SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Galiaskarova Guzeliya Rafkatovna
BASHKIR STATE UNIVERSITY Sterlitamak branch
candidat of physical and mathematical sciences, lecturer

A RELATION OF THE DARBOUX PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH A DEPARTURE FROM THE CHARACTERISTICS

The article deals with the problem of constructing solutions of the Darboux problem for the case of the Riemann method departing from the characteristics. A function of the Riemann-Hadamard for the specified region. Using the Riemann-Hadamard constructed a solution of the Darboux problem and obtained a relation on the characteristic equation.
Keywords: Darboux problem, the Riemann-Hadamard function, telegraph equation

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В статье рассматривается проблема построения решения задачи Дарбу методом Римана для случая отхода от характеристики. Построена функция Римана-Адамара для заданной области. Используя функцию Римана-Адамара, построено решение задачи Дарбу и получено соотношение на характеристике уравнения.
Ключевые слова: задача Дарбу, функция Римана-Адамара, телеграфное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{\xi\eta} + cu = 0\,, \tag{1}$$

где c – произвольное действительное число, в области $\Delta = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \eta < \alpha\xi < 1,\ \alpha > 1\}$
.

Для данного уравнения поставим задачу Дарбу:
Задача D'**.** Найти в области Δ функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям

$$u(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}), u_{\xi\eta} \in C(\Delta);\ Lu(\xi,\eta) \equiv 0,\ (\xi,\eta) \in \Delta,$$

$$u(\xi,\eta)\big|_{\eta=\alpha\xi} = \tau(\xi),\ 0 \le \xi \le \frac{1}{\alpha}\,;\ u(\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi} = \psi(\xi),\ 0 \le \xi \le 1\,;\ \psi(0) = \varphi(0).$$

Для решения задачи D' применим метод Римана-Адамара, который основан на так называемой функции Римана-Адамара. Ранее этот метод применялся в работах [1, с.73], [4, с.67],[3, с.71]. В частности, в работе [2, с.1] была построена функция Римана-Адамара для области, ограниченной прямыми $\eta = \xi,\ \xi = 0,\ \eta = 1$. В представленной статье характеристика уравнения $\xi = 0$ заменена прямой $\eta = \alpha\xi$, что значительно усложняет процесс построения функции.

Разобьем область Δ на следующие подобласти (в скобках указаны прямые, которые ограничивают указанные области:

$$\sigma_{2k} : \left\{\eta = \alpha\xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k}\right\},\ \sigma_{2k+1} : \left\{\eta = \alpha\xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}}\right\}$$

$$\omega_0=\left\{\eta=\eta_0,\xi=\xi_0,\eta=\xi_0,\xi=\frac{\eta_0}{\alpha}\right\}\ \omega_{2k}:\left\{\xi=\frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}\ \xi=\frac{\xi_0}{\alpha^k},\eta=\frac{\eta_0}{\alpha^k},\eta=\frac{\xi_0}{\alpha^k}\right\},$$

$$\omega_{2k+1}:\left\{\xi=\frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}\ \xi=\frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}},\eta=\frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}},\eta=\frac{\xi_0}{\alpha^k}\right\},\ \Delta_{2k+1}:\left\{\eta=\xi,\xi=\frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}},\eta=\frac{\xi_0}{\alpha^k}\right\}$$

$$\Delta_{2k}:\left\{\eta=\xi,\xi=\frac{\xi_0}{\alpha^k},\eta=\frac{\eta_0}{\alpha^k}\right\}.$$

Построим в области Δ функцию Римана-Адамара, задав её в каждой из указанных областей, следующим образом

1. $R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$, как функция от (ξ,η) является решением сопряженного уравнения $L^*u=0$, которое в данном случае является самосопряженным и, значит, совпадает с уравнением $Lu=0$.

2. $R_\xi=0$ на $\eta=\eta_0$; $R_\eta=0$ на $\xi=\xi_0$; $R=0$ на $\eta=\xi$ и $\eta=\alpha\xi$.

3. $\dfrac{\partial[R_1]}{\partial\xi}=0$, где $[R_1]=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(R(\xi;\frac{\xi_0}{\alpha^k}+\varepsilon;\xi_0;\eta_0)-R(\xi;\frac{\xi_0}{\alpha^k}-\varepsilon;\xi_0;\eta_0)\right)$

$\dfrac{\partial[R_2]}{\partial\xi}=0$, где $[R_2]=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(R(\xi;\frac{\eta_0}{\alpha^k}+\varepsilon;\xi_0;\eta_0)-R(\xi;\frac{\eta_0}{\alpha^k}-\varepsilon;\xi_0;\eta_0)\right)$

$\dfrac{\partial[R_3]}{\partial\eta}=0$, где $[R_3]=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(R(\frac{\xi_0}{\alpha^k}+\varepsilon;\eta;\xi_0;\eta_0)-R(\frac{\xi_0}{\alpha^k}-\varepsilon;\eta;\xi_0;\eta_0)\right)$

$\dfrac{\partial[R_4]}{\partial\xi}=0$, где $[R_4]=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(R(\frac{\eta_0}{\alpha^k}+\varepsilon;\xi;\xi_0;\eta_0)-R(\frac{\eta_0}{\alpha^k}-\varepsilon;\xi;\xi_0;\eta_0)\right)$

4. $R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=1$

Функция Римана-Адамара задачи D' определяется следующим образом

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}R_{\omega_0}=J_0\left(\sqrt{c(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right),\ (\xi,\eta)\in\omega_0,\\ R_{\sigma_{2k}}=R_{\omega_{2k}}-J_0\left(\sqrt{c\left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}}-\xi_0\right)(\alpha^{k+1}\xi-\eta_0)}\right),\ (\xi,\eta)\in\sigma_{2k},\\ R_{\sigma_{2k+1}}=R_{\omega_{2k+1}}+J_0\left(\sqrt{c(\alpha^{k+1}\xi-\xi_0)\left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}}-\eta_0\right)}\right),\ (\xi,\eta)\in\sigma_{2k+1},\\ R_{\Delta_{2k+1}}=R_{\omega_{2k+1}}-J_0\left(\sqrt{c(\alpha^k\eta-\xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^k}-\eta_0\right)}\right),\ (\xi,\eta)\in\Delta_{2k},\\ R_{\Delta_{2л+2}}=R_{\omega_{2k+2}}+J_0\left(\sqrt{c(\alpha^{k+1}\eta-\eta_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^{k+1}}-\xi_0\right)}\right),\ (\xi,\eta)\in\Delta_{2k+2},\\ R_{\omega_{2k+1}}=R_{\Delta_{2k+1}}-J_0\left(\sqrt{c(\alpha^k\xi-\eta_0)\left(\frac{\eta}{\alpha^k}-\xi_0\right)}\right),\ (\xi,\eta)\in\omega_{2k+1},\\ R_{\omega_{2k+2}}=R_{\Delta_{2k+2}}-J_0\left(\sqrt{c(\alpha^{k+1}\xi-\xi_0)\left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}}-\eta_0\right)}\right),\ (\xi,\eta)\in\omega_{2k+2}.\end{cases}$$

где $J_0(\cdot)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Запишем тождество Грина для оператора L:

$$u\cdot LR-R\cdot Lu=\frac{1}{2}\left(uR_\eta-Ru_\eta\right)_\xi+\frac{1}{2}\left(uR_\xi-Ru_\xi\right)_\eta$$

Выполняя стандартную процедуру, состоящую в интегрировании тождества Грина по области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и применении формулы Гаусса-Остроградского, получим

$$0 = \int_{\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)} \left(uR_\xi - Ru_\xi\right)d\xi - \left(uR_\eta - Ru_\eta\right)d\eta = I_{ED} + I_{DC} + I_{CB} + I_{BA} + I_{AE},$$

где $D = (\xi_0, \eta_0)$, $C = \left(\frac{\eta_0}{\alpha}, \eta_0\right)$, $B = \left(\frac{\xi_0}{\alpha}, \xi_0\right)$, $A = (0,0)$, $E = (\xi_0, \xi_0)$.

Вычислим интегралы $I_{ED}, I_{DC}, I_{CB}, I_{BA}, I_{AE}$:

$$I_{ED} = uR_1\Big|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1\Big|_D^C = -uR_1(C) + uR_1(D) = -\psi\left(\frac{\eta_0}{\alpha}\right) + u(\xi_0, \eta_0)$$

$$I_{AC} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) + \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta)\right)\Bigg|_{\eta=\alpha\xi} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\eta_0 - \alpha^{2n+1}\xi_0\right)}{2}\int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0\right)\left(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0\right)}}\tau(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\alpha^{2n+1}\eta_0 - \xi_0\right)}{2}\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \xi_0\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\eta_0\right)\left(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0\right)}}\tau(\xi)d\xi.$$

$$I_{AE} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) + \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta)\right)\Bigg|_{\eta=\xi} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\eta_0 - \alpha^{2n}\xi_0\right)}{2}\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n}\xi - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0\right)\left(\alpha^{n}\xi - \eta_0\right)}}\psi(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\alpha^{2n+1}\eta_0 - \xi_0\right)}{2}\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0\right)\left(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0\right)}}\psi(\xi)d\xi.$$

Подставляя, полученные интегралы в формулу и, проводя дополнительные преобразования, окончательно получим.

$$u(\xi,\eta) = \tau(\xi) + \psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) - \frac{c(\eta - \xi)}{4}\int_0^{\xi}\frac{J_1\left(\sqrt{c(t-\xi)(t-\eta)}\right)}{\sqrt{(t-\xi)(t-\eta)}}\tau(t)dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\eta - \alpha^{2n+1}\xi\right)}{4}\int_0^{\frac{\xi}{\alpha^n}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \xi)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^n t - \alpha^{2n}\xi\right)\left(\alpha^{n+1}t - \eta\right)}}\tau(t)dt +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\alpha^{2n+1}\eta-\xi\right)}{4}\int_{0}^{\frac{\eta}{\alpha^{n}}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}t-\eta)\left(\frac{t}{\alpha^{n}}-\xi\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^{n}t-\alpha^{2n}\eta\right)\left(\alpha^{n+1}t-\xi\right)}}\tau(t)dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\eta-\alpha^{2n}\xi\right)}{4}\int_{0}^{\frac{\xi}{\alpha^{n}}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n}t-\xi)\left(\frac{t}{\alpha^{n}}-\eta\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^{n}t-\alpha^{2n}\xi\right)\left(\alpha^{n}t-\eta\right)}}\psi(t)dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\left(\alpha^{2n+1}\eta-\xi\right)}{4}\int_{0}^{\frac{\eta}{\alpha^{n}}}\frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}t-\xi)\left(\frac{t}{\alpha^{n}}-\eta\right)}\right)}{\sqrt{\left(\alpha^{n}t-\alpha^{2n}\xi\right)\left(\alpha^{n+1}t-\eta\right)}}\psi(t)dt\,. \qquad (2)$$

Теорема. *Если функция* $\tau(\xi)\in C^1\left[0,\frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha>1$, *а* $\psi(\xi)\in C^2[0,1]$, *то существует единственное решение задачи* D' *и оно определяется формулой (2).*

Положим в равенстве (2) $\xi=0$, тогда

$$u(0,\eta)=\tau(0)+\psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\alpha^{2n+1}\eta}{4}\int_{0}^{\frac{\eta}{\alpha^{n}}}\frac{J_1\left(\sqrt{c\frac{t}{\alpha^{n}}(\alpha^{n+1}t-\eta)}\right)}{\sqrt{\alpha^{n+1}t\left(\alpha^{n}t-\alpha^{2n}\eta\right)}}\tau(t)dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\alpha^{2n+1}\eta}{4}\int_{0}^{\frac{\eta}{\alpha^{n}}}\frac{J_1\left(\sqrt{c\alpha^{n+1}t\left(\frac{t}{\alpha^{n}}-\eta\right)}\right)}{\sqrt{\alpha^{n}t\left(\alpha^{n+1}t-\eta\right)}}\psi(t)dt\,.$$

Литература

1. Сабитов К. Б., Акимов А. А. К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа // Известия ВУЗов.Математика. 2001. № 10. С.73 − 80.

2. Gellerstedt S. *Quelques problemes mixtes pour l'equation* $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$ // Arkiv for Matematik,Astronomi o ch Fysik. 1937. 26A (3). P. 1 − 32.

3. Акимов А. А. Задача Моравец для обобщенного уравнения Трикоми // Сибирские электронные математические известия. 2006. Т. 3. С. 71 - 82. http: //semr.math.nsc.ru.

4. Акимов А. А. Об одной теореме единственности задачи Моравец // Альманах современной науки и образования. 2010. № 12. С. 67-69.