SECTION 31. Economic research, Finance, innovation.

Naumov Anatoly Aleksandrovich,
Docent, candidate of Technical Sciences,
Center of Applied Mathematical Research, Novosibirsk, Russia,
e-mail: A_A_Naumov@mail.ru

TO ANALYTIC SOLUTIONS SOME OF MATHEMATICAL PROBLEMS OF ECONOMY

The paper presents the results of a study of two optimization problems: one of them refers to optimization problems of investment projects, and the second to optimize the capital structure to invest in production.

Key words: Investment projects, capital structure, optimize, simplify of tasks, analytical solution.

УДК 330.46: 658.155

К АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В работе приведены результаты исследования двух оптимизационных задач: одна из них относится к задачам оптимизации инвестиционных проектов, а вторая – оптимизации структуры капитала вкладываемого в производство. Показано, что обе задачи можно существенно упростить до такой степени, что решение каждой из них можно представить в аналитическом виде.

Ключевые слова: инвестиционные проекты, структура капитала, оптимизация, упрощение задач, аналитическое решение

Задачи оптимизации инвестиционных проектов и их особенности. В работе [1] рассмотрена задача оптимизации инвестиционных проектов на основе показателей NPV (чистого приведенного дохода), DPP (дисконтированного срока окупаемости), DPI (рентабельности или дисконтированного индекса доходности). Как будет показано ниже, эта задача может быть существенно упрощена и найдено ее точное решение.

Итак, пусть известны потоки инвестиционного проекта (в обозначениях работы [1]): $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}$ – входной поток (инвестиций) проекта; n_1 – длительность этапа инвестирования в проект; $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}$ – элементы выходного потока (доходов) проекта; n_2 – длительность этапа получения доходов от проекта; i – ставка дисконтирования или наращивания потоков проекта. Тогда для проекта можно оценить следующие показатели: чистый приведенный доход –

$$NPV(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) = \\ = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^k} - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{x_j}{(1+i)^j}, \quad (1)$$

дисконтированный срок окупаемости –

$$DPP(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) = \\ = -\ln\left\{1 - \frac{S(x_j)}{P(y_k)} \cdot (1 - (1+i)^{-n_2})\right\} / \ln(1+i), \quad (2)$$

где $S(x_j)$ – сумма инвестиций платежей, приведенная к моменту времени $t = n_1$, $S(x_j) = S(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}) = \sum_{j=1}^{n_1} x_j \cdot (1+i)^{n_1-j}$, а $P(y_k)$ – дисконтированная стоимость доходов, приведенная к моменту $t = n_1$, $P(y_k) = P(y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}) = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^{k-n_1}}$;

дисконтированный индекс доходности (рентабельность проекта) –

$$DPI(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^k} / \sum_{j=1}^{n_1} \frac{x_j}{(1+i)^j}. \quad (3)$$

Таким образом, оптимизация проекта может быть проведена через решение задачи (см. [1]):

$$NPV(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) \to \max \\ DPP(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) \to \min \quad (4)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 1 \le \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^k} / \sum_{j=1}^{n_1} \frac{x_j}{(1+i)^j} \le DPI_{max}, \\ x_{min} \le x_j \le x_{max}, \\ y_{min} \le y_k \le y_{max}, \\ i_{min} \le i \le IRR_0, \\ x_j, y_k, i \ge 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь IRR_0 - верхняя граница для ставки i. Отметим некоторые особенности модели (задачи оптимизации) (4)-(5). Показатели (в критериях и ограничениях) являются зависимыми. Отсюда следует, что можно оставить лишь один из показателей, например NPV, а остальные из задачи исключить. Решение оптимизационной задачи может быть найдено аналитически (оно является тривиальным). Так, для этой задачи оно имеет вид: $x_j = x_{j,min}$, $j = 1,2, \dots, n_1$, $y_k = y_{k,max}$, $k = n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$, $i = i_{min}$. Задача (4)-(5) содержит ошибочный вид для показателя DPP; используемая в данном случае формула для этого показателя находит его значение для совершенно другого проекта, поскольку при ее выводе был использован прием замены исходного выходного потока (потока доходов) проекта на другой, который с исходным потоком не совпадает. Задача (4)-(5) поставлена некорректно, поскольку в общем случае выходной поток (доходов) проекта зависит от входного потока (затрат, инвестиций), а это означает, что в ограничения задачи необходимо было дополнительно ввести ограничения, связывающие переменные $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}$ и $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}$. В силу того, что решение этой задачи находится тривиально и выглядит так, как это показано выше, то остается открытым вопрос: за счет чего будут снижены затраты (издержки, инвестиции) проекта и увеличена его доходная часть? Обычно на практике сначала решается вопрос о снижении издержек (затрат) и увеличении доходов, а уже потом пересчитываются значения показателей. Как правило, снижение затрат (x_j) связано с выбором новых источников финансирования, новых схем расчета по кредитам и т.д., а потому задача оптимизации становится дискретной, а алгоритм ее решения сводится к перебору вариантов инвестиционных схем (см. работы из списка [4]). Аналогично обстоит дело и с проблемой увеличения доходов (y_k). Это можно осуществить, например, за счет повышения цен на производимую продукцию. Ограничение сверху на значение рентабельности проекта (дисконтированного индекса доходности - DPI) представляется излишним; кроме того его можно заменить на эквивалентное этому ограничению ограничение на показатель NPV: $NPV \geq 0$. Поскольку очевидно, что, исходя из экономического смысла, выполняются неравенства $x_{j,min} \geq 0$ для всех $j = 1,2, \dots, n_1$, и $y_{k,min} \geq 0$ для всех $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$, то ограничения вида $x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n_1$, и $y_k \geq 0, k = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$, являются лишними. Аналогично обстоит дело и с ограничением для ставки дисконтирования i .

Задача оптимизации структуры капитала. В работах [2]-[3] рассмотрена задача оптимизации структуры капитала К инвестируемого в производство. В качестве переменных задачи выбраны: СК – объем собственных средств, ЗК – объем заемных средств; очевидно, при этом должно выполняться равенство $СК + ЗК = К$, а в качестве критериев этой задачи выступают рентабельность собственного капитала $R_{СК}$ и время оборота $T_{об}$ капитала К. Ограничения задачи – это ограничения на значения коэффициентов ($К_1$ – коэффициент автономии, $К_2$ – коэффициент обеспеченности собственными оборотными средствами, $К_3$ – коэффициент маневренности собственного капитала, $К_4$ – коэффициент долгосрочного привлечения заемных средств, $К_5$ – коэффициент финансовой устойчивости).

Приведем вид оптимизационной задачи в обозначениях авторов работ [2]-[3]:

$$R_{СК}(СК, ЗК) = \left[\frac{П_Э}{СК+ЗК} + \left(\frac{П_Э}{СК+ЗК} - r\right) \cdot \frac{ЗК}{СК}\right] \cdot (1 - N) \to \max$$

$$T_{об}(СК, ЗК) = \frac{СК+ЗК}{(П_Э - r \cdot ЗК) \cdot (1-N)} \to \min \qquad (6)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} k_1^{min} \le К_1(СК,ЗК) = \frac{СК}{СК+ЗК} \le k_1^{max}, \\ k_2^{min} \le К_2(СК,ЗК) = \frac{СК-ВА}{ОА} \le k_2^{max}, \\ k_3^{min} \le К_3(СК,ЗК) = \frac{СК-ВА}{СК} \le k_3^{max}, \\ k_4^{min} \le К_4(СК,ЗК) = \frac{ДП}{ДП+СК} \le k_4^{max}, \\ k_5^{min} \le К_5(СК,ЗК) = \frac{СК+ДП}{СК+ЗК} \le k_5^{max}, \\ \qquad СК + ЗК = К. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь переменными задачи (6)-(7) служат объемы собственных (СК) и заемных (ЗК) средств. Значения величин капитала (К), экономической прибыли ($П_Э$), средневзвешенной стоимости заемного капитала (r), ставки налога на прибыль (N), стоимости внеоборотных (ВА) и оборотных (ОА) активов, суммы долгосрочных обязательств (пассивов) (ДП) известны и определяются на следующий временной цикл. Числовые границы интервалов $[k_i^{min}, k_i^{max}]$, *i*=1,2,…,5, для каждого из коэффициентов $К_1, К_2, \dots, К_5$ выбираются исходя из особенностей производства.

Сделаем замечания к оптимизационной задаче (6)-(7). Авторы рассматривают построенную модель, как модель для оценки эффективности и прогнозирования финансово-хозяйственной деятельности организации. Однако, если говорить более точно, то модель представляет собою оптимизационную задачу для нахождения наилучшего соотношения частей капитала: собственного и заемного капитала для следующего временного периода, которая, задачу прогнозирования (в общепринятом смысле) не решает. Использовать в качестве одного из показателей рентабельность собственного капитала – это нелогично, т.к. прибыль предприятия будет получена от вложения всех средств (собственных и заемных). Было бы лучше оценивать рентабельность от вложений всего капитала (К). Ведь показатель $Т_{об}$ (из второго критерия) оценивается относительно общего объема капитала, а не только собственного. Получилось так, что один показатель оценивает эффективность вложения всего объема капитала, а другой – только его части. Особое отношение в таких задачах должно быть проявлено к их динамическим особенностям. Так, например, время оборота капитала ($Т_{об}(СК,ЗК)$), найденное для некоторого временного интервала, будет распространяться в общем случае и на временные интервалы времени следующие за ним. Однако, на следующем временном интервале будет решена новая задача (6)-(7) и найдено новое значение времени оборота капитала. Вывод: задачу оптимизации структуры капитала следует ставить и решать как задачу динамического программирования. В реальных условиях для реальных производств чаше всего известен объем собственного капитала (СК), который будет иметься в наличии на предстоящий период. А задача должна состоять в том, чтобы определить какую его часть следует вкладывать в данное производство, а какую привлечь в качестве заемного капитала (ЗК). Однако, в этом случае следует рассматривать еще и характеристики альтернативного проекта (производства), куда будут инвестированы остатки СК, не вложенные в данное производство. Конечно, это будет уже совсем другая задача, и она потребует новой постановки и отдельного исследования.

После упрощений и преобразований критериев и ограничений исходной задачи получим однокритериальную задачу от одной переменной:

$$\text{СК} \to \max \tag{8}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} k_1^{min} \le \frac{\text{СК}}{\text{К}} \le k_1^{max}, \\ k_2^{min} \le \frac{\text{СК}-\text{ВА}}{\text{ОА}} \le k_2^{max}, \\ k_3^{min} \le \frac{\text{СК}-\text{ВА}}{\text{СК}} \le k_3^{max}, \\ k_4^{min} \le \frac{\text{ДП}}{\text{ДП}+\text{СК}} \le k_4^{max}, \\ k_5^{min} \le \frac{\text{СК}+\text{ДП}}{\text{К}} \le k_5^{max}, \\ 0 \le \text{СК} \le \text{К}. \end{cases} \tag{9}$$

Отметим некоторые особенности полученной оптимизационной задачи (8)-(9). Во-первых, она представляет собой упрощенную (в смысле записи целевой функции и числа целевых функций) и улучшенную (в смысле согласования ее критериев) задачу оптимизации, зависящую от одной переменной. Во-вторых, при совместности ее ограничений (9) решение этой задачи находится аналитически без использования специальных программ для вычислительной техники (сравните с предлагаемым вариантом в [3]), и оно имеет вид: $\text{СК}^* = \min\{k_1^{max} \cdot \text{К},\ k_2^{max} \cdot \text{ОА} + \text{ВА},\ \text{ВА}/(1 - k_3^{max}),\ \text{ДП}/k_4^{min} - \text{ДП},\ k_5^{max} \cdot \text{К} - \text{ДП},\ \text{К}\}$.

Последнюю запись следует понимать так: среди перечисленных во множестве величин необходимо выбрать наименьшую. Остальные значения переменных, коэффициентов и критериев находятся с использованием значения СК^* очевидным образом. Так, например, можно найти: $\text{ЗК}^* = \text{К} - \text{СК}^*$, $R_\text{К}(\text{СК}^*) = \frac{(\text{П}_\text{э} - r\cdot(\text{К}-\text{СК}^*))\cdot(1-N)}{\text{К}}$, $T_{\text{об}}(\text{СК}^*) = \frac{\text{К}}{(\text{П}_\text{э} - r\cdot(\text{К}-\text{СК}^*))\cdot(1-N)}$, $K_1(\text{СК}^*) = \frac{\text{СК}^*}{\text{К}}$, $K_2(\text{СК}^*) = \frac{\text{СК}^*-\text{ВА}}{\text{ОА}}$, $K_3(\text{СК}^*) = \frac{\text{СК}^*-\text{ВА}}{\text{СК}^*}$ и т.д.

Литература

1. Кириллов Ю.В., Досужева Е.Е. Многокритериальная экономико-математическая модель оценки коммерческой эффективности

инвестирования// Финансовая аналитика: проблемы и решения, 2013, № 32, С. 18-24.
2. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная модель оптимизации структуры капитала// Экономический анализ: теория и практика. 2011. № 32. С. 57–63.
3. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная задача оптимизации структуры капитала и ее решение в системе Maple// Экономика и менеджмент систем управления, 2013, т. 8, № 2.1, С. 149-160.
4. Список трудов [Электронный ресурс]. URL: https://sites.google.com/site/anatolynaumov2011/home/spisok-trudov-list-of-papers (дата обращения: 25.09.2013).