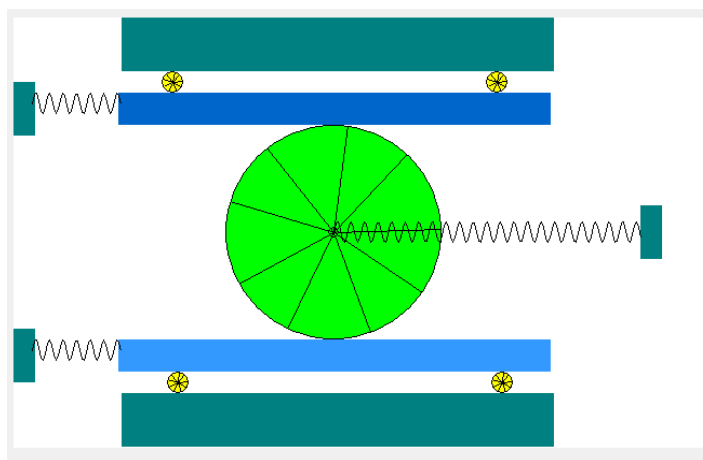
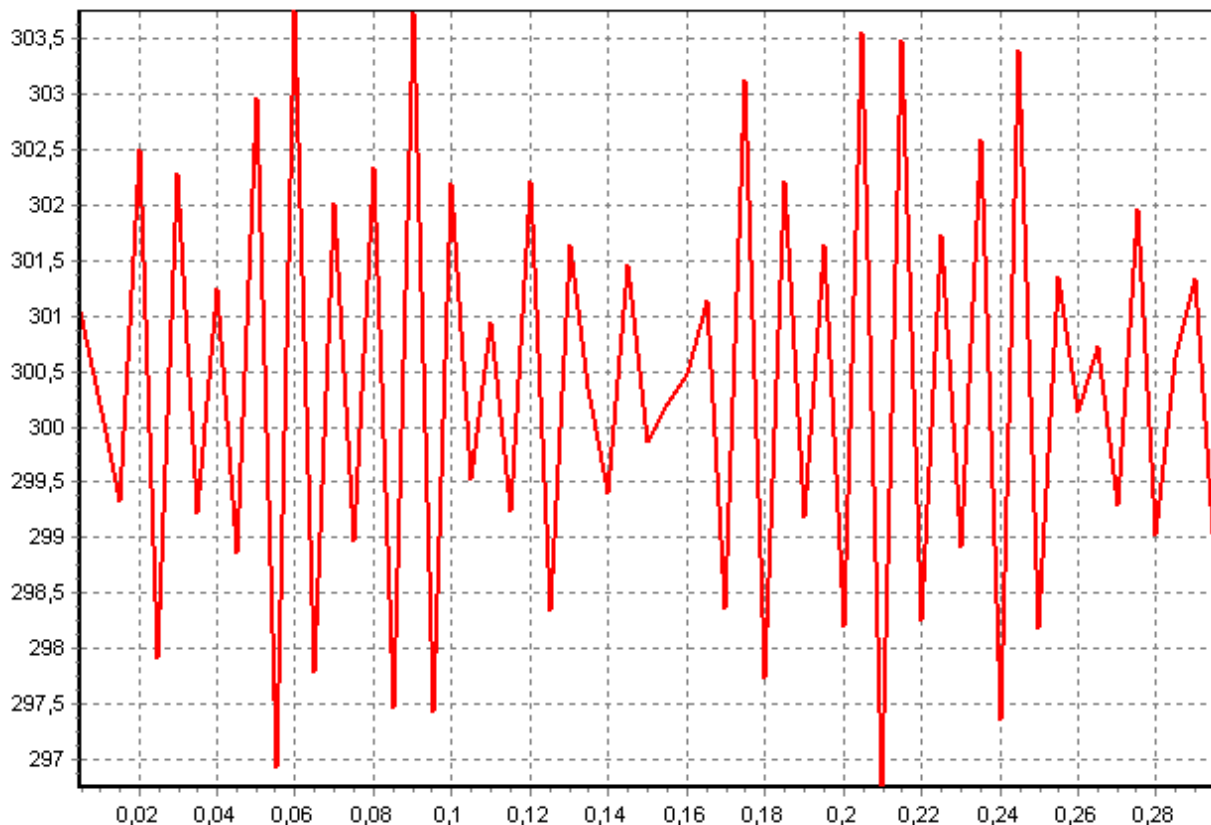


Рисунок 2 – Модель системы.



**Рисунок 3 - Абсолютная частота смещения  $x_1$  для узла  $x_0$ .**

Время на (рис. 3-5) зададим в секундах. Программу разработаем в среде Embarcadero Delphi XE4. Исследуем полученную модель при вариации амплитуд системы (1), полученные данные выведем в ассиметричной и симметричной форме (рис. 6-8).

**code: Delphi**

```

unit Unit1;
interface
uses
  Winapi.Windows, Winapi.Messages, System.SysUtils, System.Variants, System.Classes,
  Vcl.Graphics,
  math, Vcl.Controls, Vcl.Forms, Vcl.Dialogs, Vcl.StdCtrls, Vcl.Buttons, Vcl.ExtCtrls,
  VCLTee.TeEngine, VCLTee.Series, VCLTee.TeeProcs, VCLTee.Chart, Vcl.ComCtrls;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Timer1: TTimer;
    Panel1: TPanel;
    BitBtn1: TBitBtn;
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    Image1: TImage;
    TabSheet2: TTabSheet;
    Chart1: TChart;
  end;

```

```

Series1: TLineSeries;
Series2: TLineSeries;
Series3: TLineSeries;
Button1: TButton;
procedure BitBtn1Click(Sender: TObject);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
procedure Timer1Timer(Sender: TObject);
private
  { Private declarations }
public
  { Public declarations }
end;

var
  Form1: TForm1;
  ax11,
  ax12,
  b1,
  b2,
  x00,y00,R,x0,y0,x1,y1,x2,y2,
  t,dx0:double;
implementation

  {$R *.dfm}
function Okr(x0,y0,R:real):boolean;
var i:integer;
begin
  form1.image1.Canvas.Ellipse(trunc(x0-R),trunc(y0-R),trunc(x0+R),trunc(y0+R));
  for i := 0 to 8 do
  begin
    form1.image1.Canvas.MoveTo(trunc(x0),trunc(y0));
    form1.image1.Canvas.lineTo(trunc((x0+R*cos(dx0/100+i*30))),trunc(y0+R*sin(dx0/100+i*30)));
  end;
end;

function Kvad(x0,y0,xL,yL:real):boolean;
begin
  form1.image1.Canvas.Rectangle(trunc(x0),trunc(y0),trunc(x0+xL),trunc(y0+yL));
end;

function KvadColor(x0,y0,xL,yL:real;c:tcolor):boolean;
begin
  form1.image1.Canvas.Brush.Color:=c;
  form1.image1.Canvas.FillRect(rect(trunc(x0),trunc(y0),trunc(x0+xL),trunc(y0+yL)));
  form1.image1.Canvas.Brush.Color:=clwhite;
end;

function Pryz(x0,y0,x1,y1,R:real):boolean;
var i,j:integer;
h,x,y,v:real;

```

```

begin
form1.image1.Canvas.MoveTo(trunc(x0),trunc(y0));
v:=2;
for I := 1 to 14 do
for j := 180 to 540 do
begin
x:=x0+{R*cos(j)+}v;
y:=y0+R*sin(j);
form1.image1.Canvas.LineTo(trunc(x),trunc(y));
if x>x1 then exit;
x0:=x;
end;
end;

procedure TForm1.BitBtn1Click(Sender: TObject);
begin
form1.image1.Canvas.Brush.Color:=clwhite;
form1.image1.Canvas.FillRect(rect(0,0,1000,1000));
form1.image1.Canvas.Brush.Color:=clLime;
Okr(x0,y0,R);
Okr(x0,y0,5);

form1.image1.Canvas.Brush.Color:=clyellow;
Okr(x00-150+dx0,y00-140,10);
Okr(x00+150+dx0,y00-140,10);
Okr(x00-150-dx0,y00+140,10);
Okr(x00+150-dx0,y00+140,10);
form1.image1.Canvas.Brush.Color:=clwhite;
KvadColor(x1,y1,400,30,clHotLight);
KvadColor(x2,y2,400,30,clHighLight);
KvadColor(100,0,400,50,clTeal);
KvadColor(100,350,400,50,clTeal);
KvadColor(0,60,20,50,clTeal);
KvadColor(0,290,20,50,clTeal);
KvadColor(580,175,20,50,clTeal);
Pryz(x0,y0,580,y0,10);
Pryz(x1-80,y1+10,x1,y1+10,10);
Pryz(x1-80,y2+10,x2,y2+10,10);
end;

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
t:=0;
R:=100;
x0:=300; y0:=200;
x00:=300; y00:=200;
x1:=100; y1:=70;
x2:=100; y2:=300;
ax11:=1 ;
ax12:=1 ;
b1:=0 ;

```

```
b2:=0 ;
bitbtn1.Click;
end;

procedure TForm1.Timer1Timer(Sender: TObject);
begin
t:=t+1;
dx0:= ax11*sin(22.1*t+b1)-ax12*sin(29.2*t+b2);
x0:=x0+ dx0;
x1:=x1+dx0;
x2:=x2-dx0;
//if t<60 then series1.AddXY(t*5/1000,x0);
//if t<60 then series2.AddXY(t*5/1000,x1);
if t<30 then series1.AddXY(t*5/1000,x0/300);
if t<30 then series2.AddXY(t*5/1000,x1/100);
if t<30 then series3.AddXY(t*5/1000,dx0);
bitbtn1.Click;
if t>30 then begin
chart1.Title.Clear;
chart1.Title.Text.Add('ax11 = '+floattostr(ax11)+' ax12 = '+floattostr(ax12));
chart1.Update;
chart1.Repaint;
chart1.SaveToBitmapFile('ax11 '+floattostr(ax12)+''.bmp');
ax11:=ax11+10 ;
ax12:=ax12+10 ;
t:=0;
end;
if ax11>320 then application.Terminate;
if ax12>320 then application.Terminate;
end;
end.
```

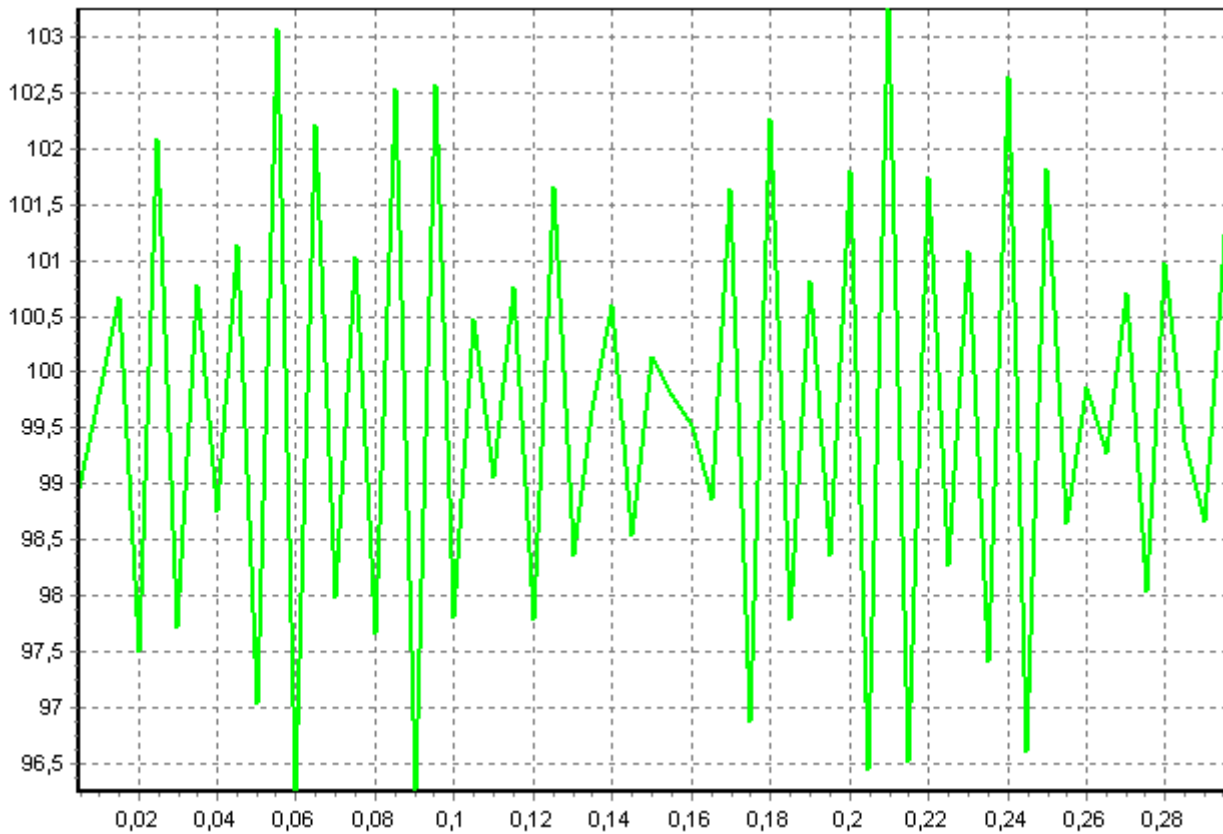


Рисунок 4 - Абсолютная частота смещения  $x_1$  для узла  $x_1$ .

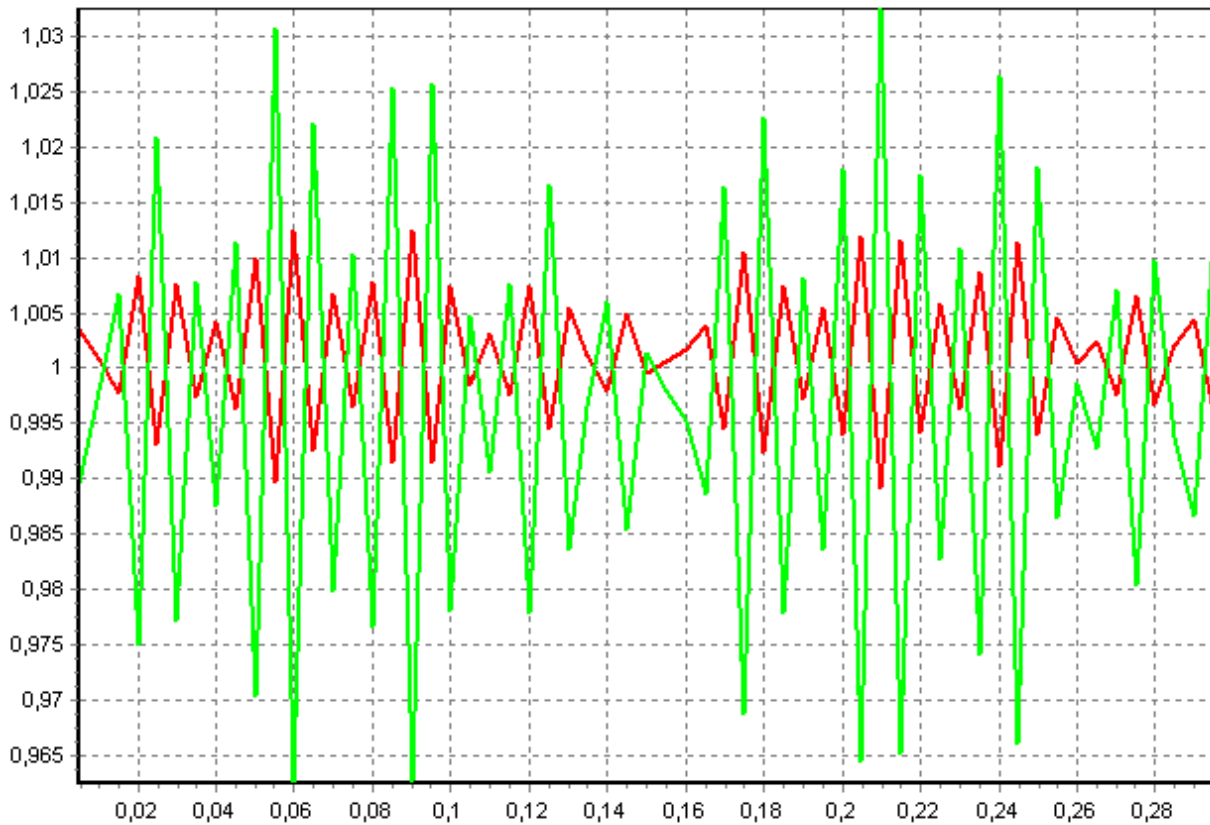
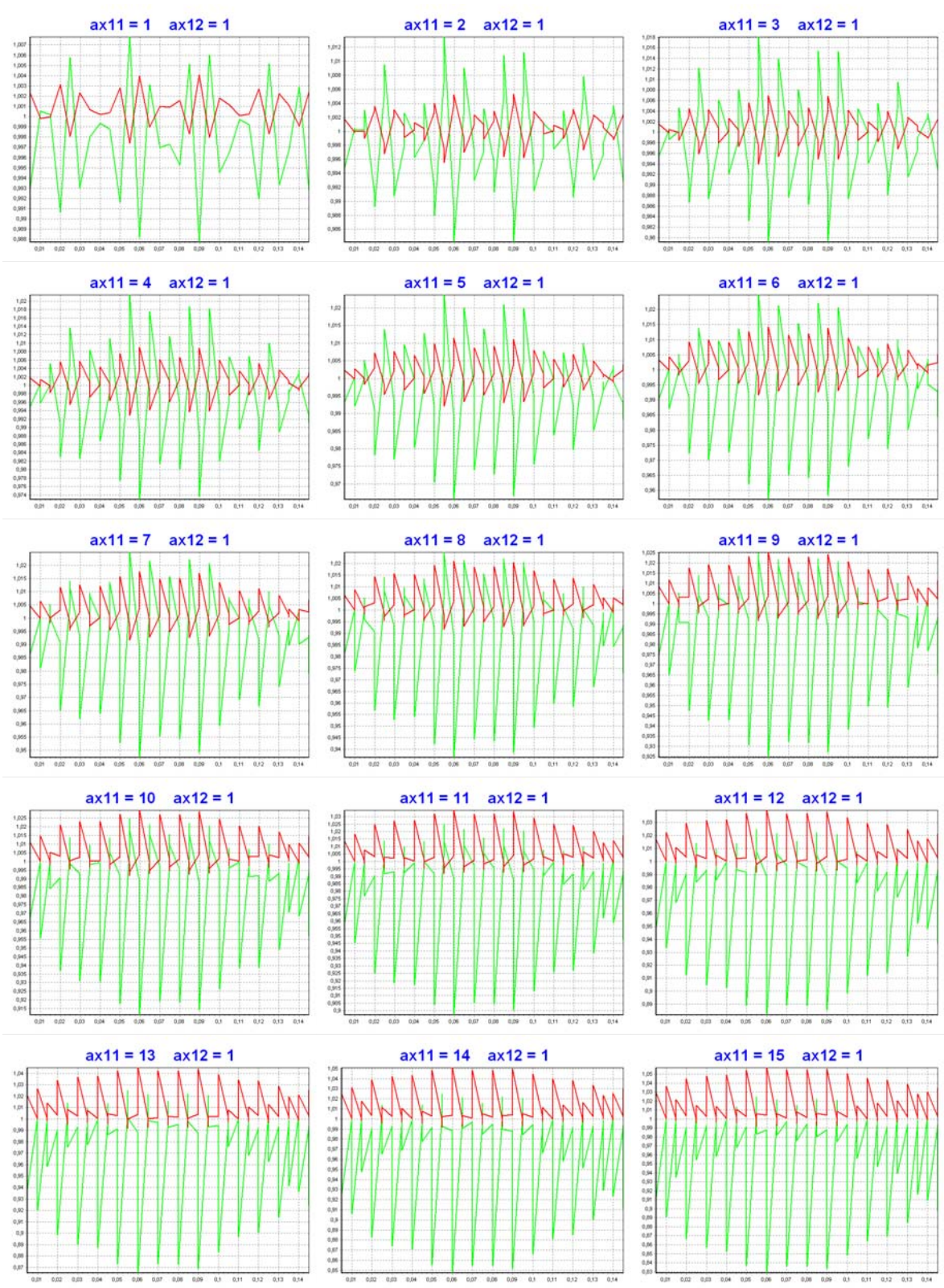


Рисунок 5 - Относительные частоты смещения узлов  $x_0$  и  $x_1$  по времени.







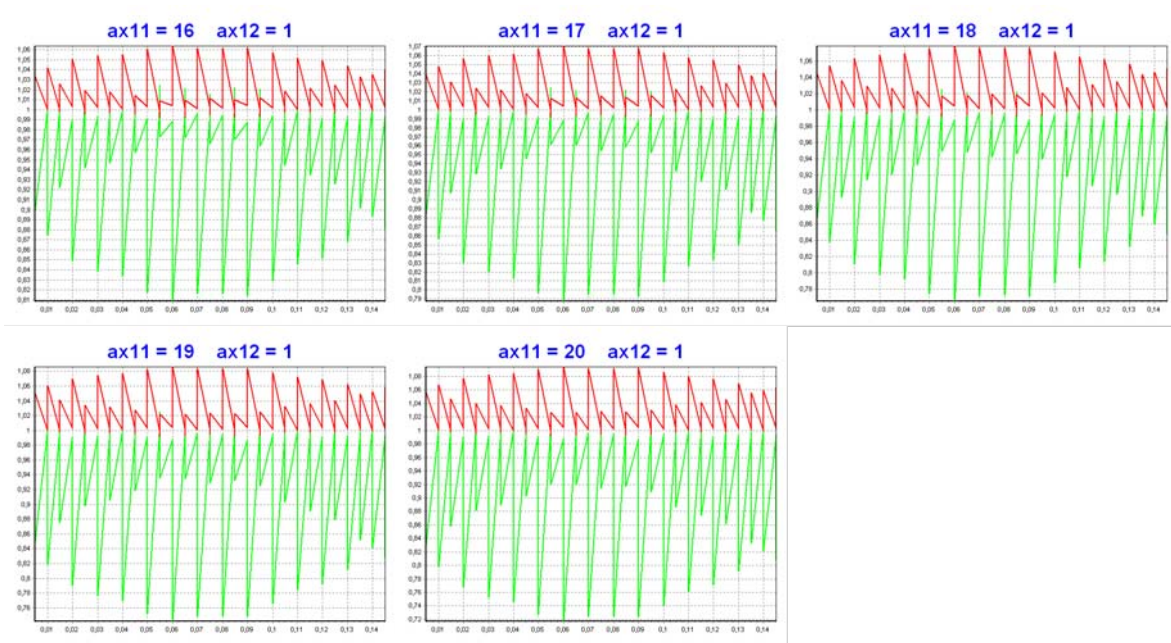
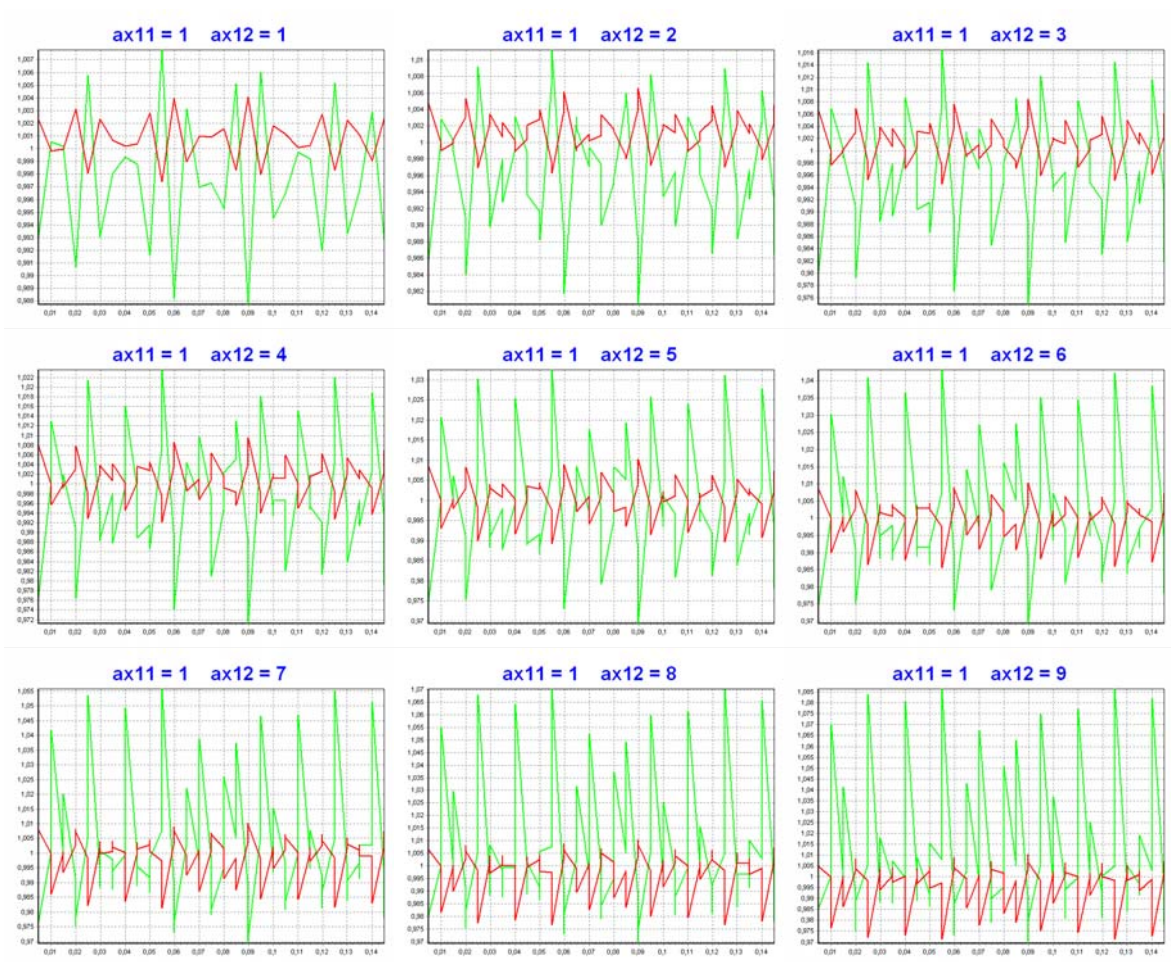


Рисунок 6 - Распределение амплитуд колебаний  $ax11$  при  $ax12 = const$ .





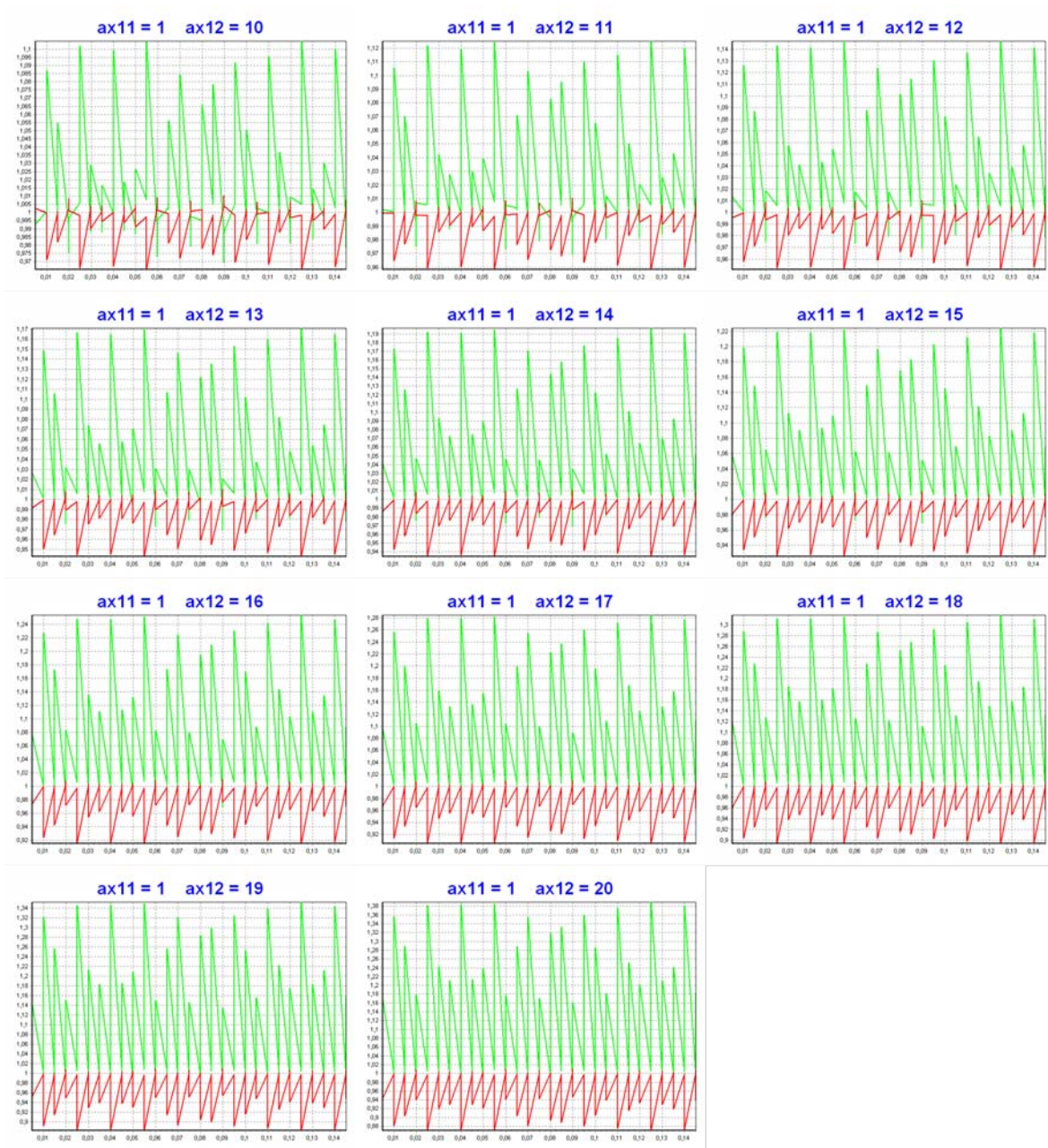
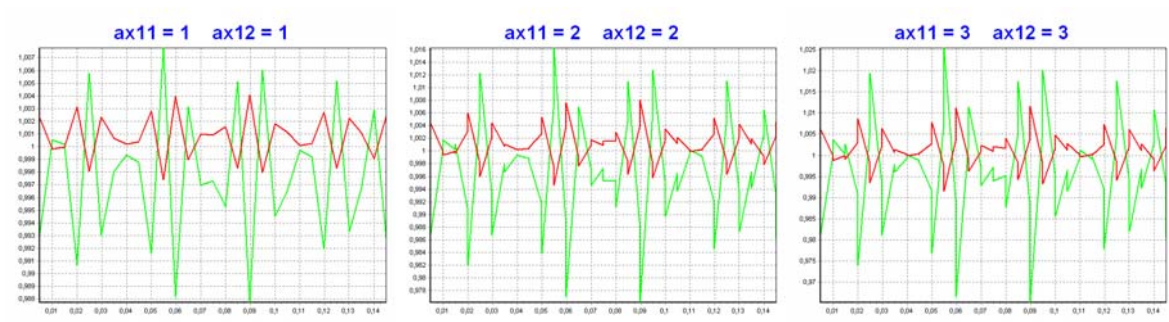
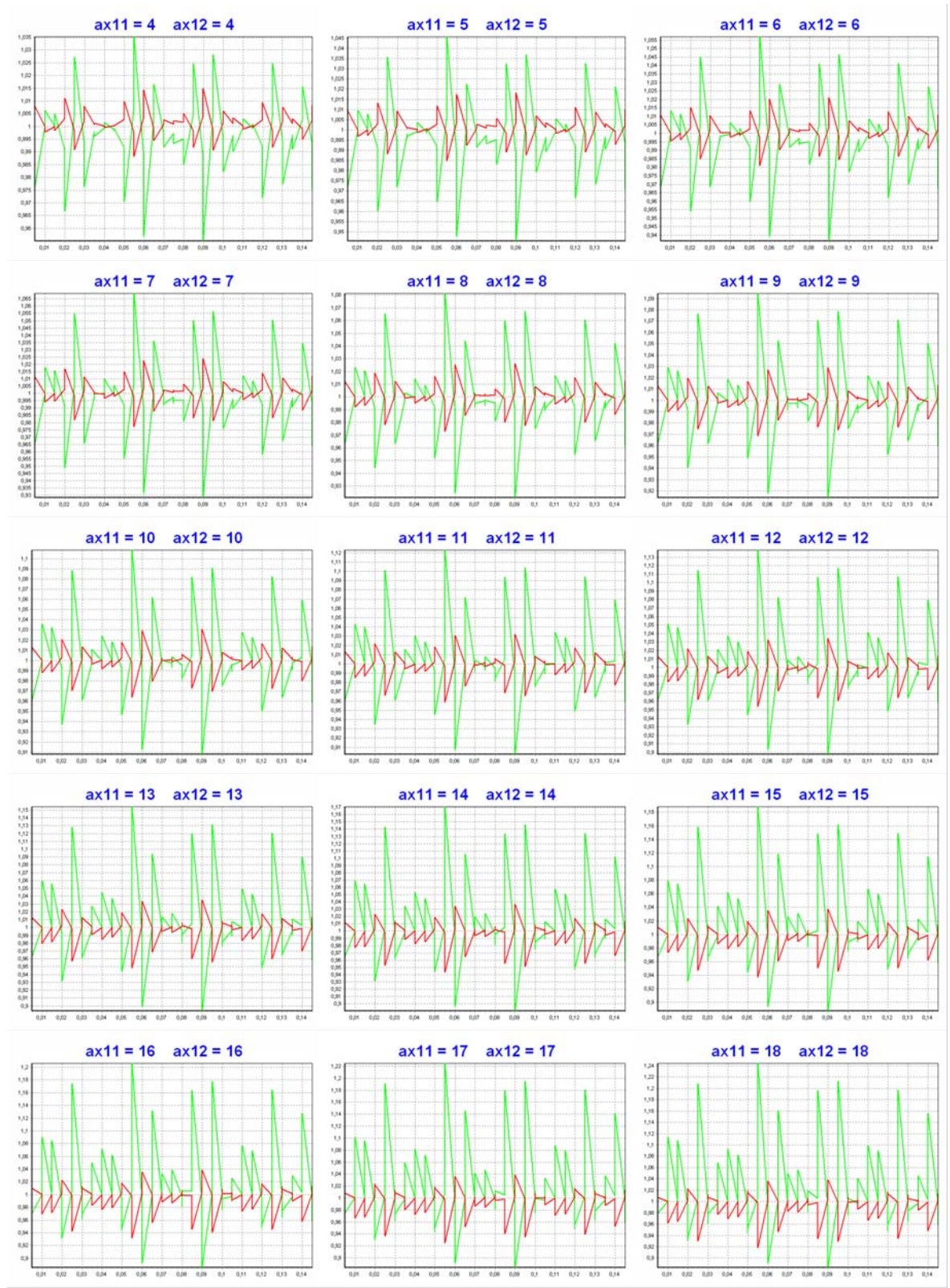


Рисунок 7 - Распределение амплитуд колебаний  $ax_{12}$  при  $ax_{11} = const$ .









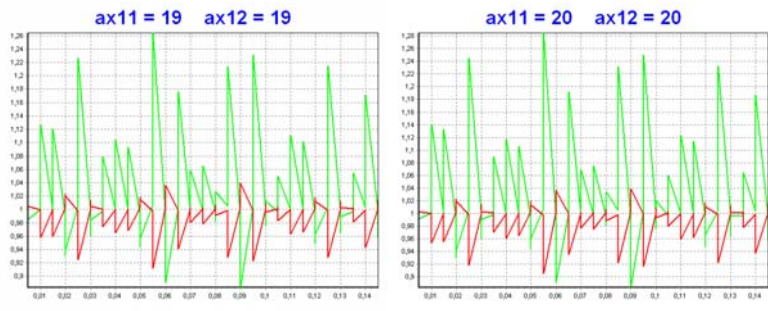
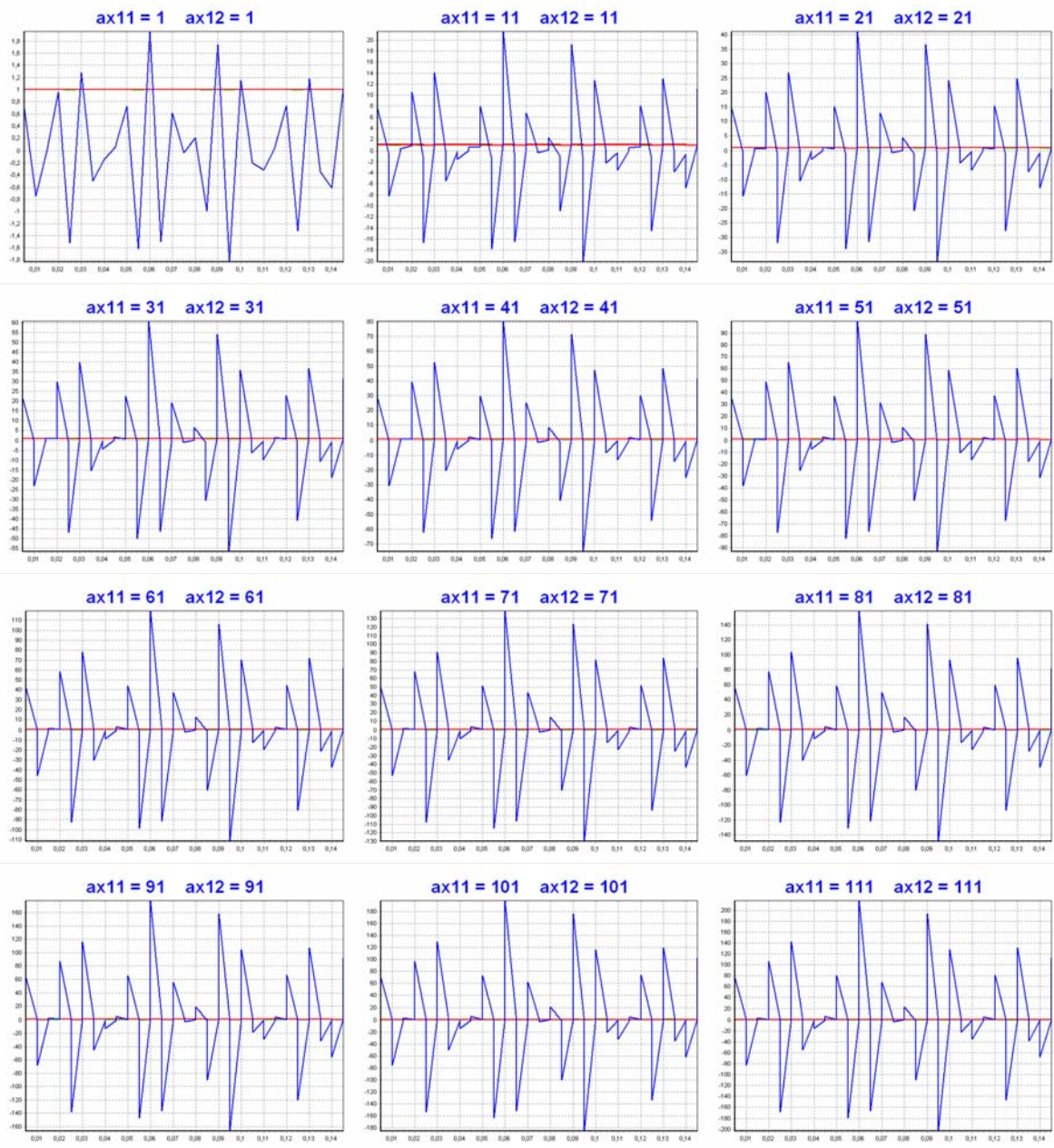
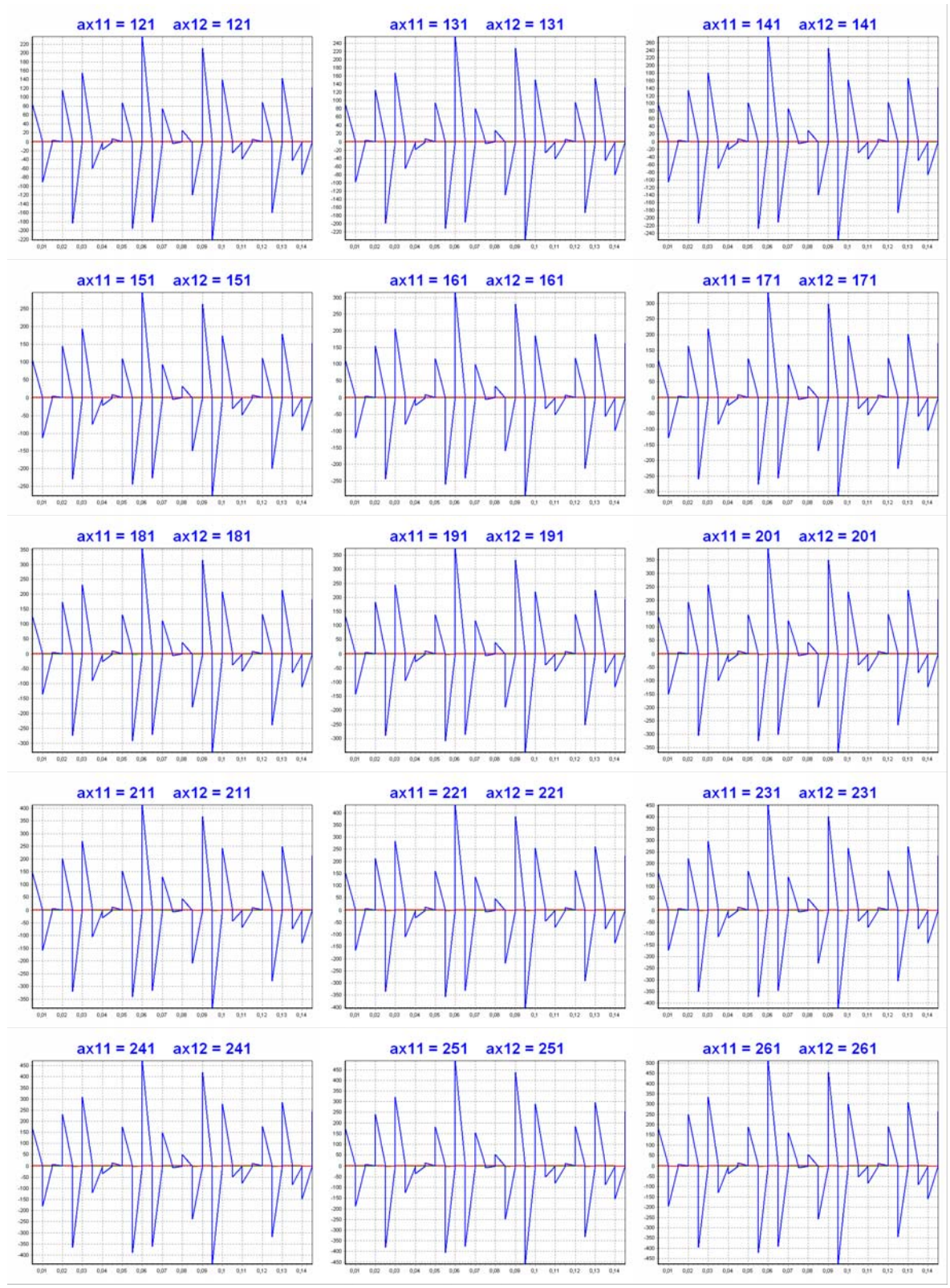


Рисунок 8 - Распределение амплитуд колебаний при  $ax11 - ax12 = 0$ .







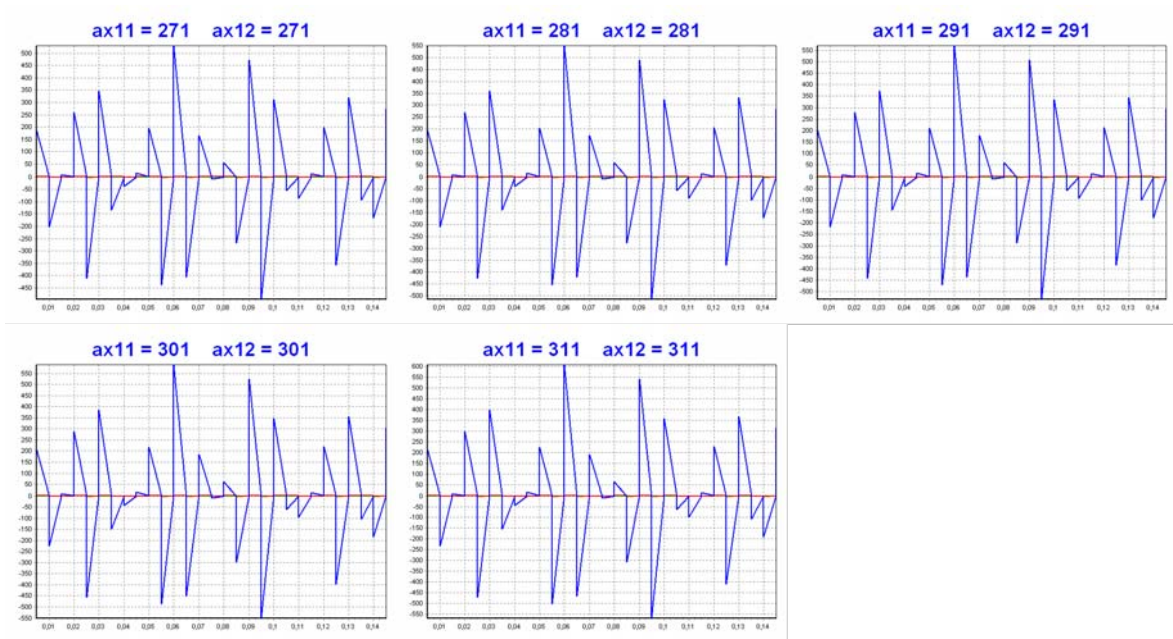
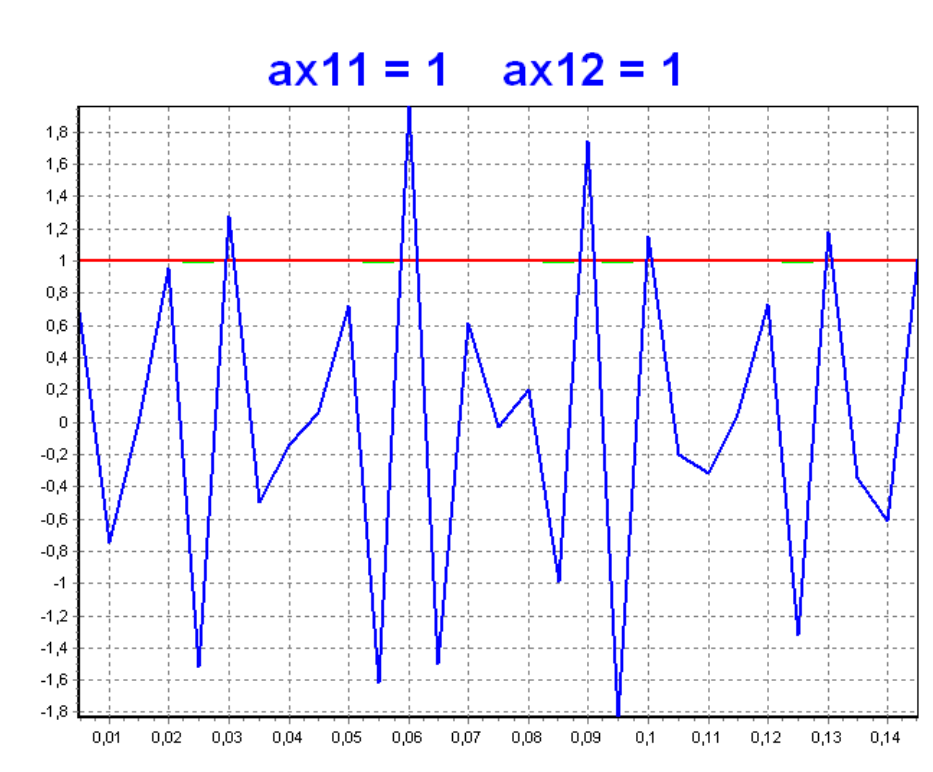
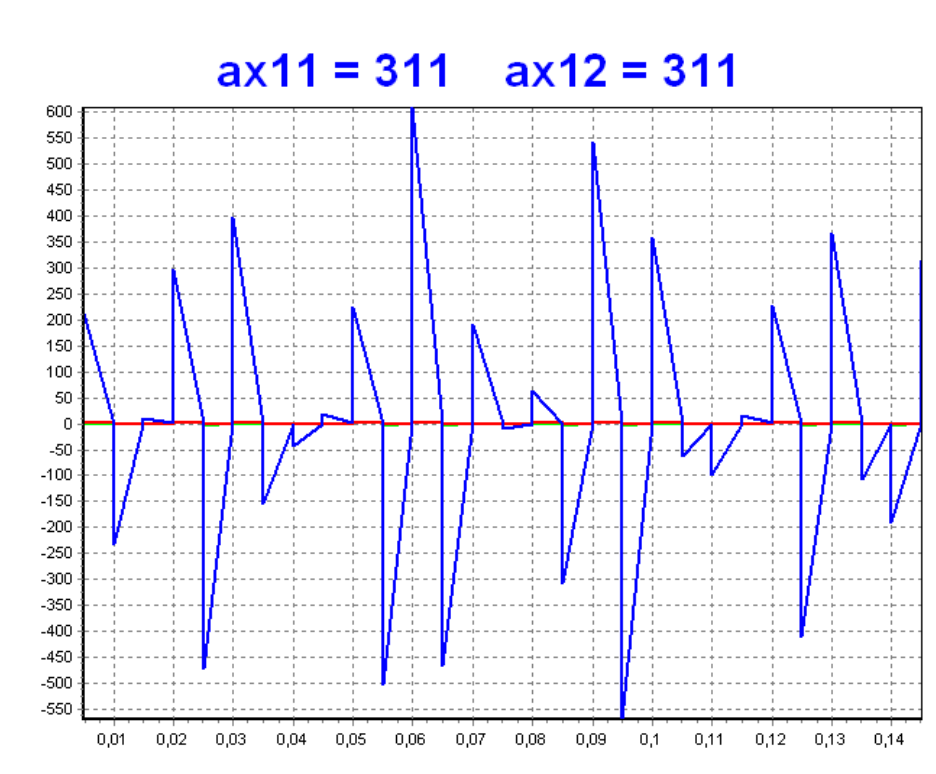


Рисунок 9 - Смещение функции (5) при  $ax_{11} - ax_{12} = 0$ .





**Рисунок 10 - Пиковый рост функции колебаний.**

#### **Заключение.**

Увеличение амплитуды неравномерно. Рост  $ax11$  приводит к сглаживанию верхней границы  $ax12$ , а  $ax12$  - к стабилизации частоты  $ax12$ . Симметричный рост амплитуд ведет к повышенному росту  $ax12$ , при увеличении частоты.

Полученные алгоритмы и результаты могут быть использованы при исследовании колебаний и построении моделей динамических механических систем подверженных воздействию собственных, свободных и вынужденных колебаний.

#### **References:**

1. ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВИБРАЦИИ. [Электронный ресурс] URL: [http://www.vibration.ru/osn\\_vibracii.shtml](http://www.vibration.ru/osn_vibracii.shtml) (дата доступа 22.04.2014)
2. Колебания механической системы (Д23, Д24, Д25, Д26) [Электронный ресурс] URL: [http://exir.ru/termeh/yablonskij/kolebaniya\\_mehanicheskoy\\_sistemy.htm](http://exir.ru/termeh/yablonskij/kolebaniya_mehanicheskoy_sistemy.htm) (дата доступа 22.04.2014)
3. Яблонский А.А. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике. М.: высш. шк., 1985. – 367с.
4. Решение задач [Электронный ресурс] URL: <http://www.twirpx.com/files/mechanics/termeh/yablonsky/> (дата доступа 22.04.2014)
5. Задачи из Яблонского [Электронный ресурс] URL: [http://www.teor-meh.ru/catalog/zadachi\\_iz\\_yablonskogo.html](http://www.teor-meh.ru/catalog/zadachi_iz_yablonskogo.html) (дата доступа 22.04.2014)
6. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ [Электронный ресурс] URL: [http://edu.dvgups.ru/metdoc/ENF/TEOR\\_MEX/TEOR\\_MEX/METOD/DINAMIKA/Zad7.htm](http://edu.dvgups.ru/metdoc/ENF/TEOR_MEX/TEOR_MEX/METOD/DINAMIKA/Zad7.htm) (дата доступа 22.04.2014)
7. Исследование уравнений Лагранжа [Электронный ресурс] URL: [http://alnam.ru/book\\_cm.php?id=25](http://alnam.ru/book_cm.php?id=25) (дата доступа 22.04.2014)



8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ [http://student-madi.ru/DLRs/BOOKS/BAZ-BOOK/DINAMIKA/Lekciya\\_21/Lekcia\\_21.mht/Lekcia\\_21.htm](http://student-madi.ru/DLRs/BOOKS/BAZ-BOOK/DINAMIKA/Lekciya_21/Lekcia_21.mht/Lekcia_21.htm) (дата доступа 22.04.2014)
9. Коэффициент инерции [Электронный ресурс] URL: [http://engineering\\_ru\\_en.enacademic.com/13517/%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82\\_%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%86%D0%B8%D0%B8](http://engineering_ru_en.enacademic.com/13517/%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82_%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%86%D0%B8%D0%B8) (дата доступа 22.04.2014)
10. Вертикальная динамика двухмассовой системы [Электронный ресурс] URL: <http://mathmod.narod.ru/models/Mdyn1/Mdyn1.htm> (дата доступа 22.04.2014)