SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Shevtsov Alexandr Nikolayevich
candidate of technical Sciences,
associateProfessor of the Department «Applied mathematics»,
Taraz State University named after M.Kh. Dulati, Kazakhstan

Keulimzhayeva Zhanara Askerbayevna
Master 1 courses of the specialty "Mathematics",
Taraz State University named after M.Kh. Dulati, Kazakhstan

DEVELOPMENT OF A METHOD AND ALGORITHMS OF CALCULATION OF THE AREA OF A CONVEX POLYGON WITH THE USE OF COMBINATORICS

The article is developed algorithm of calculation of the area of a convex polygon on the basis of formulas combinatorics.

Keywords: polygon area, combinatorics, Delphi.

УДК 519.21: 514.8: 004.43

РАЗРАБОТКА МЕТОДА И АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ПЛОЩАДИ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМБИНАТОРИКИ

В статье разрабатывается алгоритм расчета площади выпуклого многоугольника на основе формул комбинаторики.

Ключевые слова: многоугольник, площадь, комбинаторика, Дельфи.

Расчет площади выпуклого многоугольника по имеющимся координатам его вершин сводится к разбиению его на $n-2$ треугольника и вычисления их площадей по формуле Герона [1].

Однако возможны и другие методы [2-5]. Так например площадь многоугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, …, $F(x_n, y_n)$ равна сумме определителей, составленных из координат вершин многоугольника в порядке их обхода [2]

$$S = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right].$$

Но все эти методы основаны на том, что нам известен порядок обхода вершин, и все вершины образуют выпуклый многоугольник. В случае неопределенности задача усложняется и может решаться путем отбрасывания внутренних точек и проверке выпуклости. Мы же предлагаем метод расчета площади, с применением элементов комбинаторики.

Зададим цикл расчета сочетаний вершин многоугольника, рассмотрим частный случай – треугольник $n=3$. Найдем разбиение многоугольника на треугольники. Количество таких разбиений можно подсчитать по формуле сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = 1.$$

Если обозначить вершины через - A, B, C, то возможно построить только одно сочетание:

$$ABC\ .$$

В случае $n=4$, получим четырехугольник $ABCD$, или если одна из точек, пока неизвестно какая попадает внутрь треугольника образованного другими вершинами, то получаем один из четырех треугольников, количество которых тоже можно подсчитать через сочетания:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

$$ABC$$

$$ABD$$

$$ACD$$

$$BCD$$

Тогда площадь выпуклого многоугольника можно найти по формуле:

$$S_{Мног.} = Max\begin{Bmatrix} S_{ABCD}, \\ S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD}, S_{BCD} \end{Bmatrix}$$

В случае $n=5$, получим пятиугольник $ABCDE$, или один из пяти четырехугольников если одна точка лежит внутри, или соответственно если две точки попали внутрь, то получаем один из четырех треугольников, количество которых тоже можно подсчитать через сочетания:

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = 5, \quad C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10,$$

ABCD	*ABC*	*ADE*
ABCE	*ABD*	*BCD*
ABDE	*ABE*	*BCE*
ACDE	*ACD*	*BDE*
BCDE	*ACE*	*CDE*

Тогда площадь выпуклого многоугольника можно найти по формуле:

$$S_{Мног.} = Max \begin{Bmatrix} S_{ABCDE}, \\ S_{ABCD}, S_{ABCE}, S_{ABDE}, S_{ACDE}, S_{BCDE}, \\ S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ABE}, S_{ACD}, S_{ACE}, S_{ADE}, S_{BCD}, S_{BCE}, S_{BDE}, S_{CDE} \end{Bmatrix}$$

Получаем рекурентный алгоритм расчета площади выпуклого многоугольника. Для этого алгоритма нами была разработанна программа на Delphi, для расчета площади выпуклого многоугольника Рис.1-4 (в различных случаях расположения вершин). Также программа выводит все промежуточные данные: длины сторон треугольников, сочетания и площади всех фигур, используемых в расчетах Рис.5.

При $n=5$ задача немного усложнится в плане компьютерной реализации, и потребуется ввод в формулу дополнительного алгоритма, но принцип расчета останется прежним: разбиваем многоугольник на составляющие и ищем максимальную площадь.

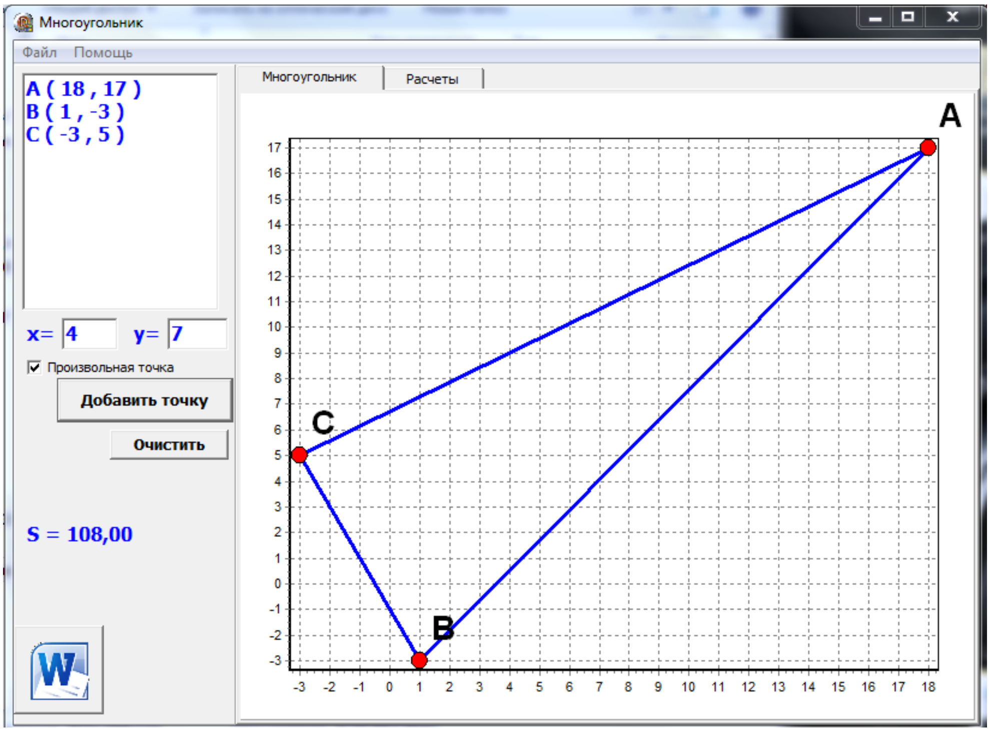

Рисунок 1 – Расчет площади треугольника.

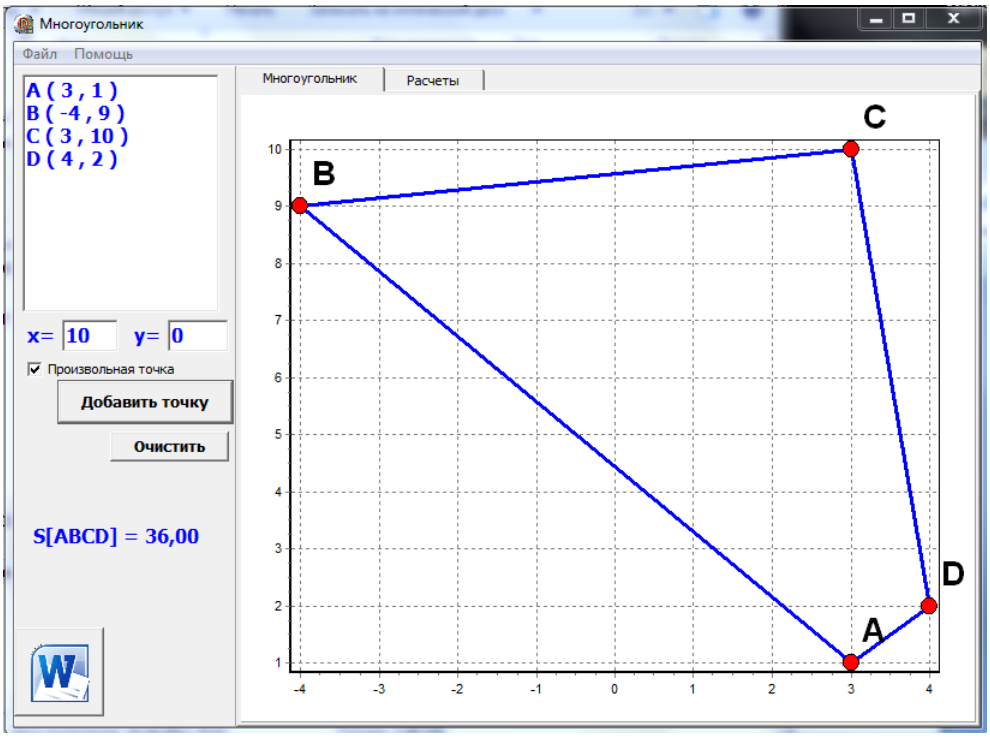

Рисунок 2 – Расчет площади многоугольника, $n = 4$.

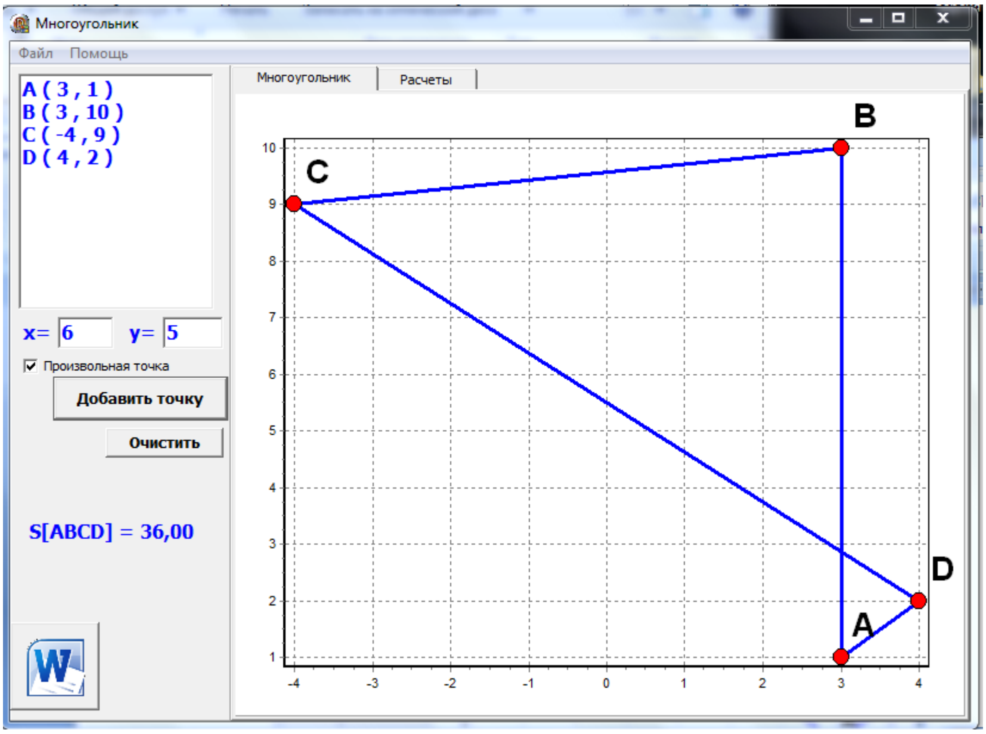

Рисунок 3 – Расчет площади многоугольника при различном порядке вершин, $n = 4$.

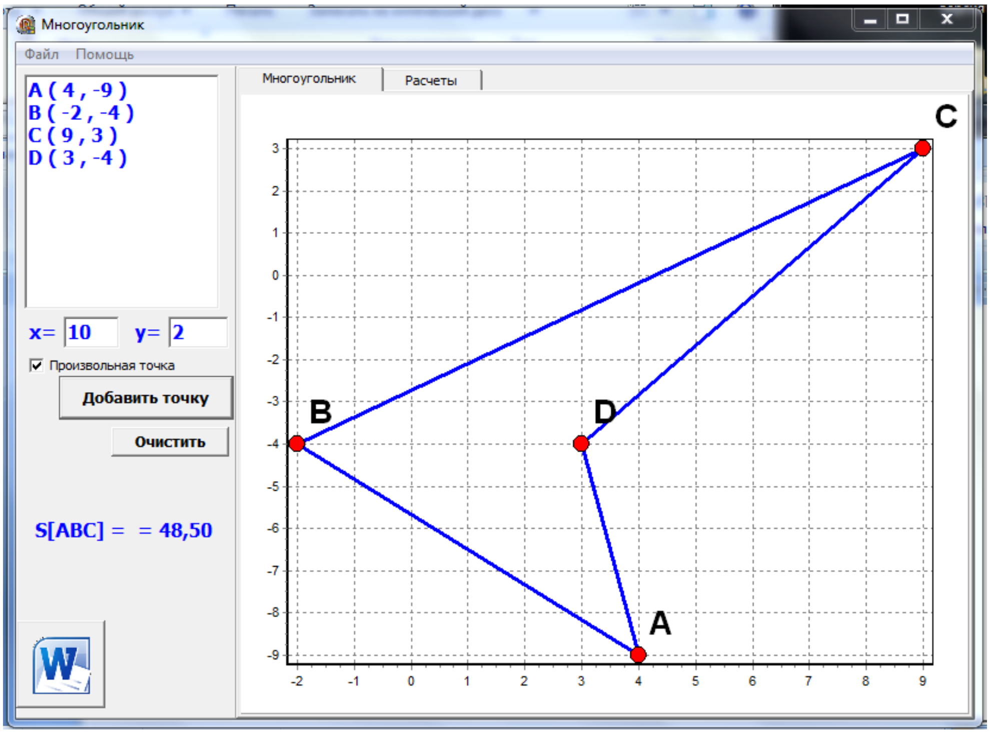

Рисунок 4 – Расчет площади многоугольника при попадании одной вершины внутрь треугольника.

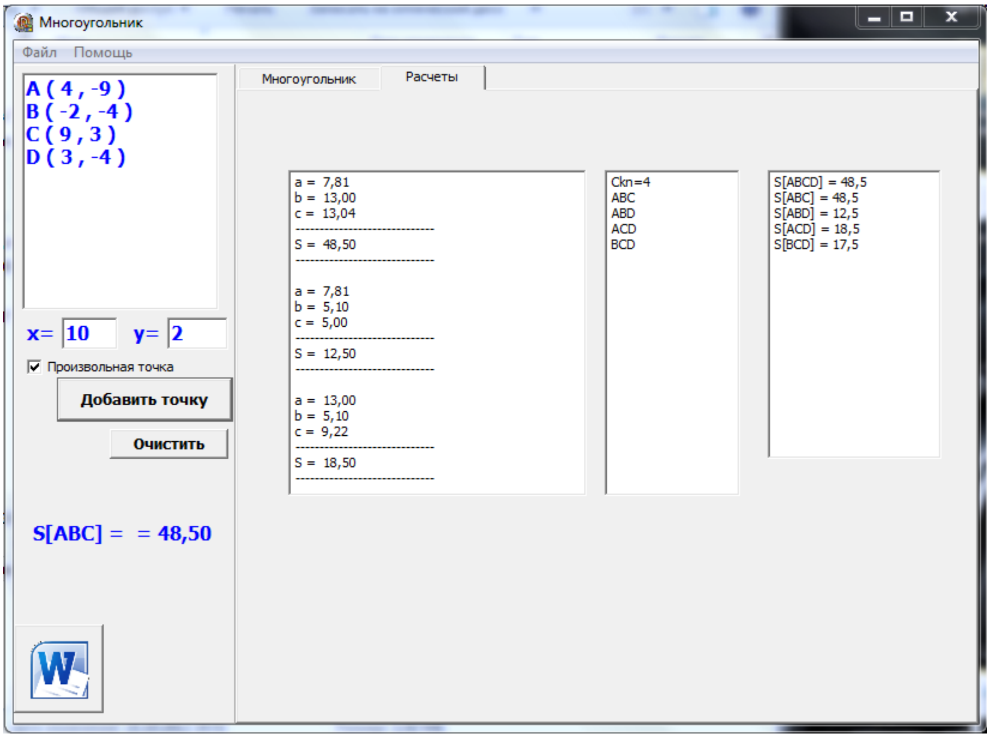

Рисунок 5 – Промежуточные расчеты сторон всех треугольников, сочетаний и площадей полученных в результате разбиения фигур.

Разработанные алгоритмы и программа позволяет находить площадь любого выпуклого многоугольника, независимо от количества вершин и места их расположения. Полученные методы могут использоваться при решении сложных задич из области химии, механики и физики, при нахождении работы, мощности, а также молекулярной физике и наноисследованиях при нахождении энергии.

Литература

1. Выпуклый многоугольник [Электронный ресурс]. URL:http://e-science.ru/math/theory/?t=256 (дата обращения: 12.03.2013).
2. Площадь многоугольника. [Электронный ресурс]. URL: http://www.pm298.ru/reshenie/delen.php (дата обращения: 12.03.2013).
3. Площадь многоугольника [Электронный ресурс]. URL:http://gospodaretsva.com/urok-34-ploshhad-mnogougolnika-2.html (дата обращения: 12.03.2013).
4. Вычисления площади произвольного многоугольника. [Электронный ресурс]. URL: http://works.tarefer.ru/69/100232/index.html (дата обращения: 12.03.2013).
5. Площадь выпуклого многоугольника. [Электронный ресурс]. URL:http://www.cyberforum.ru/pascalabc/thread363696.html (дата обращения: 20.03.2013).